

УДК 532.59

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ВЕРТИКАЛЬНОМ ПОДЪЕМЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА К ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ЖИДКИХ СРЕД

С. И. Горлов

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 644099 Омск

Рассмотрена нелинейная начальнo-краевая задача о приближении контура к границе раздела двух жидких сред. Решение построено на основе разработанного ранее численного метода, основанного на сведении исходной задачи к системе интегродифференциальных уравнений относительно особенностей, моделирующих жидкие и твердые границы, и функции, описывающей границу раздела сред. Приведены результаты расчетов возмущений, вызванных приближением кругового цилиндра к свободной поверхности. Даны оценки зависимости полученных течений и гидродинамических характеристик контура от числа Фруда.

Решение нелинейных нестационарных задач о движении контура вблизи границ раздела сред стало возможным благодаря развитию вычислительной гидродинамики. В этой области особое место занимает задача о вертикальном подъеме контура к границе раздела сред, имеющая обширные практические приложения. В [1] рассмотрена задача об определении плоского потенциального течения вокруг кругового цилиндра, приближающегося к свободной поверхности. Цилиндр из состояния глубокого погружения плавно ускоряется от нулевой до постоянной вертикальной скорости. Для получения возвышения свободной поверхности и линий тока применен обобщенный вихревой метод, разработанный в [2, 3]. Для нескольких значений скоростей приведены результаты расчетов, в том числе распределение давления по контуру. Проведено сравнение с расчетами движения цилиндра, приближающегося к стенке и движущегося в безграничной жидкости. В [4] на основе метода граничных элементов выполнены расчеты вертикального движения (вверх и вниз) цилиндра под свободной поверхностью. Пересекая свободную поверхность, тело несет на себе слой жидкости. Этот эффект объясняется наличием инерционных сил. Плоская краевая нелинейная нестационарная задача о поверхностных волнах, вызванных вертикальным движением цилиндра, рассмотрена в [5]. Анализируется начальная стадия процесса. Метод решения предполагает точное выполнение условия безотрывного обтекания цилиндра. Потенциал скорости, смещение свободной поверхности и координаты точек, принадлежащих цилиндру, представлены в форме степенных рядов по времени. Рассчитана форма свободной поверхности на начальной стадии процесса для цилиндра, поднимающегося к свободной поверхности. Рассмотрены также случаи горизонтального движения и под углом к горизонту. Эта же задача в дипольном приближении рассмотрена в [6]. Движение кругового цилиндра с постоянной скоростью к свободной поверхности несомой жидкости исследовано в [7, 8]. Результаты расчета формы свободной поверхности сравниваются с данными, полученными при помощи асимптотических разложений [5]. Предложенный в работе метод позволяет рассчитывать течения в любое время до выхода из воды. Следует отметить, что эта задача рассматривалась ранее в [9] с использованием метода комплексных граничных элементов, предложенного в [10]. Изучен процесс приближения к свободной

поверхности на малое расстояние. В [11] исследован выход кругового цилиндра из воды при больших числах Фруда. Для дискретизации системы уравнений Навье — Стокса использован метод конечных объемов. Деформации свободной поверхности, порождаемые выходом кругового цилиндра, рассчитаны на основе многоуровневой сеточной схемы. Приведены расчеты формы свободной поверхности и характеристик течения вокруг цилиндра в различные моменты времени.

Целью настоящей работы является исследование на основе разработанного ранее численного метода задачи о вертикальном подъеме кругового цилиндра к свободной поверхности. Большое внимание уделяется оценке влияния числа Фруда на характер течения, возникающего около кругового цилиндра.

Рассмотрим задачу о вертикальном подъеме контура L_0 к границе раздела сред L_1 . В полубесконечных слоях D_1 и D_2 (слой D_1 расположен ниже) жидкость является идеальной, несжимаемой, тяжелой и однородной. Система координат вводится таким образом, чтобы ось x совпадала с невозмущенной в начальный момент времени границей раздела L_1 . Введем следующие обозначения: g — ускорение свободного падения, ρ_k — плотность жидкости в слое D_k , R — радиус цилиндра.

Будем моделировать жидкие и твердые границы особенностями. С этой целью рассмотрим интенсивности вихревого слоя $\gamma_1(s_1, t)$, расположенного вдоль границы раздела сред $L_1(t)$, и слоя источников $q(s_0, t)$ на контуре $L_0(t)$. Предположим, что $\gamma_1(\pm\infty, t) = 0$. Движение жидкости в областях $D_1(t)$ и $D_2(t)$ будем описывать функцией

$$\bar{V}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1(t)} \frac{\gamma_1(s_1, t) ds_1}{z - \zeta(s_1)} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_0(t)} \frac{q(s_0, t) ds_0}{z - \zeta(s_0)}. \quad (1)$$

Система интегродифференциальных уравнений, соответствующих кинематическому и динамическому условиям на границе раздела сред $L_1(t)$, а также условию непротекания в точках контура $L_0(t)$, имеет вид [12]

$$\frac{\partial z(s_1)}{\partial t} = V_1(z(s_1), t), \quad z(s_1) \in L_1(t); \quad (2)$$

$$\frac{\partial G(s_1, t)}{\partial t} = \rho_* \left(\frac{|\bar{V}_1(z(s_1), t)|^2}{2} - g \operatorname{Im} z(s_1) - \frac{\gamma_1^2(s_1, t)}{8} \right), \quad z(s_1) \in L_1(t),$$

$$\rho_* = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad G(s_1, t) = \int_{-\infty}^{s_1} \left(\frac{\gamma_1(\sigma_1, t)}{2} + \rho_* V_{1s}(\sigma_1, t) \right) d\sigma_1, \quad (3)$$

$$V_{js}(s_j, t) = \operatorname{Re} (V_j(z(s_j), t) e^{i\theta_j(s_j, t)}), \quad z(s_j) \in L_j(t) \quad (j = 0, 1);$$

$$\frac{q(s_0, t)}{2} = \operatorname{Im} ((\bar{V}_0(z(s_0), t) - \bar{V}_{L_0}(t)) e^{i\theta_0(s_0, t)}), \quad z(s_0) \in L_0(t); \quad (4)$$

$$V_{L_0}(t) = \begin{cases} iU_0 \sin(\pi\tau/2), & 0 \leq \tau \leq 1, \\ iU_0, & \tau > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\bar{V}_j(z(s_j), t)$ определяется формулой (1) для $z(s_j) \in L_j(t)$ ($j = 0, 1$); $\theta_j(s_j, t)$ — угол между касательной в точке $z(s_j) \in L_j(t)$ и осью x ($j = 0, 1$); $V_{L_0}(t)$ — комплексная скорость, соответствующая плавному вертикальному разгону кругового цилиндра от нулевой до постоянной скорости; $\tau = tU_0/R$ — безразмерное время.

В бесконечно удаленных точках областей $D_1(t)$ и $D_2(t)$ возмущения скоростей и границы раздела сред затухают:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{V}(z, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Im} z(s_1) = 0, \quad z(s_1) \in L_1(t). \quad (6)$$

В начальный момент времени возмущения скоростей и границы раздела сред отсутствуют:

$$\operatorname{Im} z(s_1) = 0, \quad z(s_1) \in L_1(0), \quad \gamma_1(s_1, 0) = q(s_0, 0) = 0. \quad (7)$$

После решения системы (1)–(7) определяется гидродинамическое давление $p(s_0, t)$ в точках контура $z(s_0)$, а также суммарные гидродинамические нагрузки R_x и R_y :

$$p(s_0, t) - f(t) = -\rho_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{s_0} V_{0s}(\sigma_0, t) d\sigma_0 - \operatorname{Re}(\bar{V}_{L_0}(t)V_0(z(s_0), t)) + \frac{|\bar{V}_0(z(s_0), t)|^2}{2} \right); \quad (8)$$

$$R_x - iR_y = i \int_{L_0(t)} (p(s_0, t) - f(t)) e^{-i\theta_0(s_0, t)} ds_0, \quad (9)$$

где $f(t)$ — некоторая функция, зависящая только от времени.

Система интегродифференциальных соотношений (2)–(4) нелинейна, что обусловлено двумя факторами: 1) интенсивности особенностей $\gamma_1(s_1, t)$ и $q(s_0, t)$ входят в граничные условия нелинейным образом; 2) форма границы раздела сред $L_1(t)$, которая должна определяться в процессе решения, неизвестна. Это вносит определенные трудности при решении данной системы.

Для интегрирования системы уравнений (2), (3) по времени использовалась схема Рунге — Кутты — Фельберга пятого порядка точности [13]. При этом в каждый момент времени t_n ($n = 1, 2, \dots$) вычислялись значения функции $G^n(s_1^n)$ и точки границы раздела $z^n(s_1^n) \in L_1^n$ (верхний индекс соответствует значениям функции на n -м временном шаге). Задача нахождения значений $\gamma_1^n(s_1^n)$ и $q^n(s_0)$ на каждом шаге по времени сводится к решению системы интегральных уравнений

$$\frac{\gamma_1^n(s_1^n)}{2} + \rho_* V_{1s}^n(s_1^n) = \frac{\partial G^n(s_1^n)}{\partial s_1^n}, \quad z^n(s_1^n) \in L_1^n; \quad (10)$$

$$\frac{q^n(s_0)}{2} = \operatorname{Im}((\bar{V}_0^n(z^n(s_0)) - \bar{V}_{L_0}^n) e^{i\theta_0^n(s_0)}), \quad z^n(s_0) \in L_0^n. \quad (11)$$

Система интегральных уравнений (10), (11) решалась методом панелей высокого порядка [14]. Контур L_1^n и L_0^n разбивались на интервалы $[s_{1i-1}^n, s_{1i}^n]$ ($i = 1, \dots, N$) и $[s_{0j-1}, s_{0j}]$ ($j = 1, \dots, M$) соответственно. На этих интервалах выбирались точки коллокации $z^n(s_{1i}^{n*}) \in L_1^n$ ($s_{1i}^{n*} \in [s_{1i-1}^n, s_{1i}^n]$) и $z^n(s_{0j}^{*}) \in L_0^n$ ($s_{0j}^{*} \in [s_{0j-1}, s_{0j}]$). Уравнения (10) и (11) рассматривались в точках $z^n(s_{1i}^{n*})$ ($i = 1, \dots, N$) и $z^n(s_{0j}^{*})$ ($j = 1, \dots, M$). Границы раздела L_1^n на i -м интервале $[s_{1i-1}^n, s_{1i}^n]$ и контур L_0^n на j -м интервале $[s_{0j-1}, s_{0j}]$ аппроксимируются параболой, а неизвестные функции $\gamma_1^n(s_1^n)$ и $q^n(s_0)$ на этих же интервалах — линейной функцией. После дискретизации интегральных уравнений (10), (11) с учетом (1) получена система линейных алгебраических уравнений относительно значений функций $\gamma_1^n(s_1^n)$ и $q^n(s_0)$ на концах интервалов. После решения этой системы из (1) находятся значения $V^n(z)$ в точках контура, а из (8), (9) — распределенные и суммарные гидродинамические характеристики.

При численном решении задачи в силу симметрии области течения относительно оси y расчетная область рассматривалась в интервале $0 \leq x/R \leq 10$. Число узлов на границах раздела и контуре выбиралось равным 400 и 80 соответственно. В интервале $7,5 \leq x/R \leq 10$ был введен демпфирующий слой с целью подавления отраженных волн

от границ вычислительной области по технологии, описанной в [15]. Развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца предотвращалось с помощью фильтрационной процедуры, предложенной в [16]. Производная $\partial G(s_1, t)/\partial s_1$, входящая в (10), и контурный интеграл из выражения (9) для суммарной гидродинамической нагрузки вычислялись на основе кубических сплайнов. Следует отметить, что описанные методики и процедуры позволили проводить расчеты в широком диапазоне отношений плотностей ρ_* и чисел Фруда $Fr = U_0/\sqrt{gR}$ с изменением полной энергии E , не превосходящим 0,12%.

На основе разработанного более общего метода решения задачи о вертикальном подъеме кругового цилиндра к границе раздела двух сред рассмотрен случай приближения к свободной поверхности однородной жидкости ($\rho_* = 1$), имеющий обширные практические приложения. В начальный момент времени центр цилиндра расположен в точке с координатами $(x_c(0), y_c(0)) = (0, -5)$ и начинает плавный вертикальный подъем по закону (5). Результаты численного эксперимента по оценке влияния числа Фруда на гидродинамические нагрузки цилиндра и возмущения свободной границы представлены на рис. 1–3.

Расчет проводился до момента времени τ_* , при котором сильное взаимодействие между цилиндром и свободной поверхностью приводит к расходимости численного метода. В таблице для различных значений числа Фруда Fr приведены предельные значения времени τ_* . Для сравнения укажем некоторые значения τ_* , полученные в [1]: $\tau_* = 4,24; 4,52; 5,80$ при $Fr = 0,2; 0,4472; 1,4142$ соответственно. Как следует из представленных результатов, предложенный метод позволяет значительно увеличить значения τ_* и исследовать наиболее интересные режимы сильного взаимодействия контура со свободной поверхностью.

Fr	τ_*	Fr	τ_*
0,2	4,41	0,9	5,57
0,3	4,62	1,0	5,67
0,4	4,87	1,1	5,78
0,4472	4,98	1,2	5,89
0,5	5,07	1,3	6,11
0,6	5,25	1,4	6,42
0,7	5,36	1,4142	6,50
0,8	5,45	1,5	6,69

Расчеты формы свободной поверхности в различные моменты времени приведены на рис. 1. Пересекая невозмущенный уровень свободной поверхности, тело несет на себе слой жидкости, что объясняется наличием инерционных сил. Таким образом, при больших числах Фруда возможен расчет течения вокруг цилиндра, находящегося над невозмущенным уровнем свободной поверхности, что наблюдается при $Fr = 1,4142$. Подобная картина обтекания для больших чисел Fr обнаружена экспериментально в [17]. Следует отметить, что полученные результаты по расчету формы свободной поверхности удовлетворительно согласуются с данными работы [1].

Поведение свободной поверхности для $Fr = 0,2$ характеризуется интересной особенностью. Во время разгона до момента времени $\tau = 1$ наблюдается рост возвышения свободной поверхности в точке с ординатой y_0 , расположенной над центром цилиндра, затем это возвышение уменьшается до определенного момента, после чего вновь увеличивается (см. рис. 2). В то же время для $Fr = 0,4472; 1,4142$ свободная поверхность в указанной точке возрастает во всем интервале движения цилиндра.

Расчет гидродинамической нагрузки $C_y = 2R_y/(\rho_1 R U_0^2)$ для тех же чисел Фруда приведен на рис. 3. Следует отметить наличие участка положительных значений C_y при $Fr = 0,2$ (действует выталкивающая сила) и резкое увеличение сопротивления при подходе к предельным значениям времени τ_* для всех чисел Фруда.

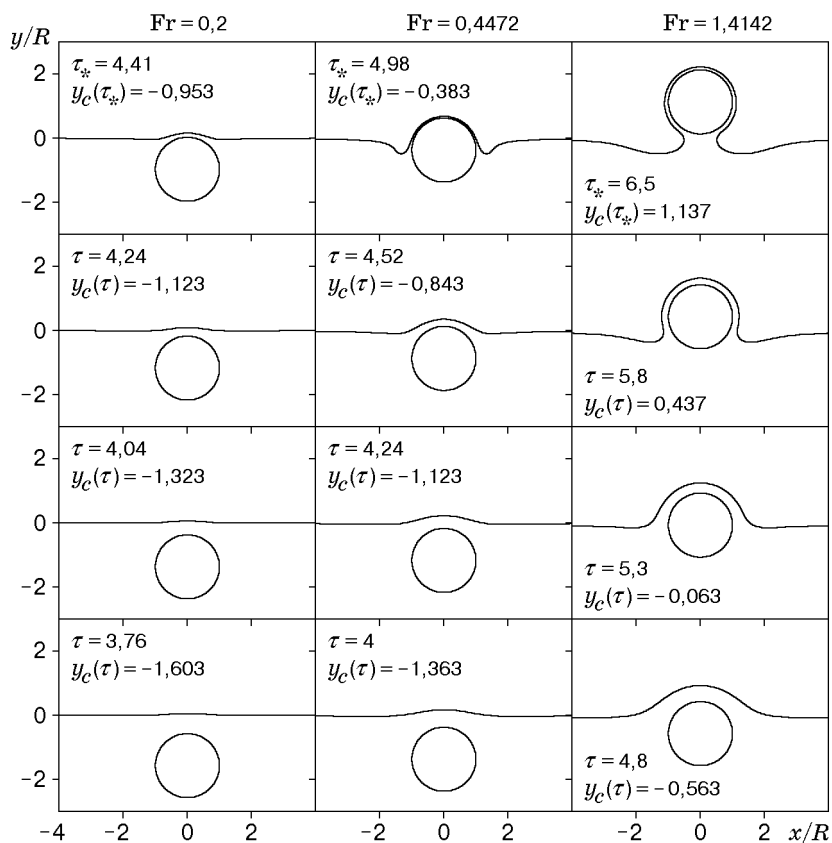


Рис. 1. Возмущения свободной поверхности, вызванные вертикальным подъемом кругового цилиндра

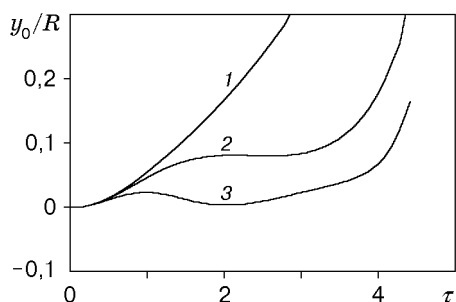


Рис. 2

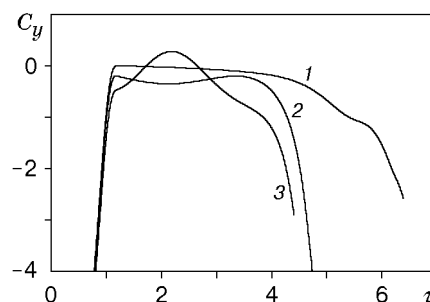


Рис. 3

Рис. 2. Возвышение свободной поверхности в точке, расположенной непосредственно над центром кругового цилиндра:

1 — Fr = 1,4142; 2 — Fr = 0,4472; 3 — Fr = 0,2

Рис. 3. Гидродинамическая нагрузка кругового цилиндра, совершающего вертикальный подъем к свободной поверхности:

1 — Fr = 1,4142; 2 — Fr = 0,4472; 3 — Fr = 0,2

Таким образом, на основе разработанного ранее метода решена нелинейная задача о вертикальном подъеме кругового цилиндра к свободной поверхности. Как показывает сравнение с известными результатами, этот метод имеет ряд преимуществ. В частности, его использование позволяет детально исследовать режимы сильного взаимодействия контура и свободной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Telste J. G.** Inviscid flow about a cylinder rising to a free surface // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 182. P. 149–168.
2. **Baker G. R., Meiron D. I., Orszag S. A.** Generalized vortex methods for free-surface flow problems // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 123. P. 477–501.
3. **Baker G. R., Meiron D. I., Orszag S. A.** Application of a generalized vortex method to nonlinear free-surface flows // *Proc. of the 3rd Intern. conf. on numerical ship hydrodynamics.* Paris, 1981. P. 179–191.
4. **Terentiev A. G., Afanasiev K. E., Afanasieva M. M.** Simulation of unsteady free surface flow problems by the direct boundary element method // *Advanced boundary element methods: Proc. of the IUTAM Symp. San Antonio, 1988.* P. 427–434.
5. **Tyvand P. A., Miloh T.** Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 286. P. 67–101.
6. **Tyvand P. A., Miloh T.** Free-surface flow generated by a small submerged circular cylinder starting from rest // *Ibid.* P. 103–116.
7. **Greenhow M., Moyo S.** Water entry and exit of horizontal circular cylinders // *Philos. Trans. Roy. Soc. London.* 1997. V. A355. P. 551–563.
8. **Moyo S.** Hydrodynamic interaction of horizontal circular cylinders with a free surface: Ph. D thesis. Brunel: Brunel Univ. Press, 1997.
9. **Greenhow M.** Water entry and exit of horizontal circular cylinder // *Appl. Ocean Res.* 1988. V. 10, N 4. P. 191–198.
10. **Vinje T., Brevig P.** Nonlinear ship motions // *Proc. of the 3rd Intern. conf. on numerical ship hydrodynamics.* Paris, 1981. P. 257–266.
11. **Park I. R., Chun H. H.** Analysis of flow around a rigid body in water-entry and exit problems by a finite volume method // *Proc. of the 6th Symp. on nonlinear and free-surface flows.* Hiroshima, 1998. P. 13–18.
12. **Горлов С. И.** Нестационарная нелинейная задача о горизонтальном движении контура под границей раздела двух жидких сред // *ПМТФ.* 1999. Т. 40, № 3. С. 37–43.
13. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
14. **Hess J. L.** Higher-order numerical solution of the integral equation for the two-dimensional Neumann problem // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 1973. V. 2, N 1. P. 1–15.
15. **Israeli M., Orszag S. A.** Approximation of radiation boundary conditions // *J. Comput. Phys.* 1981. V. 41. P. 115–135.
16. **Longuet-Higgins M. S., Cokelet E. D.** The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computations // *Proc. Roy. Soc. London.* 1976. V. A350. P. 1–26.
17. **Faltinsen O. M.** Sea loads on ships and offshore structures. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

*Поступила в редакцию 18/V 1998 г.,
в окончательном варианте — 9/III 1999 г.*