

УДК 539.3

## СКОЛЬЖЕНИЕ ДВУХ ГЛАДКИХ ШТАМПОВ ПО ВЯЗКОУПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Ф. И. Степанов

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия

E-mail: stepanov\_ipm@mail.ru

Рассматривается осесимметричная контактная задача о скольжении с постоянной скоростью двух твердых параболических инденторов по вязкоупругому полупространству. В области контакта действуют касательные напряжения, моделирующие адгезионную составляющую силы трения. Модель материала основания описывается интегральным оператором с экспоненциальным ядром, характеризующимся одним временем релаксации. Задача решается методом граничных элементов. Проводится анализ зависимости характеристик контакта от скорости скольжения, нормальной нагрузки и расстояния между центрами инденторов. Полученные результаты позволяют исследовать влияние элементов шероховатости, моделируемых двумя инденторами, на характеристики контакта и деформационную составляющую силы трения.

Ключевые слова: контактная задача, вязкоупругость, скольжение индентора.

DOI: 10.15372/PMTF20150617

Класс пространственных задач о скольжении индентора по вязкоупругому полупространству подробно изучен в работах [1–6]. Аналитическое решение задачи о движении распределенной нагрузки по вязкоупругому полупространству получено в [2]. В работе [3] построен численно-аналитический метод решения задачи о скольжении гладкого индентора по вязкоупругому основанию без учета касательных сил, действующих на поверхности контакта. Влияние касательных напряжений на контактные характеристики при скольжении гладкого индентора по вязкоупругому полупространству исследовалось в [4], влияние формы индентора — в [5]. В работе [6] решена задача о скольжении сферического индентора по вязкоупругому основанию при наличии неоднородностей. Также существуют работы, посвященные исследованию скольжения штампа с регулярно расположенными неоднородностями по вязкоупругому основанию, моделируемому телом Кельвина [7], и скольжения системы, включающей несколько инденторов, по вязкоупругому слою [8].

Целью данной работы является изучение взаимного влияния двух элементов шероховатой поверхности на основе решения задачи о скольжении с постоянной скоростью двух одинаковых гладких инденторов параболической формы по вязкоупругому полупространству при наличии касательных напряжений.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим процесс скольжения с одной и той же скоростью  $V = \text{const}$  двух жестких инденторов по вязкоупругому полупространству в направлении оси  $x$  (рис. 1). Каждый индентор нагружен вертикальной силой  $Q$  и касательной силой  $T$ ,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-29-00198).

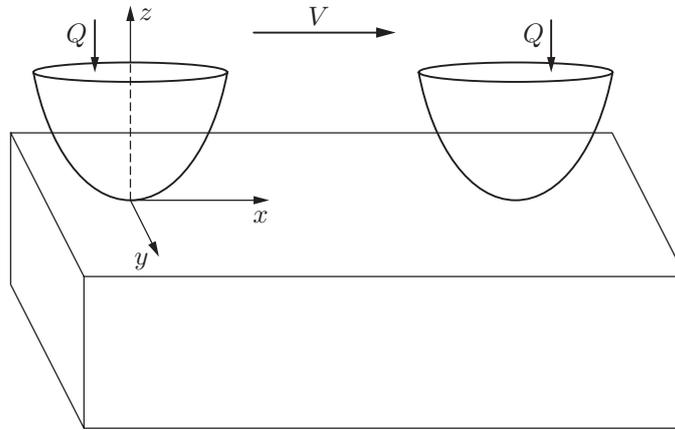


Рис. 1. Схема задачи

направленной противоположно вектору скорости и моделирующей адгезионное трение. Инденторы ориентированы таким образом, что вектор, соединяющий их центры, коллинеарен вектору скорости. Система координат  $(x, y, z)$  связана с индентором 1, движущимся за индентором 2, ось  $z$  направлена по внешней нормали к границе полупространства. Расстояние между центрами инденторов  $l = \text{const}$ .

Граничные условия на поверхности полупространства имеют вид

$$\begin{aligned}
 z = 0: \quad \tau_{xz}(x, y) &= \mu\sigma_z(x, y), \quad \tau_{yz} = 0, \\
 w_1(x, y) &= f(x, y) + \psi_1(x, y) + D_1, \quad (x, y) \in \Omega_1, \\
 w_2(x, y) &= f(x - l, y) + \psi_2(x, y) + D_2, \quad (x, y) \in \Omega_2, \\
 \sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad &(x, y) \notin \Omega_1, \Omega_2, \\
 -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\Omega_1, \Omega_2$  — области контакта инденторов; индексы 1, 2 соответствуют инденторам 1, 2;  $D_1, D_2$  — перемещения инденторов внутрь полупространства;  $w_1, w_2$  — вертикальные перемещения поверхности полупространства;  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  — нормальное и касательные напряжения;  $\mu$  — коэффициент адгезионной составляющей силы трения, имеющий одно и то же значение для обоих инденторов. Функции  $\psi_1(x, y)$  и  $\psi_2(x, y)$  описывают вертикальные перемещения полупространства в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно в результате воздействия соседнего индентора; функция  $f(x, y) = -(x^2 + y^2)/(2r)$  описывает форму инденторов;  $r$  — радиус индентора. Необходимо найти контактные давления  $p(x, y) = -\sigma_z(x, y)$  и неизвестные границы областей контакта  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Для определения областей контакта используется условие непрерывности давлений на их границе. Контактные давления удовлетворяют условию равновесия

$$Q = \iint_{\Omega_1} p(x, y) dx dy, \quad Q = \iint_{\Omega_2} p(x, y) dx dy. \tag{2}$$

Модель материала полупространства описывается следующей зависимостью сдвиговых деформаций  $\gamma(t)$  от касательных напряжений  $\tau(t)$ :

$$\gamma(t) = \frac{1}{G} \tau_{xz}(t) + \frac{1}{G} \int_{-\infty}^t \tau_{xz}(\tau) K(t - \tau) d\tau.$$

Здесь  $G$  — модуль мгновенного сдвига; коэффициент Пуассона  $\nu$  в указанной модели является постоянным. Ядро релаксации имеет экспоненциальный вид и характеризуется одним временем релаксации:

$$K(t') = k \exp(-t'/\lambda).$$

Здесь  $\lambda$  — время последействия;  $k$  — величина, обратная времени релаксации.

Введем безразмерные величины

$$(x', y', \xi', \eta') = \frac{1}{r} (x, y, \xi, \eta), \quad c = \frac{G}{G_l}, \quad A = \frac{r}{\lambda V}, \quad B = k \frac{r}{V},$$

$$Q' = \frac{Q}{G_l r^2}, \quad p'(x, y) = \frac{p(x, y)}{G_l}$$

( $G_l$  — модуль длительного сдвига), а также безразмерную скорость  $V' = V\lambda/r$ .

**2. Метод решения.** При решении контактной задачи выбираются одинаковые по размеру области  $\Omega_1^*$  и  $\Omega_2^*$ , заведомо бóльшие искомым областям контакта  $\Omega_1'$  и  $\Omega_2'$ , и разбиваются на квадратные элементы, в каждом из которых давление полагается постоянным. Вертикальные перемещения точек поверхности полупространства определяются в соответствии с принципом суперпозиции перемещений, обусловленных действием нагрузки в каждом элементе.

Поскольку необходимо учесть взаимное влияние инденторов, сначала решается контактная задача для индентора 2 без учета влияния индентора 1, так как вследствие гистерезиса при воздействии данного индентора в области  $\Omega_1^*$  происходят значительно бóльшие вертикальные перемещения поверхности полупространства, чем в области  $\Omega_2^*$  при воздействии индентора 1. Алгоритм решения контактной задачи о скольжении одиночного штампа методом граничных элементов подробно описан в [3, 4]. С использованием выражения, связывающего нормальные и касательные напряжения с вертикальным перемещением полупространства [4]:

$$\begin{aligned} \psi_{1,j} = & \frac{1}{\pi^2 c} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \iint_{\omega_{2,i}} p_{2,i} \left( \frac{(x'_{ij} - \xi')\mu}{(x'_{ij} - \xi')^2 + (\eta' - y'_{ij})^2} + \right. \\ & + \mu B e^{A(x'_{ij} - \xi')} \int_{A(x'_{ij} - \xi')}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{u^2 + A^2(\eta' - y'_{ij})^2} \left. \right) d\xi' d\eta' - \\ & - \frac{2}{\pi^2 c} \iint_{\omega_{2,i}} p_{2,i} \left( \frac{1}{\sqrt{(x'_{ij} - \xi')^2 + (\eta' - y'_{ij})^2}} + \right. \\ & \left. + B e^{A(x'_{ij} - \xi')} \int_{A(x'_{ij} - \xi')}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + A^2(\eta' - y'_{ij})^2}} \right) d\xi' d\eta' \quad (3) \end{aligned}$$

( $\omega_{2,i}$  —  $i$ -й элемент области  $\Omega_2^*$ ;  $p_{2,i}$  — давление в  $i$ -м элементе;  $\psi_{1,j}$  —  $j$ -й элемент области  $\Omega_1^*$ ), вычисляются дополнительные вертикальные перемещения полупространства в области  $\Omega_1^*$ .

На основе граничных условий (1), условия равновесия (2) и выражения (3) для дополнительных перемещений можно записать систему уравнений для индентора 1

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 & \dots & \Delta^2 & 0 \\ k_1^1 & \dots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ \vdots \\ p_{1,N} \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ f_{1,1} + \psi_{1,1} \\ \vdots \\ f_{1,N} + \psi_{1,N} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь  $\Delta$  — длина стороны элементов, на которые разбивается область  $\Omega_1^*$ ;  $p_{1,i}$  — искомые контактные давления в элементах. Коэффициенты  $k_i^j$  определяются следующим образом [4]:

$$k_j^i = \frac{1}{\pi^2 c} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \iint_{\omega_{1,i}} \left( \frac{(x'_{ij} - \xi')\mu}{(x'_{ij} - \xi')^2 + (\eta' - y'_{ij})^2} + \right. \\ \left. + \mu B e^{A(x'_{ij} - \xi')} \int_{A(x'_{ij} - \xi')}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{u^2 + A^2(\eta' - y'_{ij})^2} \right) d\xi' d\eta' - \\ - \frac{2}{\pi^2 c} \iint_{\omega_{1,i}} \left( \frac{1}{\sqrt{(x'_{ij} - \xi')^2 + (\eta' - y'_{ij})^2}} + \right. \\ \left. + B e^{A(x'_{ij} - \xi')} \int_{A(x'_{ij} - \xi')}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + A^2(\eta' - y'_{ij})^2}} \right) d\xi' d\eta'$$

( $\omega_{1,i}$  —  $i$ -й элемент области  $\Omega_1^*$ ). При решении системы (4) итерационным методом определяются неизвестная область контакта и распределение давления. На следующем этапе с использованием полученного решения вычисляются дополнительные перемещения внутри области  $\Omega_2^*$  и с учетом их решается контактная задача для индентора 2. Таким образом, задача решается с использованием двойного итерационного процесса. Этот процесс прекращается в тот момент, когда найденные площадки контакта штампов перестают отличаться от соответствующих площадок, найденных на предыдущем шаге внешнего цикла процесса, а изменения контактных давлений не превышают заданной погрешности. Следует отметить, что вследствие гистерезиса воздействие индентора 2 приводит к существенной деформации полупространства за ним и как следствие к изменению характеристик контакта индентора 1. При этом деформация полупространства перед индентором 1 является упругой и оказывает незначительное влияние на характеристики контакта индентора 2, что обуславливает быструю сходимость итерационного процесса.

**3. Результаты расчетов.** Описанный метод был использован при анализе влияния скорости скольжения  $V'$  на форму и размеры площадок контакта и распределения давления на них. На рис. 2, *a, б, д, e* представлены распределения контактных давлений пары инденторов при  $c = 3$ ,  $l = 2$ ,  $\mu = 0,5$ ,  $\nu = 0,3$  и различных значениях  $V'$ . На рис. 2, *в, г, ж, з* показаны вертикальные перемещения полупространства  $z' = z/r$ , обусловленные воздействием соседнего индентора. Из рис. 2 следует, что в результате воздействия индентора 2 характеристики контакта индентора 1 изменяются более существенно. Так, при  $V' = 3$  наблюдаются значительное изменение формы площадки контакта и падение давления в ее центре (см. рис. 2, *a*), при увеличении скорости до значения  $V' = 6$  происходит разделение площадки контакта на две несвязные области (см. рис. 2, *д*). Данный эффект объясняется наличием “борозды”, возникающей в результате воздействия индентора 2 (см. рис. 2, *в*). Воздействие индентора 1 на индентор 2 является менее существенным и приводит к незначительному смещению площадки контакта индентора 2 в направлении скольжения.

Исследовано также влияние расстояния между инденторами на деформационную составляющую коэффициента трения [1]:

$$\mu^* = \frac{T^*}{P} = \frac{1}{r} \iint xp(x, y) dx dy / \iint p(x, y) dx dy$$

(формула верна при условии симметрии давления относительно оси  $x$ ). На рис. 3 представ-

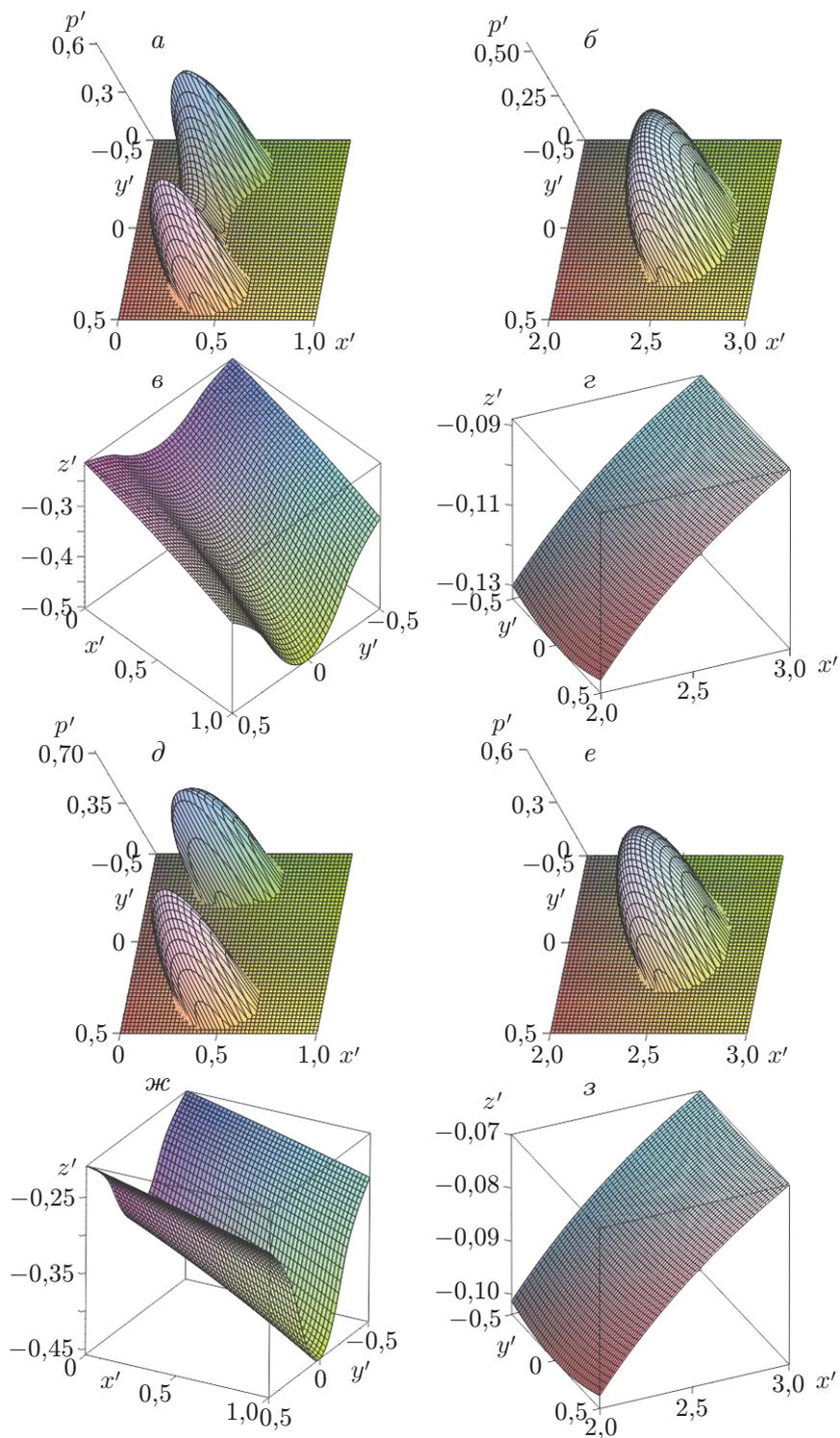


Рис. 2. Распределения давления (*а, б, д, е*) и вертикальных перемещений (*в, г, ж, з*) в области контакта двух инденторов с полупространством:

*а, в, д, ж* — индентор 1, *б, г, е, з* — индентор 2; *а-г* —  $V' = 3$ , *д-з* —  $V' = 6$

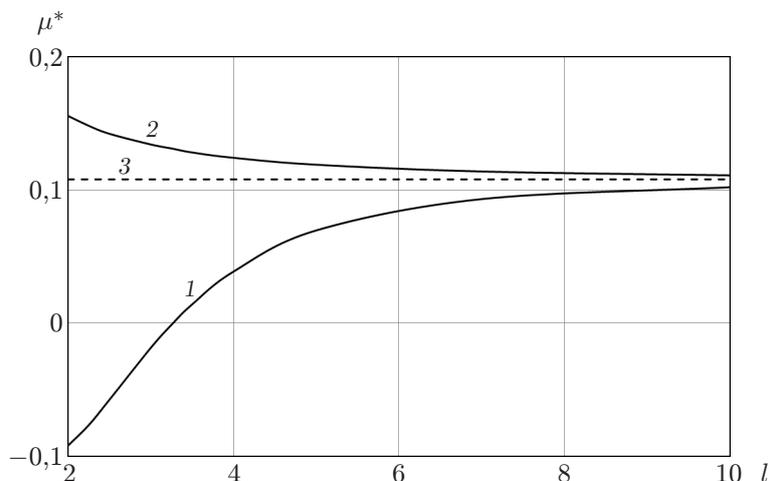


Рис. 3. Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения инденторов от расстояния между ними:  
1 — индентор 1, 2 — индентор 2, 3 — одиночный индентор

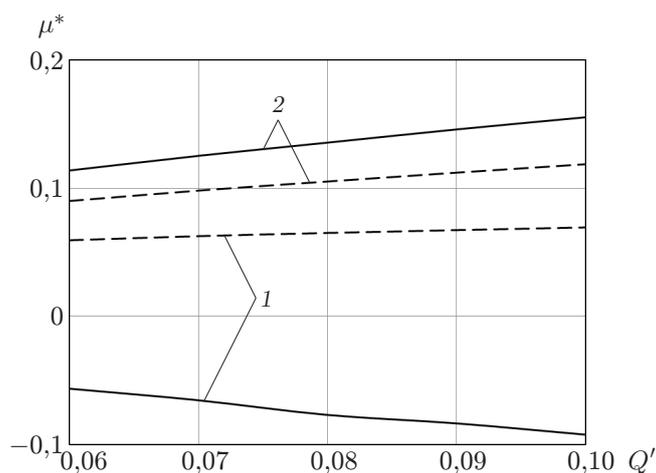


Рис. 4. Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения инденторов от нагрузки:  
1 — индентор 1, 2 — индентор 2, сплошные линии —  $V' = 3$ , штриховые —  $V' = 6$

лена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения инденторов 1, 2 от расстояния  $l$  между ними. Расчеты проводились при следующих значениях параметров:  $c = 3$ ,  $\mu = 0,5$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $V' = 3$ ,  $Q' = 0,08$ . Из рис. 3 следует, что для индентора 2 деформационная составляющая коэффициента трения увеличивается при уменьшении расстояния между инденторами, а для индентора 1 — значительно уменьшается. При достаточно малом расстоянии между центрами инденторов и  $V' = 3$  деформационная составляющая коэффициента трения индентора 2 становится отрицательной.

На рис. 4 приведена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки  $Q'$  при следующих значениях параметров задачи:  $c = 3$ ,  $\mu = 0,5$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $l = 3$ . Увеличение нагрузки при малых скоростях скольжения приводит к увеличению деформационной составляющей коэффициента трения индентора 2 и уменьшению этой составляющей у индентора 1. При большей скорости деформационные составляющие коэффициента трения различаются менее значительно. Диапазон исследуемых нагрузок огра-

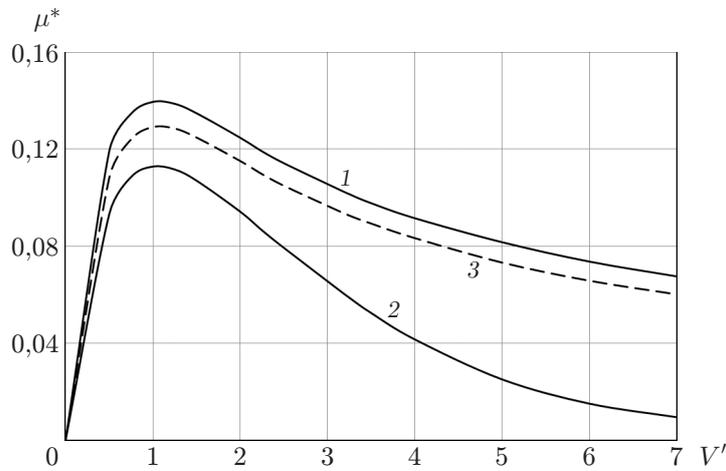


Рис. 5. Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения инденторов от скорости их скольжения:

1 — индентор 1, 2 — индентор 2, 3 — одиночный индентор

ничен, поскольку размер площадки контакта должен быть существенно меньше радиуса индентора.

На рис. 5 представлена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения инденторов от скорости их скольжения, рассчитанная при следующих значениях параметров:  $c = 3$ ,  $\mu = 0,5$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $l = 3$ ,  $Q' = 0,08$ . Видно, что при увеличении скорости деформационная составляющая коэффициента трения сначала резко возрастает, а после достижения максимального значения плавно уменьшается. В случае одиночного индентора деформационная составляющая коэффициента трения уменьшается до нуля. Из рис. 5 следует, что коэффициент гистерезисных потерь индентора 1 больше, чем у одиночного индентора, на величину, не зависящую от скорости. Это объясняется упругой деформацией полупространства в окрестности индентора 1 вследствие воздействия индентора 2. Коэффициент гистерезисных потерь индентора 2 меньше, чем у одиночного индентора, а при увеличении скорости скольжения это различие увеличивается, что обусловлено вязкими свойствами материала.

**4. Выводы.** В работе предложен метод исследования взаимного влияния инденторов при их скольжении по вязкоупругому полупространству. Результаты проведенных расчетов позволяют сделать следующие выводы.

Скорость скольжения и расстояние между инденторами оказывают существенное влияние на характеристики контакта и силу трения. Обнаружен новый эффект разделения площадки контакта на две подобласти у индентора, скользящего за другим индентором, при уменьшении расстояния между ними.

Деформационная составляющая коэффициента трения увеличивается для индентора, движущегося впереди, и снижается у индентора, движущегося позади, в результате их взаимодействия с полупространством. Деформационная составляющая коэффициента трения системы, состоящей из двух инденторов, меньше, чем у изолированного индентора.

Результаты работы могут быть использованы при оценке характеристик контакта и деформационной составляющей силы трения при фрикционном взаимодействии эластомеров с телами, имеющими шероховатую поверхность.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Горячева И. Г.** Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
2. **Александров В. М., Горячева И. Г.** Движение с постоянной скоростью распределенной нагрузки по вязкоупругому полупространству // Материалы 5-й Рос. конф. с междунар. участием “Смешанные задачи механики деформируемого тела”, Саратов, 23–25 авг. 2005 г. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 23–25.
3. **Александров В. М., Горячева И. Г., Торская Е. В.** Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству // Докл. АН. 2010. Т. 430, № 4. С. 490–493.
4. **Goryacheva I. G., Stepanov F. I., Torskaya E. V.** Effect of friction in sliding contact of a sphere over a viscoelastic half-space // Mathematical modeling and optimization of complex structures. Jyväskylä: Springer, 2016. С. 93–103. (В печати.) (Ser. Computational methods in applied sciences).
5. **Горячева И. Г., Степанов Ф. И., Торская Е. В.** Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству // Прикл. математика и механика. 2015. Т. 79, вып. 6. С. 853–863.
6. **Koumi K. E., Chaise T., Nelias D.** Rolling contact of a rigid sphere sliding of a spherical indenter upon a viscoelastic half-space containing an ellipsoidal inhomogeneity // J. Mech. Phys. Solids. 2015. V. 80. P. 1–25.
7. **Шептунов Б. В., Горячева И. Г., Ноздрин М. А.** Контактная задача о движении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию // Трение и износ. 2013. Т. 34, № 2. С. 109–119.
8. **Любичева А. Н.** Численное моделирование скольжения системы сферических инденторов по вязкоупругому телу // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4/5. С. 2324–2325.

*Поступила в редакцию 17/VII 2015 г.*

---