

МОДЕЛЬ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕКОТОРЫХ
ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

A. T. Onufriev

(Новосибирск)

Есть несколько разделов механики сплошных сред: теория переноса лучистой энергии, теория разреженных газов и теория турбулентного переноса, процессы переноса в которых могут быть объединены тем, что плотность потоков различных свойств носит интегральный характер. Например, в обычной теории вязкой жидкости и молекулярной теплопроводности напряжения трения и плотность потока энергии определяются градиентами скорости и температуры соответственно. Но это не так, когда длина свободного пробега больше или сравнима с характерными размерами изменения поля среды. В этом случае плотности потоков различных свойств определяются распределением переносимой величины в некоторой окрестности точки, а именно в области порядка 2–3 длин свободного пробега. Положение здесь такое же, как и в теории переноса нейтронов. Поэтому естественно во всех перечисленных разделах механики сплошных сред попытаться использовать одни и те же идеи и аппарат.

Ниже делается попытка построить простую модель процессов переноса в некоторых линейных задачах с одномерным переносом, которая отражала бы характерные черты явлений и из которой в качестве предельных случаев в теории разреженных газов следовали бы явления свободно-молекулярных течений и уравнения Навье — Стокса с условием прилипания на стенке, а в теории турбулентного переноса при малых значениях длины пробега (пути смешения) должна получаться полуэмпирическая теория Прандтля.

В теории разреженных газов такие попытки делались [1, 2] с использованием более точных, а потому и более сложных выражений.

По отношению к теории турбулентного переноса этот вопрос кратко разбирается в работе [3], где указывается на необходимость отказа от локально-градиентного описания явлений переноса и на возможность использования для этого кинетического уравнения.

Обозначения

x, y — декартовы координаты;
 l_1 — длина пути смешения по Прандтлю;
 L — характерный линейный размер;
 λ — длина свободного пробега молекул;
длина пробега излучения, путь смешения в турбулентном потоке;
 u', v' — абсолютные значения средних величин пульсации скорости в турбулентном потоке;
 a_0 — скорость звука;
 c_1 — скорость света;
 u — скорость потока;
 c — средняя скорость теплового движения молекул;
 n — число частиц в единице объема;
 $\kappa = \lambda^{-1}$ — коэффициент поглощения излучения;
 J — интенсивность излучения;
 s — направление луча;

γ — отношение удельных теплоемкостей;
 q — плотность потока энергии, переносимой излучением;
 T — температура;
 σ — постоянная Больцмана;
 P — плотность потока импульса, напряжение трения;
 ρ — плотность газа;
 μ — коэффициент вязкости;
 C_f — местный коэффициент трения;
 C_D — полный коэффициент трения пластиинки;
 u_1 — плотность энергии излучения;
 Φ — «неравновесная» плотность импульса;
 M — число Маха;
 R — число Рейнольдса;
 K — число Кнудсена.

1. О длине свободного пробега. Понятие длины свободного пробега будет играть существенную роль в построении модели, поэтому остановимся на некоторых известных положениях. Величина свободного пробега молекул характеризует вероятность того, что молекула пролетит расстояние x , не испытав столкновений: величина этой вероятности равна

$\exp(-x/\lambda)$. Эта же величина характеризует долю молекул, пролетевших расстояние x без столкновений. Пусть $p(x)$ — вероятность того, что молекула, пройдя без столкновений путь x , испытывает соударение на отрезке $(x, x+dx)$, а $n(x)$ — число молекул, испытавших столкновения на том же отрезке:

$$p(x) = \exp \frac{-x dx}{\lambda}, \quad n(x) = n_0 \exp \frac{-x dx}{\lambda} \quad (1.1)$$

Здесь n_0 — плотность молекул при $x = 0$. В теории переноса излучения положение аналогичное. Уменьшение интенсивности излучения на отрезке $(x, x+dx)$ будет

$$J(x) = J_0 \exp \frac{-x dx}{\lambda} \quad (\lambda = \frac{1}{\kappa}) \quad (1.2)$$

Здесь λ — длина пробега излучения, κ — коэффициент поглощения, J_0 — интенсивность излучения при $x = 0$.

2. Выражение для плотности потоков различных свойств. Уравнение переноса излучения записывается вдоль луча s так:

$$\frac{dJ}{ds} = -\kappa J + \kappa J_{00} \quad (2.1)$$

Изменение интенсивности складывается из поглощения в элементе вещества и излучения от этого элемента. Будет принята гипотеза локального термодинамического равновесия: J_{00} определяется функцией Планка для температуры вещества. Формальным решением этого уравнения будет

$$J(s_0) = \int J_{00} \exp \left(-\frac{s-s_0}{\lambda} \right) \frac{ds}{\lambda} \quad (2.2)$$

Здесь в подынтегральной функции экспоненциальный множитель учитывает поглощение, а остальная ее часть представляет собой излучение элемента ds .

Плотность потока энергии определяется после интегрирования выражения (2.2) по телесному углу. При усреднении по углу при λ появится множитель, зависящий от способа усреднения. Примем гипотезу «среднего косинуса», тогда этот множитель равен $2/3$.

При постоянном λ получаем

$$q = \int_{y_0}^{\infty} \sigma T^4 \exp \left(-\frac{y-y_0}{2/3 \lambda} \right) \frac{dy}{2/3 \lambda} \quad (2.3)$$

Ниже будут рассматриваться задачи пограничного слоя, поэтому здесь выписывается плотность потока энергии для одномерного случая переноса вдоль вертикальной оси y .

Аналогично выражению (2.3) построим выражение для плотности потока количества движения через единичную площадку на расстоянии y от пластиинки при обтекании ее разреженным газом (несжимаемый поток)

$$P(y) = - \int_y^{\infty} \frac{\rho c}{4} u(\xi) \exp \left(-\frac{\xi-y}{2/3 \lambda} \right) \frac{d\xi}{2/3 \lambda} + \int_0^y \frac{\rho c}{4} u(\xi) \exp \left(\frac{\xi-y}{2/3 \lambda} \right) \frac{d\xi}{2/3 \lambda} \quad (2.4)$$

Здесь использовано известное выражение из кинетической теории газов для количества молекул, падающих на площадку единичной площади $\rho c / 4$, где ρ — число молекул в единице объема, c — средняя скорость теплового движения молекул. Из них в слое $d\xi$ испытали столкновение $1/4 \rho c (2/3 \lambda)^{-1} d\xi$, они несут с собой количество движения $1/4 \rho c u (2/3 \lambda)^{-1} d\xi$, соответствующее макроскопической скорости движения

этого слоя. Из них пройдут расстояние $\zeta - y$, не испытав столкновений

$$\frac{nc}{4} \exp\left(-\frac{\zeta-y}{2/3\lambda}\right)^{d\zeta}_{2/3\lambda}$$

В турбулентном потоке плотность потока количества движения через единичную площадку на расстоянии y от пластиинки будет

$$P = - \int_y^{\infty} \rho v' u \exp\left(-\int_y^{\zeta} \frac{dz}{2/3\lambda}\right)^{d\zeta}_{2/3\lambda} + \int_0^y \rho v' u \exp\left(-\int_{\zeta}^y \frac{dz}{2/3\lambda}\right)^{d\zeta}_{2/3\lambda} \quad (2.5)$$

Если в турбулентном потоке возник комок жидкости, перемещающейся в направлении y со скоростью v' , то при своем перемещении он движется в поле с изменяющейся скоростью $u(y)$. Чем больше будет градиент скорости, тем сильнее комок будет «обдираться» внешним потоком. Предположим, что при прохождении комком расстояния dy , поток массы уменьшится на величину, пропорциональную потоку массы, т. е.

$$\frac{dpv'}{dy} = -\alpha rv'$$

Величина $1/\alpha = \lambda$ — длина свободного пробега, путь смешения, характеризует величину потока массы, прошедшую путь x , не испытав воздействия внешней среды, не перемешиваясь с ней. Предположим также, что в состоянии равновесия «излучается» объемом жидкости такая же пульсация, как и «поглощается». Тогда написанное выше выражение для плотности потока импульса будет выражать собой вклад разных слоев жидкости.

Величина пути смешения должна зависеть от градиента скорости основного потока: чем больше градиент, тем меньше λ . Быть может, естественно искать выражение для λ в виде $\lambda \sim (\partial u / \partial y)^{-1}$.

Действительно, в так называемом логарифмическом слое $\partial u / \partial y \sim 1/y$, а $\lambda \sim y$, т. е. существует именно такая связь. Коэффициенты следует подобрать из сравнения с экспериментом. Величина пульсации поперечной составляющей скорости также будет пока внешней, задаваемой величиной.

3. Разреженные газы. Обтекание полу бесконечной пластиинки. Предельный переход при $\lambda \rightarrow 0$. При длине свободного пробега, стремящейся к нулю, в выражении (2.4) величину $u(\zeta)$ можно разложить в ряд Тейлора. Тогда

$$P(y) \rightarrow -\frac{\rho \lambda c}{3} \frac{\partial u}{\partial y} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \left(\mu = \frac{\rho \lambda c}{3} \right) \quad (3.1)$$

Получается выражение для напряжения трения в теории Навье — Стокса. Напряжение трения на границе из (2.4)

$$P(0) \approx -\frac{\rho c}{4} u(0) - \frac{\rho c}{4} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{2}{3} \lambda \quad (3.2)$$

Приравнивая при $y = 0$ выражения (3.1) и (3.2), получаем граничное условие для скорости

$$u(0) = \frac{2}{3} \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (3.3)$$

При еще меньших λ отсюда следует, что $u(0) \rightarrow 0$. Таким образом, при уменьшении длины свободного пробега получается уравнение Навье — Стокса вначале с граничным условием скольжения, а затем с условием прилипания.

Предельный переход при $\lambda \rightarrow \infty$. В этом случае $u(y) \rightarrow u_0$ и величину скорости можно вынести за знак интеграла в выражении для $P(0)$

$$-P(0) = \frac{\rho c}{4} u_0 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\zeta}{2/3\lambda}\right)^{d\zeta}_{2/3\lambda} = \frac{\rho c}{4} u_0$$

или

$$c_f = \frac{P(0)}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = \frac{c}{2a_0} \frac{1}{M} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}}$$

выражение, совпадающее с точным значением для свободномолекулярного течения.

4. О приближении нелинейной теплопроводности. Перенос энергии излучением при состояниях вещества, близких к термодинамическому равновесию, описывается приближением «нелинейной теплопроводности». Выражение для плотности потока энергии можно получить следующим образом. К уравнению переноса (2.1) применим итерации

$$J_{n+1} = J_n - \lambda \frac{dJ_n}{ds} \quad (4.1)$$

В качестве нулевого приближения принимается $J_0 = J_{00}$, в качестве следующего

$$J_1 = J_{00} - \lambda \frac{dJ_{00}}{ds} \quad \text{и т. д.} \quad (4.2)$$

Интегрируя это выражение векторно по телесному углу, получаем

$$\mathbf{q} = -\frac{\lambda}{3} \operatorname{grad} 4\sigma T^4 \quad (4.3)$$

Этот прием для получения уравнений движения вязкой жидкости был предложен Трудсделлом [4]. В качестве нулевого приближения выбирается распределение Мак-свэлла, в первом приближении получается формула Навье — Стокса для напряжения трения, во втором приближении получается формула Барнетта, и т. д. Трудсделл указывает, что этот метод в применении к отысканию решения дифференциального уравнения кажется странным: интегрирование заменяется бесконечным числом дифференцирований. Он строит пример, в котором все приближения хуже, чем первое. Обратимся к простой задаче об излучении полубесконечного пространства, граничащего с прозрачной средой и заполненного веществом с одинаковой температурой T . Эта задача может быть рассмотрена в приближении нелинейной теплопроводности, на границе при этом ставится для температуры условие третьего рода. При конечном числе итераций, в нагретом объеме, даже вблизи границы, для потока тепла всегда будет получаться нулевое значение, так как все производные от температуры по пространству тождественно равны нулю. Диффузионное приближение такого недостатка не содержит. Аналогия с излучением может оказаться полезной для понимания явлений в разреженном газе. Ряд задач о переносе энергии излучением в диффузионном приближении был рассмотрен в работах [5-9].

5. Турбулентное течение. Пределный переход при $\lambda \rightarrow 0$. Проделаем такой же предельный переход и в выражении (2.5), считая λ постоянной величиной, так как основной вклад при интегрировании дает непосредственная окрестность вблизи y

$$P(y) \rightarrow -\rho v' \frac{4}{3} \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.1)$$

т. е. имеем выражение, сходное с тем, которое получается для выражения Рейнольдса напряжения $P = -\rho \langle v' u' \rangle$, если принять гипотезу Прандтля, относительно величины $u' = l_1 \partial u / \partial y$. Если принять также выражение $v' = l_1 \partial u / \partial y$, то напряжение трения совпадает с напряжением трения по Прандтлю [10], только $8/\lambda^2 = l_1^2$.

6. Переход к системе дифференциальных уравнений. Покажем, что полученное выше интегродифференциальное уравнение эквивалентно системе дифференциальных уравнений. Эта система уравнений совпадает с диффузионным приближением в теориях переноса излучения и нейтронов.

Разреженные газы. Если продифференцировать выражение (2.4) по y , получим уравнение

$$\frac{2}{3} \lambda \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\rho c u}{2} - \Phi \quad (6.1)$$

Здесь ρc_i — «равновесная» плотность импульса, а 2φ — «неравновесная» плотность той же величины

$$\varphi = \int_y^{-\infty} \frac{\rho c}{4} u \exp\left(-\frac{\zeta-y}{2/3\lambda}\right) \frac{d\zeta}{2/3\lambda} + \int_0^y \frac{\rho c}{4} u \exp\left(-\frac{y-\zeta}{2/3\lambda}\right) \frac{d\zeta}{2/3\lambda} \quad (6.2)$$

Продифференцировав теперь (6.2) по y , получаем

$$P = -\frac{2\lambda}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (6.3)$$

Уравнения (6.1) и (6.3) тождественны уравнениям переноса излучения в диффузационном приближении

$$q = -\frac{2\lambda}{3} \frac{\partial c_1 u}{\partial y}, \quad \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial q}{\partial y} = 4\sigma T^4 - c_1 u \quad (c_1 \text{ — скорость света})$$

Получим теперь граничное условие: из выражений (2.4) и (6.2) для φ следует $P(0) = -\varphi(0)$. Добавляя соотношение (6.3), имеем

$$\varphi(0) = \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6.4)$$

Таким образом, задача обтекания несжимаемым потоком разреженного газа плоской пластинки под нулевым углом атаки будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \quad P = -\frac{2\lambda}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\rho c u}{2} - \varphi \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\varphi = \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{при } y=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad u = u_0 \quad \text{при } y=\infty$$

Рассмотрим задачу с упрощениями, сделанными Рэлеем [11] при рассмотрении задачи о пограничном слое: в уравнении энергии слева при производной $\partial u / \partial y$ положим $u \equiv u_0$, а $v = 0$; тогда

$$\rho u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad P = -\frac{2\lambda}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\rho c u}{2} - \varphi$$

Введем безразмерные переменные

$$u' = \frac{u}{u_0}, \quad P' = \frac{2P}{\rho c u_0}, \quad \varphi' = \frac{2\varphi}{\rho c u_0}, \quad x' = \frac{x}{2/3\lambda}, \quad y' = \frac{y}{2/3\lambda}$$

Тогда предыдущая система уравнений примет вид

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{M} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} \frac{\partial P'}{\partial y'}, \quad P' = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}, \quad \frac{\partial P'}{\partial y'} = u' - \varphi'$$

с граничными условиями

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \quad \text{при } y'=0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = 0 \quad \text{при } y'=\infty$$

и начальным условием

$$u' = 1 \quad \text{при } x'=0$$

Здесь M — число Маха, γ — отношение удельных теплоемкостей. Уравнение относительно P' будет выглядеть так:

$$\frac{\partial^3 P'}{\partial x^\circ \partial y'^2} - \frac{\partial P'}{\partial x^\circ} + \frac{\partial^2 P'}{\partial y'^2} = 0 \quad (6.5)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial x^0 \partial y'} + \frac{\partial P'}{\partial y'} = 0 \quad \text{при } y' = 0, \quad P' = 0 \quad \text{при } y' = \infty$$

и начальным условием

Здесь

$$P'(0, y') = \frac{1}{2} e^{-y'}$$

$$x^0 = \frac{x'}{M} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} = \frac{x}{ML} \frac{1}{K} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} = \frac{2}{\pi\gamma} \frac{R}{M^2} \quad (R = \frac{\rho u_0 x}{\mu}, K = \frac{2/3\lambda}{L})$$

(R — число Рейнольдса, K — число Кнудсена)

Решение уравнения (6.5) приведено в работе [8], где рассматривается нестационарная задача об охлаждении излучением полубесконечного объема газа

$$P' = \frac{1}{2} \left[I_1 \left(\frac{x^0}{2} \right) + I_0 \left(\frac{x^0}{2} \right) \right] \exp \frac{-x^0}{2}$$

или

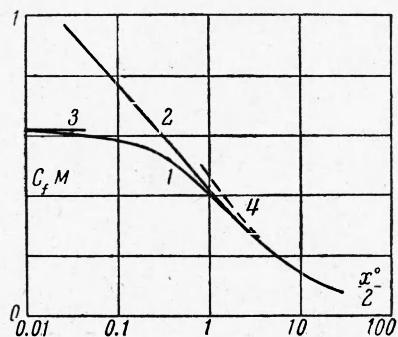
$$C_f M = \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} \left[I_1 \left(\frac{x^0}{2} \right) + I_0 \left(\frac{x^0}{2} \right) \right] \exp \frac{-x^0}{2} \quad (6.6)$$

$$u' = {}_1 F_1 \left(\frac{1}{2}, 1, -x^0 \right) \exp -x^0 \quad \left(\frac{x^0}{2} = \frac{1}{\pi\gamma} \frac{R}{M^2} \right) \quad (6.7)$$

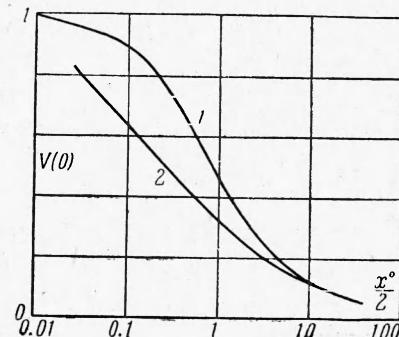
Для одноатомного газа ($\gamma = 5/3$) вычисления дают:

$x^0/2 = 0$	0.01	0.03	0.1	0.3	0.5
$C_f M = 0.617$	0.612	0.609	0.588	0.538	
$u' = 1$	0.99	0.97	0.907	0.753	0.670
$x^0/2 = 1$	3	4	8	10	30
$C_f M = 0.415$	0.271			0.152	0.0875
$u' = 0.472$		0.206	0.143		0.073
					0.04

На фиг. 1 сопоставлено рассчитанное по (6.6) значение $C_f M$ (кривая 1) с расчетами по теории Навье — Стокса с прилипанием (кривая 4) по теории



Фиг. 1



Фиг. 2

течения со скольжением (кривая 2) и с расчетами для свободно-молекулярного течения (кривая 3) по данным работы [11]. На фиг. 2 показано распределение скорости газа около пластинки по формуле (6.7) (кривая 1) и по теории течения [11] со скольжением (кривая 2).

Из полученного решения видно, что оно хорошо сопрягается со свободно-молекулярным потоком при больших длинах свободного пробега и с теорией скольжения, а затем и с теорией Навье — Стокса с условием прилипания при малых длинах свободного пробега.

Воспользовавшись соотношением (6.6), можно вычислить отношение полного коэффициента трения пластинки шириной L к полному коэффициенту трения этой пластинки в свободно-молекулярном течении

$$\frac{C_D}{C_{D_1}} = \frac{2}{L^\circ} \int_0^{L^\circ} \left[I_0\left(\frac{x^\circ}{2}\right) + I_1\left(\frac{x^\circ}{2}\right) \right] \exp \frac{-x^\circ}{2} \frac{dx^\circ}{2} \quad (6.8)$$

При малых значениях L° имеем

$$\frac{C_D}{C_{D_1}} = 1 - \frac{L^\circ}{8} \quad (6.9)$$

Формула (6.9) по своей структуре совпадает с формулой, полученной в работе [12]

$$\frac{C_D}{C_{D_1}} = 1 - 0.188 G(L/\lambda, M) \frac{R}{M^2} \quad (6.10)$$

Так как в этой работе рассматривалась задача обтекания пластинки конечной длины, то в формулу (6.10) вошел множитель, зависящий от отношения длины пробега к длине пластинки. Также учтено влияние числа M на торможение потока перед пластинкой. Эти эффекты в диффузионном приближении также можно учесть. Подобная задача для случая переноса энергии излучением рассмотрена в работе [13].

Сравнение выражения (6.8) с расчетами работы [12] и экспериментальными данными [12, 14] показано на фиг. 3: кривая 1 — диффузионное приближение; 2 — теория течения со скольжением; 3 — свободно-молекулярное течение; 5 — поправка к свободно-молекулярному течению [11] (верхняя кривая для $L/\lambda = 0.1$, нижняя — для $L/\lambda = 1$); крестики — экспериментальные данные. Предельное значение для C_D при больших значениях K° совпадает с выражением, полученным в работе [14]

$$c_D = \frac{8}{V \pi R}$$

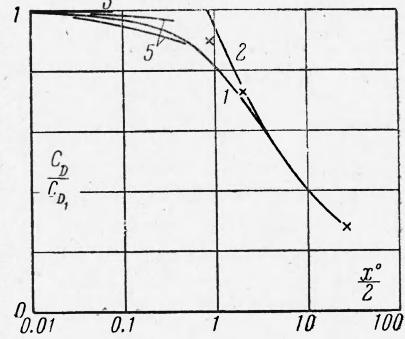
Следует отметить, что диффузионное приближение все-таки не точно, особенно в задачах с конечным значением числа K . Уточнить его можно приемом, разработанным в теории переноса нейtronов [15], который заключается во введении в граничное условие множителя, зависящего от числа K . Этот множитель при изменении K во всем диапазоне меняется примерно в два раза.

Турбулентный перенос. Действуя так же, как и в случае разреженных газов, по отношению к величине $P(y)$ напряжения турбулентного трения (2.5), приходим к системе дифференциальных уравнений, описывающих процесс турбулентного перемешивания

$$\frac{2\lambda}{3} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\rho v' u = \Phi, \quad P = -\frac{2\lambda}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Эти уравнения вместе с уравнением движения образуют замкнутую систему, если заданы v' и λ . Здесь

$$\Phi = \int_{-1}^y \rho v' u \exp \left(- \int_{-\zeta}^y \frac{dz}{2/3 \lambda} \right) \frac{d\zeta}{2/3 \lambda} + \int_y^1 \rho v' u \exp \left(- \int_y^{\zeta} \frac{dz}{2/3 \lambda} \right) \frac{d\zeta}{2/3 \lambda} \quad (6.11)$$



Фиг. 3

величина «неравновесной» плотности импульса. Из сравнения выражений (2.5) и (6.11) на границе получаем граничное условие

$$P(0) = \varphi(0) = -\frac{2\lambda'}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6.12)$$

Снова получена система уравнений, тождественная уравнениям для переноса энергии излучением в диффузионном приближении.

Для описания развитого турбулентного течения в плоском канале имеем систему уравнений в безразмерном виде

$$\frac{2\lambda'}{3} \frac{\partial P'}{\partial y'} = 4V'U - \psi', \quad P' = -\frac{2\lambda'}{3} \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} \left[P' - \frac{2}{R} \frac{\partial U}{\partial y'} \right] + \frac{\partial p'}{\partial x'} = 0$$

Здесь

$$P' = \frac{P}{1/2 \rho u_0^2}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{1/2 \rho u_0^2}, \quad V' = \frac{v'}{u_0}, \quad U = \frac{u}{u_0}$$

$$y' = \frac{y}{a}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{a}, \quad p' = \frac{p}{1/2 \rho u_0^2}, \quad R = \frac{\rho u_0 a}{\mu}$$

(a — полуширина канала, u_0 — скорость на линии симметрии)

Граничные условия

$$\varphi' = -\frac{2\lambda'}{3} \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}, \quad U = 0 \quad \text{при } y' = 1 \quad (6.14)$$

$$P' = -\frac{2\lambda'}{3} \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = 0, \quad U = 1 \quad \text{при } y' = 0 \quad (6.15)$$

Для пути смешения примем известное выражение $l_1 = 0.4(a - y)$. Тогда

$$\frac{2}{3} \lambda' = \frac{0.4}{V^2} (1 - y') \quad (6.16)$$

а для v' примем экспериментальную зависимость из работы Лауфера [16, 17]. Величина v' слабо меняется в большей части канала, у стенки линейно уменьшается до нуля.

Уравнение движения — уравнение второго порядка для скорости потока. Для его решения надо поставить два естественных граничных условия: симметрия в центре и условие прилипания на стенке. Обычно эти условия не ставятся при решении подобных задач, если принять для напряжения трения выражение Прандтля. Оба граничных условия для скорости ставятся в центре [18, 19], а внешнее граничное условие не удовлетворяется (на границе $u = -\infty$ по Прандтлю и $u = u_*$ по Тэйлору). В этом отражается противоречивость описания процессов турбулентного переноса в локально-градиентном виде. Удовлетворение внешнего граничного условия при учете молекулярной вязкости сводит задачу к ламинарной со сложным выражением для коэффициента вязкости. То же самое происходит, если наряду с учетом молекулярной теплопроводности перенос энергии излучением описывать в приближении нелинейной теплопроводности и удовлетворять условию непрерывности температуры на границе. По существу исчезает описание переноса энергии излучением (кроме случая $\lambda/a \rightarrow 0$).

Рассмотрим поведение решения при $y' \rightarrow 0$. Из первого уравнения системы (6.13) получаем оценку

$$P' \sim y' \quad (6.17)$$

а из третьего уравнения следует

$$\frac{2}{R} (1 - U) \sim y'^2 \quad (6.18)$$

Рассмотрим теперь поведение решения при $y' \rightarrow 1$; введем переменную $\delta = 1 - y'$

$$\frac{2}{R} \frac{dU}{d\delta} = -P' - (1 - \delta) \frac{dP'}{dx'}, \quad \frac{d\Phi'}{d\delta} = \frac{P'}{0.28\delta}, \quad \frac{dP'}{d\delta} = \frac{\Phi' - 4V'U}{0.28\delta} \quad (6.19)$$

Принимая $V' \sim c\delta$, получим

$$U \sim \delta - \frac{\delta^2}{2} + \dots c\delta^3 \dots \quad (6.20)$$

$$\Phi' \sim c\delta^2, \quad P' \sim c\delta^2 \quad (6.21)$$

Полученные предельные формулы согласуются с известными данными [10, 16, 17].

Отметим также, что в диффузионном приближении уже в «ламинарном подслое» проявляется действие турбулентного напряжения трения [20].

В терминах теории переноса излучения турбулентное течение в плоском канале соответствует тому, что слой, прилегающий к стенке из-за большого значения коэффициента поглощения, непрозрачен для «излучения» из центральной части потока. Оно все застывает в нем, не выходя наружу.

Проведенный анализ и примеры решений позволяют надеяться, что предложенные формулы для напряжений трения в теории разреженных газов и теории турбулентного переноса правильно отражают существо дела и окажутся полезными при решении многих вопросов, затруднительных для рассмотрения на основе точных уравнений.

Как отмечалось во введении, диффузионное приближение отражает тот существенный факт, что потоки переносимых свойств определяются некоторой окрестностью около точки, а не локальным градиентом. Тенденция отхода от локально-градиентного описания нашла свое отражение в том, что Прандтль создал вторую теорию турбулентного смешения для свободных струй [10, 21], в которой в выражении для турбулентного напряжения трения вместо одной из производных ввел величину $(u_{\max} - u_1)/b$ (b — полуширина струи, u_1 — скорость на границе струи), что в какой-то мере отражало интегральный характер переноса в струе. Сквайр [21] при рассмотрении турбулентного смешения свободных струй также учитывает интегральный характер переноса, правда, введением формальных параметров.

Критика локально-градиентного выражения для напряжения трения содержится в работе [22], где указывается, что путь смешения по существу своего введения должен быть малым по сравнению с характерным размером струи, а на опыте это не так. Сделана попытка учесть интегральный характер переноса введением коэффициента перемежаемости, который выбирается из эксперимента.

Но во всех теориях там, где $du/dy = 0$, напряжение трения по-прежнему также становилось равным нулю.

В диффузионном приближении напряжение трения определяется распределением величины φ , которая зависит от поля величины скорости, и при несимметрии поля также несимметрична даже в тех местах потока, где $du/dy = 0$.

Кроме этого, в диффузионном приближении не надо проводить склеивание ламинарного слоя с турбулентным, переход одного в другой происходит естественным образом. Естественными также получаются граничные условия для скорости.

Следует выяснить вопрос о поведении функций v' и λ , которые должны зависеть от поля скорости основного течения.

Диффузионное приближение соответствует интегродифференциальному уравнению. Это уравнение может быть усложнено, если ввести зависимость от угла для интенсивности потока.

Соображения, использованные в работе при выводе выражения для напряжения трения в турбулентном течении, аналогичны соображениям, на основе которых Н. И. Булевым [23] разработана теоретическая модель механизма турбулентного обмена в пространственных потоках жидкости. Дополнительные касательные напряжения и тепловые потоки, обусловленные турбулентными пульсациями, в работе [23] получены в виде сумм произведений соответствующих компонент градиента средней скорости потока и градиента средней температуры потока на коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности, которые являются интегральными выражениями от функций, определяемых полями скорости и температуры и положением точек интегрируемой области относительно стенок канала.

Автор благодарен С. А. Христиановичу за внимание к работе.

Поступила 2 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. К р о о к М. Continuum equations in the dynamics of rarefied gases. *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 6, No. 4, pp. 523—541. (Русск. пер.: М. Крук. Уравнения континуума в динамике разреженных газов. ИЛ, Сб. пер. Механика. «Некоторые задачи современной аэродинамики». 1960.)
2. В а л л а н д е р С. В. Новые кинетические уравнения в теории одноатомных газов. ДАН СССР, 1960, т. 131, № 1, стр. 58—60.
3. Turbulent Flows and Heat Transfer, High Speed Aerodynamics and jet Propulsion. (ed. by C. C. Lin). London, Oxford University Press, 1959, vol. V, pp. 97—104.
4. Т г у е с д е л 1 С. La crise actuelle dans la theorie cinétique des gaz. *J. Mathématique pures et appliquées*, Neuvième Série, t. 37, Fasc. 2, 103—118. (Русск. пер. К. Трудсдел. Современный кризис в кинетической теории газов. ИЛ, Сб. пер. Механика, 1960, № 4, стр. 65—75.)
5. А м б а р ц у м я н В. А., М у с т е л ь Э. Р., С е в е р н ы й А. Б., С о б о л е в В. В. Теоретическая астрофизика. Гостехиздат, 1952.
6. З е л ь д о в и ч Я. Б., К о м п а н е е ц А. С., Р а й з е р Ю. И. Об охлаждении воздуха излучением. (1) ЖЭТФ, 1958, т. 34, вып. 4, стр. 1278—1287; (2) ЖЭТФ, 1958, т. 34, вып. 6, стр. 1947—1954.
7. Н е м ч и н о в И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 1, стр. 36—37.
8. О н у ф р и е в А. Т. Об охлаждении излучением полубесконечного объема газа. ПМТФ, 1961, № 2, стр. 31—39.
9. V i s k a n t a R., G r o s h R. J. Heat Transfer by Simultaneous Conduction and Radiation in an Absorbing medium. Trans. ASME, ser. C. J. Heat Transfer, 1962, vol. 84, No. 1, pp. 63—72. (Русск. пер.: Р. Висканта, Р. Д. Грош. Перенос тепла теплопроводностью и излучением в поглощающей среде. Теплопередача. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков, 1962, т. 89, сер. C, № 1, стр. 79—89.)
10. Ш л и х т и н г Г. Теория пограничного слоя. ИЛ, 1956.
11. П а т т е р с о н Г. Н. Молекулярное течение газов. Физматгиз, 1960.
12. L i u V. C. On the drag of a flat plate at zero incidence in almost-free-molecule flow. *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 5, No. 3, pp. 481—490. (Русск. пер.: В. К. Лю. О сопротивлении плоской пластины под нулевым углом атаки в почти свободном молекулярном течении. ИЛ, Сб. пер. Механика, № 1, 1960, стр. 17—26.)
13. О н у ф р и е в А. Т. Приближенное рассмотрение задачи об обтекании излучающим газом пластинки конечной длины. ПМТФ, 1962, № 5.
14. S c h a a f S. A., S h e r m a n F. S. Skin Friction in Slip Flow. *S. Aeronaut. Sci.*, 1954, vol. 21, No. 2, p. 85—90 (Русск. пер.: С. Шааф, Ф. Шерман. Поверхностное трение в области течения со скольжением. ИЛ, Сб. пер. Механика, 1955, № 1, стр. 130—140.)
15. Д э в и с о н Б. Теория переноса нейтронов. Атомиздат, 1960.
16. L o u f e r J. Some Recent measurements in a Two-Dimensional Turbulent Channel. *J. Aeronaut. Sci.*, 1950, vol. 17, No. 5, pp. 277—287.
17. Т а у н с е н д А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. ИЛ, 1959.
18. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. Под ред. С. Гольдштейна, т. II, ИЛ, 1948, стр. 15—23.
19. Y u a n S. W., B r o g e n E. W. Turbulent Flow in a Circular Pipe with Porous Wall. *Phys. of Fluids*, 1961, vol. 4, No. 3, pp. 368—372.
20. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Перенос тепла в турбулентном движении. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4, стр. 635—646.
21. Б а й Ш и - и. Теория струи. Физматгиз, 1960.
22. B a t c h e l o r G. K. Note on Free Turbulent Flows, with Special Reference to the Two-Dimensional Wake. *J. Aeronaut. Sci.*, 1950, vol. 17, No. 3, pp. 441—445.
23. Б у л е е в Н. И. Теоретическая модель механизма турбулентного обмена в потоках жидкости. М., АН СССР, Сб. Теплопередача, 1962, стр. 64—98.