УДК 532.5: 533.6

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛ СОХОЦКОГО — ПЛЕМЕЛЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ КРЫЛА

Д. Н. Горелов

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 644099 Омск
E-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Построено решение гидродинамической задачи о движении идеальной несжимаемой жидкости в вихревом слое конечной толщины. В предельном случае (бесконечно тонкий слой) этот слой переходит в вихревую поверхность. Для предельных значений вектора скорости жидкости при подходе к этой поверхности получены формулы, обобщающие на трехмерное пространство формулы Сохоцкого — Племеля для сингулярного интеграла типа интеграла Коши. На основе этих формул и предложенного способа моделирования крыла конечной толщины замкнутой вихревой поверхностью выведены три интегральных уравнения. Показано, что в случае бесконечно тонкого крыла остается только одно уравнение, соответствующее условию непротекания жидкости через поверхность крыла.

Ключевые слова: формулы Сохоцкого — Племеля, вихревая поверхность, интегральные уравнения, крыло конечного размаха.

В теории функций комплексной переменной, особенно при решении краевых задач, широко используются формулы Сохоцкого — Племеля для предельных значений интеграла типа интеграла Коши, полученные в разное время Ю. В. Сохоцким, И. Племелем и в более общих предположениях И. И. Приваловым [1]. В [2] А. В. Бицадзе получил пространственный аналог формул Сохоцкого — Племеля в векторной форме. Позднее аналогичные формулы получены независимо от [2] в другой форме и другим путем в работе [3]. В настоящей работе представлен в более полном изложении вывод пространственного аналога формул Сохоцкого — Племеля и в качестве приложения этих формул выведены интегральные уравнения для крыла конечной толщины, обтекаемого трехмерным нестационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости.

1. Обобщение формул Сохоцкого — Племеля. Рассмотрим вихревую поверхность S и поле скоростей $\boldsymbol{v}$, индуцируемое этой поверхностью. Представим вихревую поверхность в виде бесконечно тонкого вихревого слоя, который можно получить с помощью предельного перехода из вихревого слоя конечной толщины [3].

Пусть в идеальной несжимаемой жидкости между двумя вихревыми поверхностями S_+, S_- находится вихревой слой малой толщины. Предполагается, что вне этого вихревого слоя течение жидкости потенциальное (вектор вихря $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$). Введем срединную поверхность S, выберем на ней точку $(\xi, \eta, \zeta) \in S$ и свяжем с этой точкой естественную систему координат s, n, b с координатным базисом $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, состоящим соответственно из единичных векторов касательной, нормали и бинормали к S в точке (ξ, η, ζ) (рис. 1).

В данной системе координат

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_s \boldsymbol{s} + \omega_n \boldsymbol{n} + \omega_b \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{v} = v_s \boldsymbol{s} + v_n \boldsymbol{n} + v_b \boldsymbol{b}.$$

На границе вихревого слоя (на поверхностях S_+, S_-) нормальная компонента вектора вихря ω_n равна нулю. Предположим, что толщина вихревого слоя 2ε настолько мала, что

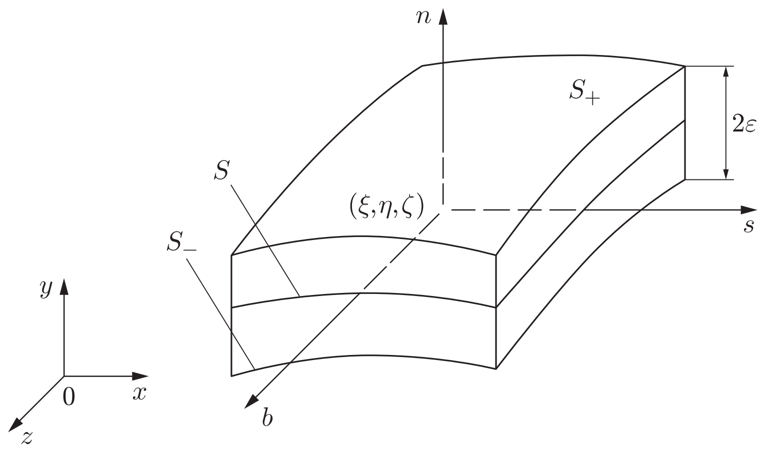

Рис. 1. Моделирование вихревой поверхности:
S_+, S_- — границы вихревого слоя, S — осредненная поверхность

вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$ и нормальная составляющая скорости жидкости v_n не зависят от нее. Эти предположения можно записать в виде

$$\omega_n = 0, \quad \frac{\partial \omega_s}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \omega_b}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0, \quad n \in [-\varepsilon, +\varepsilon]. \tag{1}$$

Согласно определению вектора вихря $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ его компоненты равны

$$\omega_s = \frac{\partial v_b}{\partial n} - \frac{\partial v_n}{\partial b}, \qquad \omega_n = \frac{\partial v_s}{\partial b} - \frac{\partial v_b}{\partial s}, \qquad \omega_b = \frac{\partial v_n}{\partial s} - \frac{\partial v_s}{\partial n}. \tag{2}$$

Из (1), (2) получаем условия

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v_b}{\partial n^2} = 0, \qquad n \in [-\varepsilon, +\varepsilon],$$

из которых следует, что внутри вихревого слоя производные $\partial v_s/\partial n$, $\partial v_b/\partial n$ являются функциями только переменных s, b:

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} = A_s(s,b), \qquad \frac{\partial v_b}{\partial n} = A_b(s,b), \qquad n \in [-\varepsilon, +\varepsilon]. \tag{3}$$

Интегрируя выражения (3) и уравнение $\partial v_n/\partial n = 0$ по координате n, находим

$$v_s = A_s(s,b)n + C_s(s,b), \qquad v_n = C_n(s,b), \qquad v_b = A_b(s,b)n + C_b(s,b).$$

Для того чтобы определить функции $A_s(s,b)$, …, $C_b(s,b)$, потребуем выполнения граничных условий $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^+$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^-$ при $n = \pm\varepsilon$. Тогда

$$A_s(s,b) = \frac{1}{2\varepsilon}\,(v_s^+ - v_s^-), \qquad C_s(s,b) = \frac{1}{2}\,(v_s^+ + v_s^-), \qquad C_n(s,b) = \frac{1}{2}\,(v_n^+ + v_n^-),$$

$$A_b(s,b) = \frac{1}{2\varepsilon}\,(v_b^+ - v_b^-), \qquad C_b(s,b) = \frac{1}{2}\,(v_b^+ + v_b^-);$$

$$v_s = v_{0s} + \frac{n}{2\varepsilon}\,(v_s^+ - v_s^-), \qquad v_n = v_{0n}, \qquad v_b = v_{0b} + \frac{n}{2\varepsilon}\,(v_b^+ - v_b^-). \tag{4}$$

Здесь верхние индексы “+”, “−” обозначают предельные значения скорости жидкости $\boldsymbol{v}$ на границах вихревого слоя; v_{0s}, v_{0n}, v_{0b} — компоненты вектора скорости

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{v}^+ + \boldsymbol{v}^-). \tag{5}$$

Подставляя (4) в (2), получаем, что внутри вихревого слоя

$$\omega_s = -\frac{1}{2\varepsilon}\,[(v_b^- - v_b^+) + O(\varepsilon)], \qquad \omega_n = 0, \qquad \omega_b = \frac{1}{2\varepsilon}\,[(v_s^- - v_s^+) + O(\varepsilon)].$$

Нормальная компонента вектора вихря ω_n равна нулю вследствие предположения о ее неизменности по высоте вихревого слоя и равенстве нулю на границе.

В случае если толщина вихревого слоя в каждой точке $(\xi, \eta, \zeta) \in S$ стремится к нулю, получаем вихревую поверхность S, для которой векторная интенсивность единицы площади $\boldsymbol{\gamma}$ связана с разрывом вектора скорости жидкости соотношением

$$\boldsymbol{\gamma} = \lim_{\varepsilon\to 0}(2\varepsilon\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-), \tag{6}$$

или

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_s\boldsymbol{s} + \gamma_n\boldsymbol{n} + \gamma_b\boldsymbol{b}, \quad \gamma_s = v_b^+ - v_b^-, \quad \gamma_n = 0, \quad \gamma_b = v_s^- - v_s^+. \tag{7}$$

Вихревой слой конечной толщины, расположенный в объеме пространства V, создает вокруг себя поле скоростей, определяемое формулой [4]

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int\limits_V \frac{\boldsymbol{\omega}}{r}\,dV = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,dV. \tag{8}$$

При выводе выражения (8) учитывается, что $\boldsymbol{\omega}$ зависит от переменных ξ, η, ζ, тогда как оператор rot действует на функции, зависящие от x, y, z. С помощью формулы (8) можно определить поле скоростей, индуцируемых вихревой поверхностью S. Для этого представим элемент объема dV в виде $dV = 2\varepsilon\, dS$ и перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$ с учетом (6). В результате получим

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,dS. \tag{9}$$

Согласно [2] выражение (9) является пространственным аналогом интеграла типа интеграла Коши. Из (4)–(7) следует, что предельные значения $\boldsymbol{v}^+$, $\boldsymbol{v}^-$ вектора скорости жидкости $\boldsymbol{v}$, определяемого по формуле (9), при подходе к верхней S_+ и нижней S_- сторонам вихревой поверхности S связаны с вектором интенсивности $\boldsymbol{\gamma}$ соотношениями

$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{2}\,\gamma_b\boldsymbol{s} + \frac{1}{2}\,\gamma_s\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{v}^- = \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}\,\gamma_b\boldsymbol{s} - \frac{1}{2}\,\gamma_s\boldsymbol{b}. \tag{10}$$

Выражения (10) являются обобщением на трехмерное пространство формулы Сохоцкого — Племеля для предельных значений интеграла типа интеграла Коши в комплексной плоскости (в работе [2] обобщение формул Сохоцкого — Племеля получено в другом виде). В соответствии с (10) при переходе через вихревую поверхность происходит разрыв касательной и бинормальной составляющих вектора скорости, в то время как его нормальная составляющая остается без изменения. Такими свойствами обладает поверхность тангенциального разрыва.

В частном случае движения жидкости в плоскости $z = \mathrm{const}$ вихревая поверхность образует вихревой слой L. Вихревые линии в этом слое направлены вдоль оси z, и вектор интенсивности $\boldsymbol{\gamma}(s)$ имеет одну составляющую $\gamma_z(s) = \gamma(s)$. Из (9), (10) следует, что вихревой слой L в точке (x, y) индуцирует вектор скорости

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{r}}{r^2}\,ds \tag{11}$$

($r = \sqrt{(x-\xi(s))^2 + (y-\eta(s))^2}$). Предельные значения этого вектора определяются с помощью формул

$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{2}\,\gamma \boldsymbol{s}, \qquad \boldsymbol{v}^- = \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}\,\gamma \boldsymbol{s} \tag{12}$$

($\gamma(s) = v_s^- - v_s^+$).

При переходе из декартовой системы координат в комплексную плоскость $z = x + iy$ и от вектора скорости $\boldsymbol{v}$ к комплексной скорости $\bar{v}(z) = v_x(x,y) - iv_y(x,y)$ формула (11) принимает вид

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\gamma(s)\,ds}{z - \zeta(s)}, \qquad \zeta(s) = \xi(s) + i\eta(s) \in L, \tag{13}$$

а соотношения (12) для предельных значений вектора скорости переходят в формулы Сохоцкого — Племеля [1, 5] для предельных значений интеграла типа интеграла Коши:

$$\bar{v}^+(z) = \bar{v}_0(z) + \frac{1}{2}\,\gamma(s)\,\mathrm{e}^{-i\theta(z)}, \quad \bar{v}^-(z) = \bar{v}_0(z) - \frac{1}{2}\,\gamma(s)\,\mathrm{e}^{-i\theta(z)}, \quad z \in L.$$

Здесь $\theta(z)$ — угол наклона касательной к L, отсчитываемый от оси x; $\bar{v}_0(z)$ определяется с помощью выражения (13) при $z \in L$, в котором соответствующий сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

2. Моделирование крыла вихревой поверхностью. Полученные формулы могут использоваться для вывода интегральных уравнений в теории крыла конечного размаха, обтекаемого идеальной несжимаемой жидкостью. Однако для этого необходимо предварительно провести моделирование крыла вихревой поверхностью. Такое моделирование широко применяется для решения краевых задач в теории крыла. (Крыло можно моделировать и другой системой особенностей, например источниками, но тогда предельные значения скорости жидкости определяются иначе.)

Суть данного моделирования заключается в том, что крыло заменяется некоторой вихревой поверхностью S, движущейся в жидкости по тому же закону, что и крыло. Для бесконечно тонкого крыла эта поверхность разомкнутая, а для крыла конечной толщины — замкнутая (рис. 2). Определить поле скоростей возле разомкнутой поверхности нетрудно. Однако в случае замкнутой вихревой поверхности ситуация осложняется. При моделировании крыла сплошная среда должна находиться во внутренней области такой поверхности. В качестве такой среды целесообразно выбирать ту жидкость, в которой движется крыло. Эта особенность моделирования крыла конечной толщины обычно не учитывается.

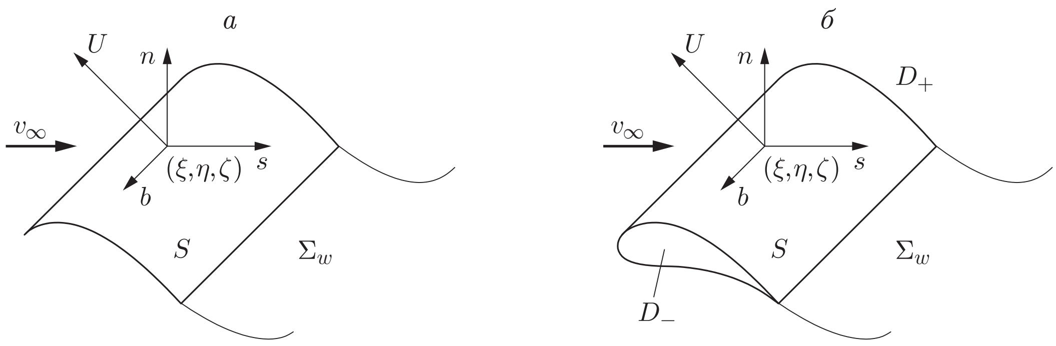

Рис. 2. Моделирование крыла вихревой поверхностью:
а — бесконечно тонкое крыло; *б* — крыло конечной толщины

Рассмотрим условия для предельных скоростей жидкости при подходе к разомкнутой и замкнутой поверхностям. Пусть вихревая поверхность (крыло) движется в неподвижной системе координат x, y, z со скоростью $\boldsymbol{U}(\xi, \eta, \zeta, t)$, $(\xi, \eta, \zeta) \in S$ (t — время). При подходе к разомкнутой поверхности предельные значения вектора скорости должны удовлетворять условию непротекания жидкости через поверхность крыла

$$\boldsymbol{v}^- \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}^+ \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{14}$$

С учетом (5) условие (14) можно записать в виде

$$\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{15}$$

Перейдем к рассмотрению замкнутой вихревой поверхности. Обозначим через D_+, D_- области течения жидкости соответственно вне и внутри крыла (рис. 2). Следует отметить, что физический смысл имеет только течение жидкости в области D_+ вне крыла, тогда как жидкость и ее течение в области D_- являются виртуальными.

Предположим, что виртуальная жидкость внутри замкнутой вихревой поверхности S движется по тому же закону, что и крыло. Тогда выражение для предельных значений скорости жидкости, которые при подходе к поверхности S в области D_- равны скорости движения крыла $\boldsymbol{U}$, можно записать в виде

$$\boldsymbol{v}^-(\xi, \eta, \zeta, t) = \boldsymbol{U}(\xi, \eta, \zeta, t), \qquad (\xi, \eta, \zeta) \in S. \tag{16}$$

Из (16) следует, что в рассматриваемой модели замкнутой вихревой поверхности жидкость "прилипает" к этой поверхности в области D_-. Такое поведение идеальной жидкости возможно только в случае виртуального течения жидкости.

С учетом соотношений (10) условие (16) можно записать в виде

$$\boldsymbol{v}^- = \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}\,\gamma_b \boldsymbol{s} - \frac{1}{2}\,\gamma_s \boldsymbol{b} = \boldsymbol{U}. \tag{17}$$

Векторное соотношение (17) эквивалентно трем скалярным соотношениям

$$\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{s} - \frac{1}{2}\,\gamma_b, \quad \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\,\gamma_s. \tag{18}$$

Первое соотношение в (18) совпадает с условием непротекания жидкости через разомкнутую вихревую поверхность (15), тогда как два других имеют место только в случае замкнутой вихревой поверхности. Эти два соотношения появляются в результате применения пространственного аналога формул Сохоцкого — Племеля и рассматриваемого способа моделирования крыла конечной толщины. Заметим, что подобный способ моделирования крыла замкнутой вихревой поверхностью, внутри которой движется жидкость, применялся ранее для плоского потока [6].

3. Вывод интегральных уравнений для крыла конечного размаха. Пусть крыло конечного размаха обтекается безграничным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Скорость движения потока равна $\boldsymbol{v}_\infty$, а крыло движется со скоростью $\boldsymbol{U}$. В общем случае движение жидкости нестационарное, и с крыла сходит вихревая пелена (на рис. 2 показана лишь часть вихревой пелены Σ_w, сходящая с задней кромки). Вихревую пелену принято моделировать свободной вихревой поверхностью, которая после схода с крыла движется вместе с жидкостью. Вектор скорости $\boldsymbol{v}_w$, индуцируемый свободной поверхностью, определяется по формуле (9), в которой S заменяется на Σ_w, а $\boldsymbol{\gamma}$ — на вектор интенсивности вихревой пелены $\boldsymbol{\gamma}_w$. Векторное поле скоростей вокруг крыла определяется скоростью набегающего потока $\boldsymbol{v}_\infty$ и скоростями, индуцируемыми крылом (вихревой поверхностью S) и вихревой пеленой Σ_w. Кроме того, в области течения жидкости могут находиться другие тела и границы потока, которые создают дополнительное поле скоростей $\Delta\boldsymbol{v}$. В результате для вектора скорости получаем выражение

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\infty + \Delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_w} \frac{\boldsymbol{\gamma}_w\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,d\Sigma_w. \tag{19}$$

Краевая задача может быть сведена к выводу интегральных уравнений, описывающих обтекание крыла рассматриваемым потоком жидкости. Для их вывода используются соотношения (18), полученные в результате применения пространственного аналога формул Сохоцкого — Племеля и способа моделирования крыла конечной толщины замкнутой вихревой поверхностью. При этом вектор $\boldsymbol{v}_0$ определяется по формуле (19) для точек крыла $(x, y, z) \in S$.

Подставляя (19) в соотношения (18), получаем систему следующих трех интегральных уравнений относительно векторной функции $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\Big(\boldsymbol{v}_\infty - \boldsymbol{U} + \Delta\boldsymbol{v} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_w} \frac{\boldsymbol{\gamma}_w\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,d\Sigma_w\Big)\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad (x, y, z) \in S; \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\,\gamma_b + \Big(\boldsymbol{v}_\infty - \boldsymbol{U} + \Delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_w} \frac{\boldsymbol{\gamma}_w\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,d\Sigma_w\Big)\cdot\boldsymbol{s} = 0; \tag{21}$$

$$-\frac{1}{2}\,\gamma_s + \Big(\boldsymbol{v}_\infty - \boldsymbol{U} + \Delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_w} \frac{\boldsymbol{\gamma}_w\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,d\Sigma_w\Big)\cdot\boldsymbol{b} = 0. \tag{22}$$

Уравнения (20)–(22) получены для крыла конечной толщины. С помощью этих уравнений накладываются ограничения на нормальные, касательные и бинормальные компоненты вектора скорости жидкости в точках крыла. Уравнение (19), включающее нормальные компоненты, определяет условие непротекания жидкости через крыло, а уравнения (21), (22) являются следствием формул (10) и выбранного способа моделирования крыла конечной толщины.

Для бесконечно тонкого крыла, моделируемого разомкнутой вихревой поверхностью, имеет место только условие непротекания жидкости (14), которое приводит к одному интегральному уравнению (20).

В частности, в случае плоского движения жидкости, когда $\gamma_n = 0$, $\gamma_s = 0$, $\gamma_b = \gamma$, из трех уравнений (20)–(22) остаются два интегральных уравнения (20) и (21). При обтекании жидкостью неподвижного профиля ($\boldsymbol{U} = 0$) в комплексной плоскости для комплексной скорости эти уравнения имеют следующий вид:

$$\operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{i\theta(z)}\Big(\bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\gamma(\sigma)\,d\sigma}{z - \zeta(\sigma)}\Big)\Big] = 0, \qquad z \in L; \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}\,\gamma(s) + \operatorname{Re}\Big[\mathrm{e}^{i\theta(z)}\Big(\bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\gamma(\sigma)\,d\sigma}{z - \zeta(\sigma)}\Big)\Big] = 0, \qquad z \in L. \tag{24}$$

Уравнения (23), (24) применяются для решения плоских краевых задач теории крыла. При этом краевая задача для бесконечно тонкого профиля (дужки) сводится только к уравнению первого рода (23), а для профиля конечной толщины имеют место оба уравнения.

Рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся интегральных уравнений (20)–(22). Эти уравнения содержат три неизвестные функции: интенсивности вихревых слоев, моделирующих крыло и вихревую пелену, и уравнение вихревой пелены. Появление вихревой пелены за крылом конечного размаха вызвано как изменением с течением времени поля скоростей, так и изменением циркуляции скорости вдоль крыла. Вихревая пелена неустойчива и эволюционирует с течением времени. Теоретическое исследование обтекания крыла конечного размаха сводится к решению трехмерных нелинейных начально-краевых задач в областях с неизвестными границами. Постановка таких задач включает, помимо интегральных уравнений, систему нелинейных соотношений, связывающих интенсивности вихрей на крыле и в вихревой пелене, уравнения движения свободных вихрей в пелене, условия схода вихрей с крыла в вихревую пелену. Многие из таких соотношений в теории крыла конечного размаха пока не получены.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951.
2. **Бицадзе А. В.** Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1953. № 6. С. 525–538.
3. **Горелов Д. Н.** Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
5. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
6. **Горелов Д. Н.** К постановке нелинейной начально-краевой задачи нестационарного отрывного обтекания профиля // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 48–56.

Поступила в редакцию 9/XI 2010 г.,
в окончательном варианте — 8/II 2011 г.