

УДК 539.37+622.01+514.86

## НЕЕКЛИДОВА МОДЕЛЬ ЗОНАЛЬНОЙ ДЕЗИНТЕГРАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД ВОКРУГ ПОДЗЕМНОЙ ВЫРАБОТКИ

М. А. Гузев, А. А. Парошин

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток

Рассматривается неевклидова модель сплошной среды для описания распределения поля напряжений вокруг подземных выработок круглого сечения. С физической точки зрения параметр неевклидовости определяет несовместность упругих деформаций в горном массиве. Показано, что зоны дезинтеграции можно отождествить с теми частями массива, в которых этот параметр принимает максимальные значения и выполняется силовой критерий нарушения сплошности среды. Проведенный анализ позволяет связать макроскопические характеристики зонального разрушения горных пород вокруг выработки с параметром неевклидовости.

**Введение.** Из экспериментальных исследований известно, что вокруг горных выработок возникает зональная периодическая структура в виде чередующихся областей разрушенной и относительно неразрушенной породы [1–5]. Описать появление такой структуры на основе классической модели сплошной среды невозможно, поскольку, если рассматривать задачу о распределении поля напряжений вокруг выработки круглого сечения при условии плоской деформации [6] с заданным на бесконечности напряжением  $\sigma_\infty$ , то в рамках классической модели главное радиальное напряжение  $\sigma_{rr}$  и угловое напряжение  $\sigma_{\varphi\varphi}$  имеют экстремумы на контуре выработки и монотонно стремятся к  $\sigma_\infty$  на бесконечности. Однако экспериментально наблюдаемое чередование зон разрушения вокруг выработки соответствует возникновению сжатия и растяжения горных пород, т. е. свидетельствует о волнообразном поведении компонент напряжений. В [4, 5] для описания такого поведения поля напряжений использовалось пластическое решение для цилиндрической полости в условиях плоскодеформированного состояния. В рамках этой модели в [7] была предпринята попытка решить краевую задачу о распределении поля напряжений вокруг выработки в стационарном состоянии. Однако “...для определения внутренних границ требуется объем информации теоретически континуальной мощности, ... недоступный в конкретных условиях...” [7, с. 129]. В то же время из результатов проведенных в статическом режиме экспериментов [8] на моделях из эквивалентных материалов с целью исследования зонального характера разрушения вокруг выработок следует, что для данного материала число возникающих зон зависит от отношения приложенного усилия к пределу прочности материала. При этом расстояние между образовавшимися зонами примерно равно радиусу выработки.

Сложность построения количественной теории явления зональной дезинтеграции определяется необходимостью моделировать поведение среды, обладающей свойствами как упругого деформирования (неразрушенные зоны вокруг выработки), так и процесса разрушения. С физической точки зрения формирование зон разрушения зависит от наличия в среде микродефектов, которые под действием приложенного напряжения приводят к обра-

зованию макроскопических структур, в частности магистральной трещины [8], повторяющей форму выработки. Для описания дефектов можно использовать методы современной геометрии [9], отказываясь от классической гипотезы о совпадении внутренней геометрии материала с геометрией евклидова пространства наблюдателя. При этом можно строить модель, расширяя число параметров классической теории.

Общая идея расширения классической модели заключается в следующем: 1) вводятся параметры, характеризующие неевклидовость внутренней геометрии среды; 2) эти параметры связываются с макроскопическими характеристиками среды; 3) указывается способ определения феноменологических параметров модели путем анализа экспериментальных данных. Реализация этой идеи предлагается в данной работе. Некоторые результаты такого подхода опубликованы в [10].

**1. Переход от классической модели к неевклидовой.** Используется общепринятая в механике подземных сооружений математическая модель массива [6], в которой массив рассматривается как невесомая плоскость, ослабленная отверстием, моделирующим круглую закрепленную выработку в условиях всестороннего сжатия. Задача о распределении поля напряжений вокруг выработки формулируется в стационарной постановке. В силу полярной симметрии задачи уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (1.1)$$

На контуре выработки ( $r = r_0$ ) внешние силы отсутствуют, а на бесконечности они заданы:

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad \sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi} \rightarrow \sigma_\infty \quad \text{при} \quad r \rightarrow r_\infty. \quad (1.2)$$

В классической модели компоненты деформации  $\varepsilon_{ij}$  являются обратимыми (упругими) и совпадают с полными деформациями, описываемыми тензором Альманси  $A_{ij}$  в переменных Эйлера. Тогда выполняются условия совместности для деформаций (обращение в нуль тензора Римана — Кристоффеля  $R_{lijk}$ ). Геометрический смысл тензора  $R_{lijk}$  состоит в том [11], что он является инвариантной характеристикой евклидовости некоторого множества (если  $R_{lijk} = 0$ , то можно ввести евклидовы координаты на этом множестве). Выполнение условий совместности для горного массива означает, что его внутренняя геометрическая структура совпадает со структурой евклидова (внешнего по отношению к массиву) пространства. Для малых деформаций условия совместности называются условиями совместности Сен-Венана и для плоскодеформированного состояния записываются в виде

$$R \equiv 2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 2 \left( \Delta \varepsilon_{ll} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right); \quad (1.3)$$

$$R = 0, \quad (1.4)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Для классической модели условие совместности (1.4) сводится к виду

$$\Delta \sigma = 0, \quad (1.5)$$

где  $\sigma = \text{sp} \sigma_{ij}$  — след тензора напряжений. Уравнения (1.1)–(1.5) соответствуют классической задаче о распределении напряжений вокруг выработки.

Процесс образования зон вокруг выработки необратимый, поэтому наряду с тензором упругих деформаций следует ввести тензор необратимой деформации  $\pi_{ij}$  в качестве дополнительного параметра задачи. В этом случае в уравнениях состояния массива  $\varepsilon_{ij}$  и  $\pi_{ij}$  рассматриваются как термодинамические переменные. При этом необходимо задать

соотношения, определяющие связь  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\pi_{ij}$  с тензором Альманси  $A_{ij}$ . Деформации, при которых формируются зоны, малы, поэтому используется предположение об аддитивности обратимых и необратимых деформаций:

$$A_{ij} = \varepsilon_{ij} + \pi_{ij}. \quad (1.6)$$

Поскольку  $\varepsilon_{ij} \neq A_{ij}$ , функция  $R$  не обращается в нуль. Заметим, что для тензора  $A_{ij}$  всегда справедливо представление через компоненты вектора смещения  $u_i$ , которое при малых деформациях имеет вид  $2A_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ . Тогда условие совместности (1.3), (1.4) для  $\varepsilon_{ij} = A_{ij}$  удовлетворяется тождественно.

Таким образом, появление в массиве необратимых деформаций приводит к невыполнению условия совместности для  $\varepsilon_{ij}$ . С математической точки зрения это означает, что внутренняя геометрическая структура массива неевклидова. При этом  $R$  имеет смысл скалярной кривизны [11] — следа тензора Риччи, который в трехмерном пространстве полностью определяет тензор Римана — Кристоффеля. В условиях плоскодеформированного состояния скалярная кривизна является единственным параметром неевклидовости внутренней структуры массива. Переход от классической модели, в которой  $R = 0$ , к неевклидовой выполняется за счет варьирования скрытого параметра  $R$ .

Для неевклидовой модели остаются справедливыми уравнения равновесия (1.1) и краевые условия (1.2). Вопросы, выполняется ли закон Гука при введении параметра дефектности  $R$  и какому уравнению удовлетворяет  $R$ , решаются на основе принципов неравновесной термодинамики. В этом случае, как показано ниже, необходимо задать внутреннюю энергию  $U$  массива и диссипативную функцию  $\mathcal{D}$ .

Внутренняя энергия рассматривается как функция энтропии  $s$ , тензора обратимой деформации  $\varepsilon_{ij}$  и параметра  $R$ :  $U = U(s, \varepsilon_{ij}, R)$ . Так как деформации  $\varepsilon_{ij}$  малы, зависимость  $U$  от этих переменных представим в виде потенциала Гука. Дополнительный вклад в этот потенциал должен учитывать зависимость  $U$  от неевклидовой внутренней структуры. Предположим, что он входит аддитивно и квадратичен по  $R$ , т. е.

$$\rho_0 U = \frac{E}{1 + \nu} \left\{ \frac{\nu}{2(1 - 2\nu)} \varepsilon_{jj}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \right\} - \frac{q}{4} R^2, \quad (1.7)$$

где  $\rho_0$  — плотность среды;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $q$  — “подгонный” параметр модели, определяемый на основе экспериментальных данных; здесь и далее по повторяющимся индексам  $i, j$  проводится суммирование.

**2. Кинематические соотношения и уравнения состояния.** Использование функций  $\varepsilon_{ij}$ ,  $R$  в качестве переменных приводит к необходимости построить для них уравнения переноса. Тензор Альманси в процессе движения изменяется следующим образом:

$$\frac{DA_{ij}}{Dt} = \frac{dA_{ij}}{dt} + A_{il} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} + A_{lj} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij}. \quad (2.1)$$

Из (2.1) и (1.6) следует

$$e_{ij} = \frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} + \frac{D\pi_{ij}}{Dt}. \quad (2.2)$$

Введем источник  $E_{ij}$  необратимых деформаций  $\pi_{ij}$  [9], полагая

$$\frac{D\pi_{ij}}{Dt} = E_{ij}. \quad (2.3)$$

Из (2.2), (2.3) получаем уравнения переноса для тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$

$$\frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} = e_{ij} - E_{ij}. \quad (2.4)$$

При выводе уравнения переноса для  $R$  учтем, что при малых деформациях можно не различать дифференцирование  $d/dt$  и  $\partial/\partial t$ , тогда

$$\frac{dR}{dt} = -2 \left( \Delta E_{ll} - \frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right). \quad (2.5)$$

Следуя стандартной схеме неравновесной термодинамики [12], первый и второй законы термодинамики запишем в виде

$$\rho \frac{dU}{dt} = - \frac{\partial J_{(q)k}}{\partial x_k} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad \rho \frac{ds}{dt} = - \frac{\partial J_{(s)k}}{\partial x_k} + \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \geq 0. \quad (2.6)$$

Здесь функции  $J_{(q)k}$ ,  $J_{(s)k}$  — составляющие потоков тепла и энтропии;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\rho$  — плотность;  $s$  — удельная энтропия;  $\mathcal{D}$  — диссипативная функция. Вдоль траектории движения выполняется тождество Гиббса

$$\frac{dU}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial R} \frac{dR}{dt},$$

где  $T$  — температура. Подставляя выражения для производных по времени от внутренней энергии и энтропии из (2.6), получим

$$- \frac{\partial J_{(s)k}}{\partial x_k} + \mathcal{D} = - \frac{1}{T} \frac{\partial J_{(q)k}}{\partial x_k} + \frac{1}{T} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{dR}{dt} \right). \quad (2.7)$$

Из правой части (2.7) исключим производные по времени от  $\varepsilon_{ij}$  и  $R$ , используя уравнения переноса (2.4), (2.5), тогда

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}} \frac{d\varepsilon_{ik}}{dt} = (\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik}) \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kj}} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \rho E_{ij} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad (2.8)$$

$$\frac{\rho}{T} \frac{\partial U}{\partial R} \frac{dR}{dt} = - \frac{J}{T} \left( \Delta E_{ll} - \frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad J \equiv 2\rho \frac{\partial U}{\partial R}. \quad (2.9)$$

Перепишем (2.9), выделяя дивергентный вклад:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{T} \frac{\partial U}{\partial R} \frac{dR}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{J}{T} \frac{\partial E_{ll}}{\partial x_k} - \frac{E_{ll}}{T} \frac{\partial J}{\partial x_k} - \frac{J}{T} \frac{\partial E_{kj}}{\partial x_j} + \frac{E_{kj}}{T} \frac{\partial J}{\partial x_j} \right) + \\ &+ \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_k} \left( J \frac{\partial E_{ll}}{\partial x_k} - E_{ll} \frac{\partial J}{\partial x_k} - J \frac{\partial E_{kj}}{\partial x_j} + E_{kj} \frac{\partial J}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{T} \left( E_{ll} \Delta J - E_{ij} \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставим (2.8), (2.10) в (2.7), в результате приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( - \frac{J_{(q)k}}{T} + J_{(s)k} + \frac{J}{T} \frac{\partial E_{ll}}{\partial x_k} - \frac{E_{ll}}{T} \frac{\partial J}{\partial x_k} - \frac{J}{T} \frac{\partial E_{kj}}{\partial x_j} + \frac{E_{kj}}{T} \frac{\partial J}{\partial x_j} \right) + \mathcal{D} = \\ = \frac{1}{T} \left[ \sigma_{ij} - (\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik}) \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kj}} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{E_{ij}}{T} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} + \delta_{ij} \Delta J - \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \\ + \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_k} \left( - J_{(q)k} + J \frac{\partial E_{ll}}{\partial x_k} - E_{ll} \frac{\partial J}{\partial x_k} - J \frac{\partial E_{kj}}{\partial x_j} + E_{kj} \frac{\partial J}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В соответствии с предположениями неравновесной термодинамики диссипативная функция представляется билинейной формой термодинамических сил и потоков [12]:  $\mathcal{D} = X_i Y_i$ . Следствием этого утверждения и соотношения (2.11) являются выражения для потока энтропии и диссипативной функции

$$J_{(s)k} = \frac{J_{(q)k}}{T} - \frac{J}{T} \frac{\partial E_{ll}}{\partial x_k} + \frac{E_{ll}}{T} \frac{\partial J}{\partial x_k} + \frac{J}{T} \frac{\partial E_{kj}}{\partial x_j} - \frac{E_{kj}}{T} \frac{\partial J}{\partial x_j},$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{T} \left[ \sigma_{ij} - (\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik})\rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kj}} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{E_{ij}}{T} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} + \delta_{ij} \Delta J - \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_k} \left( -J_{(q)k} + J \frac{\partial E_{ll}}{\partial x_k} - E_{ll} \frac{\partial J}{\partial x_k} - J \frac{\partial E_{kj}}{\partial x_j} + E_{kj} \frac{\partial J}{\partial x_j} \right). \quad (2.12)$$

Предположим, что внутренняя энергия и диссипативная функция заданы, тогда в соответствии с (2.12) можно записать уравнения состояния массива

$$\sigma_{ij} = (\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik})\rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kj}}, \quad \frac{1}{T} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} + \delta_{ij} \Delta J - \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial E_{ij}}. \quad (2.13)$$

Для теплового потока примем приближение линейных связей

$$-J_{(q)k} + J \frac{\partial E_{ll}}{\partial x_k} - E_{ll} \frac{\partial J}{\partial x_k} - J \frac{\partial E_{kj}}{\partial x_j} + E_{kj} \frac{\partial J}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad \lambda \geq 0, \quad (2.14)$$

где  $\lambda$  — феноменологический параметр.

В приближении малых деформаций полагаем  $\rho = \rho_0$ . Подставляя (1.7) в (2.13), получаем

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1 - 2\nu} I_1 \right), \quad I_1 = \varepsilon_{ll}; \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{T} \left( \sigma_{ij} - q \delta_{ij} \Delta R + q \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial E_{ij}}, \quad (2.16)$$

где  $I_1$  — первый инвариант тензора упругой деформации. Из (2.15) следует, что при параметризации внутренней энергии, задаваемой соотношением (1.7), компоненты напряжений и обратимых деформаций связаны классическим законом Гука.

**3. Вычисление параметра дефектности  $R$ .** Функция  $R$  удовлетворяет уравнению (2.5). В стационарном состоянии  $dR/dt = 0$  и

$$\Delta E_{ll} - \frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \quad (3.1)$$

Источники  $E_{ij}$  определяются через диссипативную функцию  $\mathcal{D}$  в соответствии с (2.16). Для обеспечения неотрицательности  $\mathcal{D}$  примем зависимость между источником  $E_{ij}$  необратимых деформаций и термодинамическими силами в виде

$$E_{ij} = \xi \left( \sigma_{ij} - q \delta_{ij} \Delta R + q \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad \xi \geq 0. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), имеем

$$2q \Delta^2 R - \Delta \sigma = 0, \quad \sigma = \sigma_{ll}. \quad (3.3)$$

Величина  $\sigma$  находится из уравнения состояния (2.15):  $\sigma = EI_1/(1 - 2\nu)$ . Связь между первым инвариантом  $I_1$  и  $R$  определяется соотношением (1.3). Подставив в (1.3)

$$\varepsilon_{ij} = [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \delta_{ij}\nu\sigma]/E, \quad (3.4)$$

получим

$$R = 2 \left( \Delta I_1 + \frac{\nu}{E} \Delta \sigma \right) = 2 \left( \frac{1 - 2\nu}{E} \Delta \sigma + \frac{\nu}{E} \Delta \sigma \right) = \frac{2(1 - \nu)}{E} \Delta \sigma. \quad (3.5)$$

В предельном случае классической модели функция  $R = 0$  и уравнение (3.5) сводится к уравнению совместности (1.5). Из (3.3), (3.5) следует уравнение

$$\Delta^2 R - \gamma^2 R = 0, \quad \gamma^2 = E/[4q(1 - \nu)]. \quad (3.6)$$

Для записи краевых условий для  $R$  рассмотрим сначала тепловой поток  $J_{(q)k}$  (2.14), полагая  $T = \text{const}$ . Ненулевой вклад в  $J_{(q)k}$  совпадает с плотностью потока дефектов горного массива. Поскольку дефекты не выходят за границу выработки ( $r = r_0$ ), нормальная компонента вектора потока должна обращаться в нуль при  $r = r_0$ , т. е.

$$(\mathbf{n}, \mathbf{J}_{(q)})|_{r=r_0} = 0. \quad (3.7)$$

При  $r \rightarrow \infty$  функция  $R$  должна удовлетворять естественному с физической точки зрения требованию убывания на бесконечности. Необходимо отметить, что уравнение (3.6) и сформулированные для него краевые условия справедливы в случае как плоской, так и пространственной деформации.

Для рассматриваемого случая плоской деформации зависимость от полярного угла отсутствует, тогда функция  $R(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 R = \gamma^2 R.$$

Это линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка, его решение, убывающее при  $r \rightarrow \infty$ , записывается в виде

$$R(r) = aJ_0(\sqrt{\gamma}r) + bN_0(\sqrt{\gamma}r) + cK_0(\sqrt{\gamma}r), \quad (3.8)$$

где  $J_0$ ,  $N_0$ ,  $K_0$  — соответственно функции Бесселя, Неймана, Макдональда нулевого порядка. Воспользуемся краевыми условиями (3.7) в плоском случае

$$\begin{aligned} & \left[ \left( J \frac{\partial E_{22}}{\partial x_1} - E_{22} \frac{\partial J}{\partial x_1} - J \frac{\partial E_{12}}{\partial x_2} + E_{12} \frac{\partial J}{\partial x_2} \right) \cos \varphi + \right. \\ & \left. + \left( J \frac{\partial E_{11}}{\partial x_2} - E_{11} \frac{\partial J}{\partial x_2} - J \frac{\partial E_{12}}{\partial x_1} + E_{12} \frac{\partial J}{\partial x_1} \right) \sin \varphi \right]_{r=r_0} = 0. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Перейдем к полярным координатам в (3.9) по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$E_{rr} = E_{11} \cos^2 \varphi + E_{22} \sin^2 \varphi + E_{12} \sin 2\varphi, \quad E_{\varphi\varphi} = E_{11} \sin^2 \varphi + E_{22} \cos^2 \varphi - E_{12} \sin 2\varphi,$$

$$E_{r\varphi} = -((E_{11} - E_{22})/2) \sin 2\varphi + E_{12} \cos 2\varphi.$$

Опуская простые вычисления, получаем

$$\left[ J \left( \frac{\partial E_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{E_{rr} - E_{\varphi\varphi}}{r} \right) - E_{\varphi\varphi} \frac{\partial J}{\partial r} + \frac{E_{r\varphi}}{r} \frac{\partial J}{\partial \varphi} \right]_{r=r_0} = 0.$$

Поскольку источники предполагаются независимыми, то  $J|_{r=r_0} = 0$ ,  $(\partial J/\partial r)|_{r=r_0} = 0$ ,  $(\partial J/\partial \varphi)|_{r=r_0} = 0$ . Используя явный вид потенциала (1.7) и учитывая определение  $J$  (2.9), для функции  $R$  имеем краевые условия

$$R|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial r}|_{r=r_0} = 0. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.8) в (3.10), получаем алгебраическую неоднородную систему уравнений для определения коэффициентов  $a$ ,  $b$  через  $c$ , определитель которой совпадает с вронскианом линейно независимых решений  $J_0$ ,  $N_0$ , что гарантирует ее однозначную разрешимость:

$$a = (c/2)\pi\sqrt{\gamma}r_0[K_0(\sqrt{\gamma}r_0)N_1(\sqrt{\gamma}r_0) - K_1(\sqrt{\gamma}r_0)N_0(\sqrt{\gamma}r_0)],$$

$$b = -(c/2)\pi\sqrt{\gamma}r_0[K_0(\sqrt{\gamma}r_0)J_1(\sqrt{\gamma}r_0) - K_1(\sqrt{\gamma}r_0)J_0(\sqrt{\gamma}r_0)].$$

**4. Вычисление компонент напряжений.** Для рассматриваемого случая плоской деформации компоненты  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{z\varphi}$ ,  $\varepsilon_{zr}$  равны нулю. При этом напряжение  $\sigma_{zz} \neq 0$  и, как следует из (3.4), определяется из соотношения  $(1 + \nu)\sigma_{zz} = \nu\sigma$ , где  $\sigma = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}$ . Отсюда находим  $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})$  и с учетом (1.2) имеем  $\sigma \rightarrow 2(1 + \nu)\sigma_\infty$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Функция  $\sigma$  удовлетворяет уравнению (3.5) с известной функцией  $R$ , решение которого дается формулой

$$\sigma = -\frac{E}{2\gamma(1 - \nu)} [aJ_0(\sqrt{\gamma}r) + bN_0(\sqrt{\gamma}r) - cK_0(\sqrt{\gamma}r)] + 2(1 + \nu)\sigma_\infty.$$

Подставим  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma/(1 + \nu) - \sigma_{rr}$  в уравнение равновесия (1.1):

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr}}{r} = \frac{\sigma}{(1 + \nu)r}. \quad (4.1)$$

При интегрировании (4.1) воспользуемся формулами для дифференцирования цилиндрических функций

$$\frac{d}{dr} [rJ_1(r)] = rJ_0(r), \quad \frac{d}{dr} [rN_1(r)] = rN_0(r), \quad \frac{d}{dr} [rK_1(r)] = -rK_0(r).$$

Выполнив соответствующие вычисления, получаем выражения для компонент напряжения

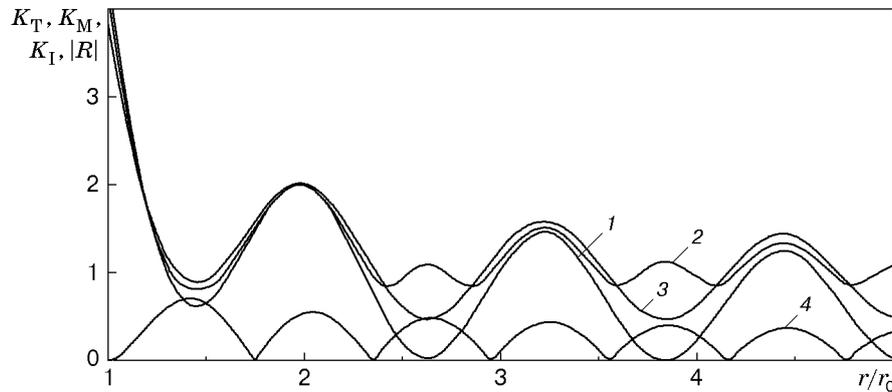
$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{E}{2\gamma^{3/2}(1 - \nu^2)r} [aJ_1(\sqrt{\gamma}r) + bN_1(\sqrt{\gamma}r) + cK_1(\sqrt{\gamma}r)], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{E}{2\gamma^{3/2}(1 - \nu^2)r} [aJ_1(\sqrt{\gamma}r) + bN_1(\sqrt{\gamma}r) + cK_1(\sqrt{\gamma}r)] - \\ &\quad - \frac{E}{2\gamma(1 - \nu^2)} [aJ_0(\sqrt{\gamma}r) + bN_0(\sqrt{\gamma}r) - cK_0(\sqrt{\gamma}r)]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

**5. Локализация зон дезинтеграции.** Зная компоненты напряжений и функцию  $R$ , необходимо выделить области горного массива, соответствующие зонам дезинтеграции. Поскольку  $R$  является характеристикой несовместности деформаций, определяющей нарушение сплошности среды в этих зонах, то максимумы  $|R|$  следует отождествить с областями разрушения этих зон. Однако, как показывает эксперимент, зоны дезинтеграции появляются, когда напряжения в материале достигают некоторого критического значения. С физической точки зрения это означает, что необходимо использовать силовой критерий, выполнение которого в выделенной области соответствует появлению зоны. В качестве таких критериев будем использовать условия Мизеса, Треска, Ишлинского. Введем функции, соответствующие этим условиям:

$$\begin{aligned} K_M &= A\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \\ K_T &= B \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad K_I = C \max |\sigma_i - \sigma|, \end{aligned}$$

где  $\sigma_j$  — компоненты главных напряжений;  $A, B, C$  — “подгоночные” параметры. Тогда зоны дезинтеграции следует отождествить с теми областями горного массива, в которых функции  $K_M, K_T, K_I$  одновременно достигают максимальных значений. Для определения параметров  $A, B, C, \gamma, c$  достаточно иметь данные о месте возникновения первой зоны дезинтеграции. Расположение остальных зон и напряжение, необходимое для их возникновения, можно предсказать в рамках описанной выше модели.

Выбор параметров модели осуществляется следующим образом. Параметр  $c$  выбираем так, чтобы классический вклад в решение (4.2) и дополнительный вклад имели один и тот



же порядок при  $r > r_0$ . Тогда из асимптотического поведения функций следует, что  $c$  есть величина порядка  $\exp(\sqrt{\gamma}r_0)/r_0^2$ . Параметр  $\gamma$  зависит от радиуса выработки  $r_0$  и подбирается таким образом, чтобы период функции  $R$  был равен расстоянию от края выработки до первой зоны дезинтеграции. Зная значение напряжения  $\sigma_\infty^*$ , при котором образуется первая зона разрушения, выбираем константы  $A, B, C$  так, чтобы функции  $K_T, K_M, K_I$  достигали некоторого значения  $K^*$  в первой зоне дезинтеграции при  $\sigma_\infty = \sigma_\infty^*$ .

Численные расчеты выполнены для модели выработки [8] с  $r_0 = 0,07$  м, значения физических констант эквивалентных материалов:  $\sigma_\infty^* = 1,1$  МПа,  $E = 150$  МПа,  $\nu = 0,15$ . При этом выбраны следующие “подгоночные” параметры:  $\sqrt{\gamma}r_0 = 5,2$ ,  $c = 18\,620$  м<sup>-2</sup>,  $K^* = 2$  МПа,  $A = 0,75$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1,5$ . Результаты вычислений приведены на рисунке. По оси абсцисс отложено отношение расстояния  $r$  от центра выработки (начала координат) к радиусу выработки  $r_0$ , по оси ординат — значения критериальных функций  $K_T, K_M, K_I$ , а также параметр неевклидовости  $|R|$  после перенормировки, поскольку  $|R|$  имеет другую размерность по сравнению с функциями  $K_T, K_M, K_I$ . Кривая 1 соответствует функции  $K_T$ , кривая 2 —  $K_M$ , кривая 3 —  $K_I$ , кривая 4 —  $|R|$ . Согласно принятой гипотезе первая зона дезинтеграции соответствует одновременному достижению всеми критериальными функциями максимумов при  $r = 2r_0$ . Как видно на рисунке, вторая и третья зоны дезинтеграции должны появляться при  $r = 3,2r_0$ ,  $r = 4,4r_0$ . Этот вывод совпадает с полученными результатами экспериментов [8], проведенных на моделях из эквивалентных материалов.

**6. Обсуждение результатов.** Рассмотренный вариант обобщения классической теории с переходом от евклидовой к неевклидовой внутренней геометрической структуре массива позволяет в рамках традиционного формализма неравновесной термодинамики связать геометрические характеристики с макроскопическими параметрами зональной дезинтеграции горных пород вокруг выработки. Сделаем несколько замечаний о принятых допущениях в предложенной модели.

Отметим, что при выборе зависимости внутренней энергии (1.7) от параметра  $R$  следовало бы учесть дополнительный вклад вида  $\gamma_2 R I_1$ , соответствующий энергии взаимодействия дефектной структуры с полем упругих деформаций ( $\gamma_2$  — дополнительный параметр модели). Однако, как показывает предварительный анализ, новых специальных функций в выражениях для компонент напряжений и параметра дефектности  $R$  не возникает, решение имеет периодический характер. Наличие дополнительного “подгоночного” параметра  $\gamma_2$  позволяет точнее согласовать результаты моделирования с экспериментальными данными.

При выводе уравнения (2.5) пренебрегалось различием дифференцирований  $d/dt$  и  $\partial/\partial t$  из-за малости деформаций. Тем не менее оператор полной производной остается

в левой части (2.5) и в случае конечных деформаций. Для обоснования этого утверждения следует воспользоваться уравнением для тензора Римана — Кристоффеля  $R_{lijq}$  в случае полных деформаций [9], а затем, используя определение  $R = g^{jl}g^{iq}R_{lijq}$  [11], получить (2.5) ( $g^{jl}$ ,  $g^{iq}$  — элементы обратной матрицы внутреннего метрического тензора).

Соотношение (2.5) и условия (3.10) справедливы также для сферической выработки. Если для нее рассмотреть стационарную задачу о распределении поля напряжений, то периодический характер поведения главных компонент напряжений, как показывают вычисления, определяется линейной комбинацией  $\sin(\sqrt{\gamma}r)$ ,  $\cos(\sqrt{\gamma}r)$  и  $\exp(-\sqrt{\gamma}r)$  с коэффициентами в виде полиномов от  $1/r$ . Отметим, что в пространственном случае тензор Римана — Кристоффеля кроме скалярной кривизны  $R$  имеет два дополнительных инварианта, которые следует включить в модель, учитывая различную ориентацию дефектных структур горного массива.

В данной работе представлена периодическая установившаяся структура вокруг выработки. Однако при описании пути ее образования возникают непростые вопросы. Например, в реальном массиве существуют микронеоднородности (появление которых зависит от конкретных условий формирования горной породы), определяющие величину несовместности деформаций в начальном состоянии. При этом зоны дезинтеграции располагаются с постоянной периодичностью, определяемой радиусом выработки. Анализ возможностей реализации начальных условий требует конкретизации диссипативных характеристик рассматриваемого материала и дополнительного экспериментального изучения деформационных полей с различным уровнем разрешения при измерениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тропп Э. А., Розенбаум М. А., Рева В. Н., Глушихин Ф. П. Зональная дезинтеграция породы вокруг горных выработок на больших глубинах. Л., 1985. (Препр. / АН СССР. Физ.-техн. ин-т им. А. Ф. Иоффе; № 976).
2. Шемякин Е. И., Фисенко Г. Л., Курленя М. В. и др. Зональная дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок. Ч. 1. Данные натуральных наблюдений // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1986. № 3. С. 3–15.
3. Шемякин Е. И., Фисенко Г. Л., Курленя М. В. и др. Зональная дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок. Ч. 2. Разрушение горных пород на моделях из эквивалентных материалов // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1986. № 4. С. 3–12.
4. Шемякин Е. И., Фисенко Г. Л., Курленя М. В. и др. Зональная дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок. Ч. 3. Теоретические представления // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1987. № 1. С. 3–8.
5. Шемякин Е. И., Курленя М. В., Опарин В. Н. и др. Зональная дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок. Ч. 4. Практические приложения // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1989. № 4. С. 3–9.
6. Булычев Н. С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. М.: Недра, 1989.
7. Рева В. Н., Тропп Э. А. Упругопластическая модель зональной дезинтеграции окрестности подземной выработки // Физика и механика разрушения горных пород применительно к прогнозу динамических явлений: Сб. науч. тр. СПб.: Всесоюз. науч.-исслед. маркшейдер. ин-т, 1995. С. 125–130.
8. Глушихин Ф. П., Кузнецов Г. Н., Шклярский М. Ф. и др. Моделирование в геомеханике. М.: Недра, 1991.
9. Гузев М. А., Мясников В. П. Термомеханическая модель упругопластического материала с дефектами структуры // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 4. С. 156–172.

10. **Гузов М. А., Парошин А. А.** Моделирование зональной дезинтеграции горных пород в массиве вокруг подземных выработок // Тр. Дальневост. гос. техн. ун-та. 1999. Т. 221. С. 33–37.
11. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
12. **Де Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.

*Поступила в редакцию 29/II 2000 г.*

---