

**РАСЧЕТ АКУСТИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ ПОВЕРХНОСТИ  
ГОРЕНИЯ КОНДЕНСИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ  
НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ПРОЦЕССОВ В ГАЗОВОЙ ФАЗЕ**

*С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев, В. Е. Тульский*

(Москва)

В большинстве теоретических работ по определению акустической проводимости горячей поверхности конденсированной системы используется квазистационарное описание процессов в газовой фазе (например, [1-6]), поэтому полученные результаты могут использоваться при интерпретации экспериментальных результатов по акустической неустойчивости горения при частотах, меньших  $10^4$  гц. Рассмотрение взаимодействия слабых гармонических волн давления с зоной горения с учетом инерционности газовой фазы, справедливое до частот  $10^4-10^5$  гц, проводилось с применением различных моделей зоны горения в работах [7-9].

В данной работе расчет акустической проводимости горячей поверхности конденсированной системы с учетом инерционности газовой фазы выполнен в рамках двухзонной модели горения типа модели [7]. При формулировке основных уравнений приняты во внимание непостоянство температуры горения в нестационарных условиях, зависимость полноты сгорания от давления и образование энтропийных волн при взаимодействии волн давления с зоной горения.

**1. Постановка задачи. Модель зоны горения.** Протяженность зоны горения даже при частотах колебаний газа, достигающих  $10^5$  гц, составляет малую долю длины акустической волны в газообразных продуктах сгорания. Поэтому при анализе акустических свойств горячей поверхности эта зона может считаться бесконечно тонкой, совпадающей с поверхностью конденсированной системы, а ее акустические свойства могут быть описаны величиной акустической проводимости

$$(1.1) \quad \zeta = -\rho_* c_* \delta u_* / \delta p$$

где  $\delta u_*$  — амплитуда изменения скорости истечения газообразных продуктов сгорания из зоны горения под действием гармонических возмущений давления с амплитудой  $\delta p$ ,  $\rho_*$  — плотность продуктов сгорания,  $c_*$  — скорость звука в продуктах сгорания.

Расчет акустической проводимости горячей поверхности сводится к определению  $\zeta$  из линеаризованных уравнений, описывающих перестройку процессов в зоне горения при изменении давления. При решении этой задачи необходимо считать зону горения протяженной и сделать конкретные предположения о ее структуре.

Рассматривается одномерная модель горения гомогенной конденсированной системы. Предполагается, что зона горения имеет структуру, схематически показанную на фиг. 1. При записи уравнений выбрана система координат, связанная с поверхностью конденсированной фазы, которая расположена в точке  $x = 0$ . К-фаза (области 1, 2) однородна и характеризуется постоянными плотностью  $\rho_1$ , теплоемкостью  $c_1$  и коэффициентом теплопроводности  $\lambda_1$ . В тонком приповерхностном слое  $x_i < x < 0$  (область 2) протекает химическая реакция, которая приводит к газификации k-фазы. Предполагается, что тепловыделение в k-фазе как в стационарных, так и в нестационарных условиях сохраняет постоянное значение, равное  $Q_1$ . В зоне прогрева k-фазы —  $-\infty < x < x_i$  химических реакций не про-

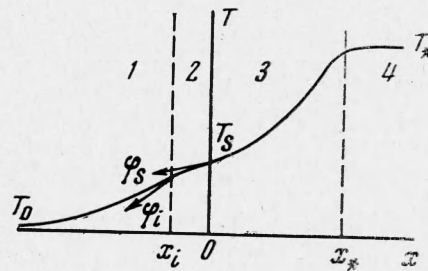
исходит. Начальная температура  $k$ -фазы  $T_0$ , температура поверхности  $T_s$ . Градиенты температуры на границах области 2 в  $k$ -фазе равны соответственно

$$(dT/dx)_{x_i} \equiv \varphi_i, \quad (dT/dx)_{x=0} \equiv \varphi_s$$

Область  $0 < x < x_*$  (область 3) представляет собой зону прогрева продуктов газификации. Принимается, что протяженность реакционной зоны в газе мала сравнительно с размерами зоны прогрева, так что экзотермические химические реакции в газе протекают в бесконечно тонкой области вблизи плоскости  $x_*$ , являющейся фронтом пламени в газе.

Величина тепловыделения в газовой реакционной зоне  $Q_2$  предполагается зависящей от давления. Область  $x > x_*$  (область 4) заполнена газообразными продуктами сгорания, нагретыми до температуры горения  $T_*$ .

Нестационарность процессов в каждой из выделенных областей зоны горения может быть охарактеризована временами установления, которые по приближенным оценкам [10] для областей 1—4 равны соответственно:  $\tau_1 \approx 0.3 \cdot 10^{-3}$  сек,  $\tau_2 \approx 7 \cdot 10^{-6}$  сек,  $\tau_3 \approx 2 \cdot 10^{-5}$  сек,  $\tau_4 \approx 10^{-6}$  сек. Видно, что для акустических колебаний частоты до  $10^4 - 10^5$  гц должна быть учтена нестационарность процессов в зоне прогрева в газе.



Фиг. 1

## 2. Уравнения в зоне прогрева в газе.

В области прогрева газообразных продуктов разложения  $k$ -фазы от  $T_s'$  до  $T_*'$  между поверхностью  $k$ -фазы ( $x = 0$ ) и фронтом пламени ( $x = x_*$ ) уравнения сохранения массы, импульса и энергии имеют вид

$$(2.1) \quad \partial \rho_2' / \partial t + \partial m' / \partial x = 0$$

$$(2.2) \quad \partial u_2' / \partial t + u_2' \partial u_2' / \partial x = - (1 / \rho_2') (\partial p' / \partial x)$$

$$(2.3) \quad \rho_2' T_2' \left( \frac{\partial s'}{\partial t} + u_2' \frac{\partial s'}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_2 \frac{\partial T_2'}{\partial x} \right) = 0$$

Здесь и далее величины, зависящие от времени, отмечены штрихами;  $\rho_2'$ ,  $T_2'$ ,  $u_2'$ ,  $s'$  — плотность, температура, скорость, энтропия газа,  $p'$  — давление,  $m' = \rho_2' u_2'$  — массовая скорость. Теплоемкости  $c_p$ ,  $c_v$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda_2$  продуктов газификации считаются постоянными. Термодинамические характеристики продуктов газификации удовлетворяют уравнению состояния идеального газа

$$(2.4) \quad p' = (R\mu^{-1}) \rho_2' T_2'$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu$  — молекулярный вес.

В стационарных условиях из (2.1) — (2.3) следует:

$$(2.5) \quad dm/dx = 0, \quad m = \rho_2 u_2 = \text{const}$$

$$(2.6) \quad u_2 \frac{du_2}{dx} + \frac{1}{\rho_2} \frac{dp}{dx} = 0$$

$$(2.7) \quad \rho_2 u_2 T_2 \frac{ds}{dx} - \frac{d}{dx} \left( \lambda_2 \frac{dT_2}{dx} \right) = 0$$

Уравнение (2.6) преобразуется к виду

$$(2.8) \quad \frac{d \ln p}{dx} \left[ \frac{d \ln u_2}{dx} \right]^{-1} = - \gamma \frac{u_2^2}{c_2^2}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad c_2^2 = \gamma \frac{p}{\rho_2}$$

При горении конденсированных систем всегда выполняется неравенство  $u_2^2 / c_2^2 \ll 1$  (обычно  $u_2 / c_2 \sim 10^{-3}$ ), поэтому из (2.8) следует:

$$(2.9) \quad d \ln p / dx \ll d \ln u_2 / dx$$

Используя соотношение

$$\frac{ds}{dx} = \left( \frac{\partial s}{\partial T_2} \right)_p \frac{dT_2}{dx} + \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{T_2} \frac{dp}{dx} = \frac{c_p}{T_2} \frac{dT_2}{dx} - \frac{1}{\rho_2 T_2} \frac{dp}{dx}$$

вместо (2.7) с учетом (2.9) можно записать

$$(2.10) \quad \frac{d}{dx} \left( \lambda_2 \frac{dT_2}{dx} \right) - mc_p \frac{dT_2}{dx} = 0$$

Граничные условия для уравнения (2.10) на поверхности  $k$ -фазы ( $x = 0$ ) имеют вид

$$(2.11) \quad T_2(0) = T_s, \quad \lambda_2 \frac{dT_2}{dx} \Big|_{x=0} = mc_p T_s - mc_1 T_0 - mQ_1$$

Из (2.10), (2.11) для распределения температуры в прогретом слое газа получим

$$(2.12) \quad T_2(x) = \frac{c_1 T_0 + Q_1}{c_p} + \left( T_s - \frac{c_1 T_0 + Q_1}{c_p} \right) \exp \left( \frac{mc_p x}{\lambda_2} \right)$$

Координата фронта пламени, где достигается температура горения  $T_* = (c_1 T_0 + Q_1 + Q_2(p)) / c_p$  равна

$$(2.13) \quad x_*(T_*) = \frac{\lambda_2}{mc_p} \ln \frac{c_p T_* - c_1 T_0 - Q_1}{c_p T_s - c_1 T_0 - Q_1}$$

Формулы (2.5), (2.12), (2.13) описывают стационарные распределения потока массы и температуры в тепловом слое в газе, занимающем область между поверхностью конденсированной фазы  $x = 0$  (холодная граница теплового слоя) и фронтом пламени в газе  $x = x_*$  (горячая граница теплового слоя).

Поведение теплового слоя в газе при нестационарном горении определяется уравнениями (2.1) — (2.3). Проведем линеаризацию уравнений (2.1) — (2.3), полагая, что слабые гармонические возмущения давления  $p' = p + \delta p e^{i\omega t}$ ,  $\delta p / p \ll 1$  вызывают слабые изменения всех величин в зоне горения, такие что

$$f'(x, t) = f(x) + \delta f(x) e^{i\omega t}$$

где  $\delta f$  — амплитуда возмущения некоторой произвольной переменной характеристики зоны горения  $f'$ ,  $\delta f / f \ll 1$ .

После линеаризации уравнения (2.1) с учетом (2.4) получим

$$(2.14) \quad \frac{d\delta m}{dx} = \frac{i\omega \mu p}{RT_2^2(x)} \delta T_2 - \frac{i\omega \mu}{RT_2(x)} \delta p$$

Здесь  $T_2(x)$  — стационарное распределение температуры (2.12).

Линеаризованное уравнение движения (2.2) можно представить в виде

$$(2.15) \quad i\omega \frac{\lambda_2}{mc_p u_{20}} \frac{\delta u_2}{u_{20}} + \frac{u_2}{u_{20}} \frac{d(\delta u_2 / u_{20})}{d\eta} + \frac{\delta u_2}{u_{20}} \frac{d(u_2 / u_{20})}{d\eta} = \\ = - \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\rho_{20}}{\rho_2} \frac{d(\delta p / p_0)}{d\eta} + \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\rho_{20}^2}{\rho_2^2} \frac{\delta \rho_2}{\rho_{20}} \frac{d(p / p_0)}{d\eta}$$

Здесь  $u_{20}$ ,  $p_0$ ,  $\rho_{20}$  — стационарные значения скорости газа, давления и плотности в некоторой точке  $x_0$  зоны прогрева в газе, например на поверхности  $k$ -фазы  $x = 0$ ,  $\eta = mc_p x / \lambda_2$ ,  $M_0^2 = u_{20}^2 / (\gamma p_0 / \rho_{20})$ .

Оценивая с учетом (2.9) порядки членов в (2.15) получим, что в рассматриваемом случае с точностью до членов порядка  $M_0^2$  возмущение давления в тепловом слое в газе

$$(2.16) \quad \delta p = \text{const}$$

Выражая производные энтропии в (2.3) через производные температуры и давления и линеаризуя полученное уравнение с учетом (2.1), (2.4), (2.9), (2.16), можно получить

$$(2.17) \quad \frac{d}{dx} \left[ \lambda_2 \frac{d\delta T_2}{dx} - c_p T_2(x) \delta m - c_p m \delta T_2 \right] = \frac{i\omega m c_v}{R} \delta p$$

Уравнения (2.14), (2.17) для  $\delta m$  и  $\delta T_2$  описывают в линейном приближении тепломассообмен в прогретом слое газовой зоны горения при малых отклонениях от стационарного режима, вызванных гармоническими колебаниями давления с амплитудой  $\delta p$ , и являются основными уравнениями при расчете акустической проводимости в рамках принятой модели. Для решения этих уравнений необходимо сформулировать граничные условия на холодной и горячей границах теплового слоя.

**3. Граничные условия.** Требование непрерывности потока массы, температуры, потока энергии на поверхности газификации  $k$ -фазы приводит к следующим условиям:

$$(3.1) \quad x = 0: \quad \delta m = \delta m_1, \quad \delta T_2 = \delta T_s \\ \lambda_2 (d\delta T_2 / dx) = \lambda_1 \delta \varphi_s + (c_p - c_1) m_1 \delta T_s + (c_p - c_1) T_s \delta m_1$$

Здесь величины  $\delta T_s$ ,  $\delta m_1$ ,  $\delta \varphi_s$  связаны дополнительными соотношениями, которые должны быть определены из решения задачи о нестационарном распределении температуры в  $k$ -фазе.

Изменение температуры в прогретом слое  $k$ -фазы описывается уравнением

$$(3.2) \quad \rho_1 c_1 (\partial T_1' / \partial t) + m_1' c_1 (\partial T_1' / \partial x) = \lambda_1 (\partial^2 T_1' / \partial x^2)$$

с граничными условиями

$$(3.3) \quad T_1'(x = -\infty) = T_0, \quad T_1'(0) = T_s'$$

где  $T_1'$  — температура  $k$ -фазы,  $m_1'$  — массовая скорость горения. При записи (3.3) ширина реакционной зоны  $k$ -фазы предполагается малой ( $x_i \approx 0$ ), так что горячая граница зоны прогрева  $k$ -фазы (область 1) находится в точке  $x = 0$  и  $T_1'(x_i) = T_s'$ . В то же время при наличии реакций в  $k$ -фазе различие градиентов температуры на внутренней и внешней границах реакционной зоны  $k$ -фазы ( $\varphi_i$  и  $\varphi_s'$ ) пренебречь нельзя. Градиенты  $\varphi_i'$  и  $\varphi_s'$  связаны законом сохранения энергии в области 2

$$(3.4) \quad \lambda_1 \varphi_i' - \lambda_1 \varphi_s' = m_1' Q_1$$

Стационарное распределение температуры в прогретом слое  $k$ -фазы имеет вид

$$(3.5) \quad T_1(x) = T_0 + (T_s - T_0) \exp(m_1 c_1 x / \lambda_1)$$

Градиент температуры на горячей границе теплового слоя  $k$ -фазы равен

$$\varphi_i = \left. \frac{dT_1(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{m_1 c_1}{\lambda_1} (T_s - T_0)$$

Перестройка температурного профиля в тепловом слое  $k$ -фазы под действием слабых возмущений давления описывается линеаризованными уравнениями (3.2), (3.3)

$$(3.6) \quad \lambda_1 \frac{d^2 \delta T_1}{dx^2} - m_1 c_1 \frac{d \delta T_1}{dx} - i \omega \rho_1 c_1 \delta T_1 = \delta m_1 \frac{c_1^2 m_1}{\lambda_1} (T_s - T_0) \exp\left(\frac{m_1 c_1}{\lambda_1} x\right)$$

$$(3.7) \quad \delta T_1(x = -\infty) = 0, \quad \delta T_1(x = 0) = \delta T_s$$

Решение задачи (3.6), (3.7) имеет вид

$$(3.8) \quad \delta T_1(x) = \left[ \delta T_s - i \frac{m_1 c_1 \delta m_1}{\omega \lambda_1 \rho_1} (T_s - T_0) \right] \exp\left(\frac{m_1 c_1}{2 \lambda_1} \beta_1 x\right) + \\ + i \frac{m_1 c_1 \delta m_1}{\omega \lambda_1 \rho_1} (T_s - T_0) \exp\left(\frac{m_1 c_1}{\lambda_1} x\right) \\ \beta_1 = 1 + \sqrt{1 + 4i \Omega_1}, \quad \Omega_1 = (\lambda_1 \rho_1 \omega) / (c_1 m_1^2)$$

Дифференцируя (3.8) и полагая  $x = 0$ , получим связь между возмущениями температуры  $\delta T_s$ , потока массы  $\delta m_1$  и градиента температуры  $\delta \varphi_i$  на границе прогретого слоя и реакционной зоны  $k$ -фазы

$$(3.9) \quad \frac{i(2 - \beta_1)}{2 \Omega_1} \frac{\delta m_1}{m_1} + \frac{\beta_1}{2} \frac{\delta T_s}{T_s - T_0} - \frac{\delta \varphi_i}{\varphi_i} = 0$$

После линеаризации (3.4) получим

$$(3.10) \quad \lambda_1 \delta \varphi_i - \lambda_1 \delta \varphi_s = Q_1 \delta m_1$$

Еще одно соотношение между  $\delta T_s$ ,  $\delta m_1$  и  $\delta \varphi_i$  определяется из приближенного анализа процессов в тонкой безынерционной реакционной зоне  $k$ -фазы. Предполагается, что в реакционном слое  $k$ -фазы протекает химическая реакция нулевого порядка. Для температуры в этой зоне можно записать

$$(3.11) \quad \lambda_1 (d^2 T_1 / dx^2) - m_1 c_1 (dT_1 / dx) + \rho_1 Q_1 \Phi_1(T_1) = 0$$

$$(3.12) \quad x = x_i, T_1 = T_i, \varphi = \varphi_i \\ x = 0, T_1 = T_s, \varphi = \varphi_s$$

Здесь  $\Phi_1(T_1) = B_1 \exp(-E_1 / RT_1)$  — зависимость скорости химической реакции от температуры,  $Q_1$  — тепловыделение, при этом зависимость всех величин в (3.11) от времени будет определяться временной зависимостью граничных условий.

Приближенно интегрируя (3.11), (3.12), можно получить (например, [11])

$$(3.13) \quad \lambda_1 \varphi_i^2 - \lambda_1 \varphi_s^2 = \frac{2 \rho_1 Q_1 B_1 \lambda_1 R T_s^2}{E_1} \exp\left(-\frac{E_1}{RT_s}\right)$$

Линеаризуя (3.13) и используя (3.10), установим связь между амплитудами возмущений массовой скорости газификации  $\delta m_1$ , температуры поверхности  $\delta T_s$  и градиента температуры на границе реакционной зоны и теплового слоя  $k$ -фазы  $\delta \varphi_i$  в виде

$$(3.14) \quad \frac{\delta \varphi_i}{\varphi_i} + (1 - q) \frac{\delta m_1}{m_1} - z_1 \frac{\delta T_s}{T_s - T_0} = 0 \\ q = \frac{Q_1}{c_1 (T_s - T_0)}, \quad z_1 = \frac{\lambda_1 \rho_1 B_1}{m_1^2 c_1} \exp\left(-\frac{E_1}{RT_s}\right)$$

Воспользовавшись формулами (3.9), (3.10), (3.14), граничные условия (3.1) для функций  $\delta m(x)$  и  $\delta T_2(x)$  можно представить в виде

$$(3.15) \quad x = 0: \delta m = \delta m_1, \quad \delta T_2 = G_1 \delta m_1, \quad d \delta T_2 / dx = G_3 \delta m_1$$

$$G_1 = \frac{T_s - T_0}{m_1} \left[ \frac{i(2 - \beta_1)}{2\Omega_1} + 1 - q \right] \left[ z_1 - \frac{\beta_1}{2} \right]^{-1}$$

$$G_3 = \frac{m_1 c_1}{\lambda_2} \left( z_1 - 1 + \frac{c_p}{c_1} \right) G_1 - \frac{c_1 (T_s - T_0)}{\lambda_2} \left[ 1 + \frac{(c_1 - c_p) T_s}{c_1 (T_s - T_0)} \right]$$

Граничные условия на холодной границе газовой зоны (3.15) содержат возмущение массовой скорости газификации  $\delta m_1$ , поэтому решения обыкновенных дифференциальных уравнений (2.14), (2.17) с условиями (3.15) также будут содержать величину  $\delta m_1$ , для определения которой должны быть использованы условия на горячей границе газовой зоны прогрева.

Перейдем к выводу граничных условий на фронте пламени в газе, являющемся горячей границей зоны прогрева и отделяющем продукты сгорания от теплового слоя в газе. В стационарных условиях координата фронта пламени  $x_*$  определяется формулой (2.13), в нестационарных условиях положение фронта пламени зависит от времени ( $x' = x'(t)$ ).

Считая, что при малых отклонениях от стационарного режима горения остается справедливой стационарная зависимость массовой скорости горения  $m_*$  от термодинамических условий на фронте пламени в газе, можно записать

$$(3.16) \quad \frac{\delta m_*}{m_*} = n \frac{\delta p}{p} + \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{\delta T_*}{T_*}$$

$$n = \left( \frac{\partial \ln m_*}{\partial \ln p} \right)_{T_*}, \quad \varepsilon = \left( \frac{\partial \ln m_*}{\partial T_*} \right)_p (T_s - T_0), \quad \tau = \frac{T_s - T_0}{T_*}$$

Параметры  $n$  и  $\varepsilon$  могут быть установлены из теоретической или экспериментальной стационарной зависимости  $m_* = m_*(p, T_*)$ . В стационарном режиме горения  $m_1 = m = m_* = \text{const}$ . В нестационарных условиях поток массы через фронт пламени  $m'$  отличается от массовой скорости горения в газе  $m_*$ . На фронте пламени  $x_*(t)$  выполняется соотношение

$$(3.17) \quad m_*' = m'(x_*) - \rho_*' dx_*' / dt$$

После линеаризации (3.17) получим формулу, связывающую возмущение массовой скорости горения в газе  $\delta m_*$  с возмущением массовой скорости газа на фронте пламени  $\delta m(x_*)$  и возмущением положения фронта пламени

$$(3.18) \quad \delta m_* = \delta m(x_*) - i\omega \rho_* \delta x_*$$

Используя определение фронта пламени в газе как поверхности, на которой выделяется тепло  $Q_2$ , запишем закон сохранения энергии на фронте пламени в нестационарных условиях в виде

$$(3.19) \quad -m_*' Q_2(p') + \lambda_2 \frac{dT_2'}{dx} \Big|_{x_*'} = \lambda_2 \frac{dT_*'}{dx} \Big|_{x_*'}$$

В установившемся режиме горения продукты сгорания имеют постоянную температуру  $T_*$  и правая часть уравнения (3.19) равна нулю. В рассматриваемых нестационарных условиях в продуктах сгорания появляются неоднородности температуры и других величин, связанные с распространением гармонических, акустических и энтропийных волн вида  $\exp(i\omega t - ikx)$ . Волновые числа этих волн равны (например, [12])

$$(3.20) \quad k^- = i \frac{\omega}{c_*} (1 + M_*), \quad k^+ = -i \frac{\omega}{c_*} (1 - M_*) \quad \left( M_* = \frac{u_*}{c_*} \right)$$

$$k^{(0)} = \frac{\omega}{u_*} \frac{1 - \sqrt{1 + 4i\Omega_2}}{2\Omega_2}, \quad \Omega_2 = \frac{\lambda_2 \rho_* \omega}{c_p m_*^2}$$

Индексами плюс, минус отмечены величины, относящиеся к акустическим волнам, распространяющимся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси  $x$ , нулем — величины в энтропийной волне. Записанные с точностью до членов порядка  $M_*^2$  соотношения между возмущениями в акустических и энтропийных волнах имеют вид

$$(3.21) \quad \delta u_*^\pm = \pm \frac{c_*}{\gamma} \frac{\delta p^\pm}{p}, \quad \frac{\delta \rho_*^\pm}{\rho_*} = \frac{1}{\gamma} \frac{\delta p^\pm}{p}, \quad \frac{\delta T_*^\pm}{T_*} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\delta p^\pm}{p}$$

$$\delta u_*^{(0)} = 0, \quad \delta p^{(0)} = 0, \quad \delta T_*^{(0)} / T_* = - \delta \rho_*^{(0)} / \rho_*$$

Возмущения всех термодинамических параметров и скорости газа в продуктах сгорания представляют собой сумму возмущений, переносимых каждой из волн, в частности

$$(3.22) \quad \delta p = \delta p^+ + \delta p^-, \quad \delta m(x_*) = \rho_* (\delta u_*^+ + \delta u_*^-) + u_* (\delta \rho_*^+ + \delta \rho_*^- + \delta \rho_*^{(0)}), \quad \delta T_* = \delta T_*^+ + \delta T_*^- + \delta T_*^{(0)}$$

Учитывая, что возмущения температуры имеют волновой характер, из (3.22) получим

$$(3.23) \quad d\delta T_* / dx = k^+ \delta T_*^+ + k^- \delta T_*^- + k^{(0)} \delta T_*^{(0)}$$

Линеаризуя (3.19) с учетом (2.12), (3.20) — (3.23), найдем

$$(3.24) \quad \delta m_* Q_2(p) + m \frac{c_p T_*}{p} \alpha \delta p - \lambda_2 \frac{d\delta T_2}{dx} \Big|_{x_*} - \frac{m^2 c_p}{\lambda_2} Q_2(p) \delta x_* =$$

$$= - \lambda_2 k^{(0)} \left( \delta T_* - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T_*}{p} \delta p \right)$$

Величина

$$\alpha = (dQ_2 / dp) (p / c_p T_*)$$

характеризует изменение полноты сгорания при изменениях давления.

Воспользовавшись определением температуры горения  $T_*' = T_2'(x_*')$  и формулой (2.12), получим

$$(3.25) \quad \delta T_* = \delta T_2(x_*) + (m Q_2(p) \lambda_2^{-1}) \delta x_*$$

Исключая из (3.16), (3.18), (3.24), (3.25)  $\delta m_*$ ,  $\delta T_*$  и  $\delta x_*$ , получим граничное условие для функций  $\delta m(x)$  и  $\delta T_2(x)$  на поверхности  $x = x_*$

$$(3.26) \quad \left( Q_2(p) + \frac{A}{m} \right) \delta m(x_*) + \left( \lambda_2 k^{(0)} - \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{A}{T_*} \right) \delta T_2(x_*) - \lambda_2 \frac{d\delta T_2}{dx} \Big|_{x_*} +$$

$$+ \left( \frac{m c_p T_*}{p} \alpha - \lambda_2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T_*}{p} k^{(0)} - n \frac{A}{p} \right) \delta p = 0$$

$$A = (m k^{(0)} - i \omega \rho_* - m^2 c_p / \lambda_2) \left( \frac{i \omega p_*}{m} + \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{m Q_2}{\lambda_2 T_*} \right)^{-1} Q_2$$

Условие (3.26) позволяет определить значение возмущения массовой скорости  $\delta m_1$  на поверхности  $k$ -фазы, являющееся собственным значением задачи, и тем самым получить полное решение задачи о нестационарной перестройке теплового слоя в газе под действием возмущения давления  $\delta p$ .

**4. Результаты расчетов и обсуждение.** Воспользовавшись соотношениями (3.21), (3.22), для акустической проводимости горячей поверхности конденсированной системы из (1.1) можно получить

$$(4.1) \quad \zeta = - \gamma \frac{u_*}{c_*} \left[ \frac{\delta m(x_*)}{m} / \frac{\delta p}{p} + \frac{\delta T_*}{T_*} / \frac{\delta p}{p} - 1 \right]$$

Выражая далее  $\delta T_*$  через  $\delta m(x_*)$  и  $\delta T_2(x_*)$ , с помощью формул (3.16), (3.18), (3.25) из (4.1) получим

$$(4.2) \quad \zeta = -\gamma \frac{\omega_*}{c_*} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\Lambda} \right) \frac{\delta m(x_*)}{m} / \frac{\delta p}{p} + \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\tau \Lambda} \right) \frac{\delta T_2(x_*)}{T_*} / \frac{\delta p}{p} - \frac{n}{\Lambda} - 1 \right],$$

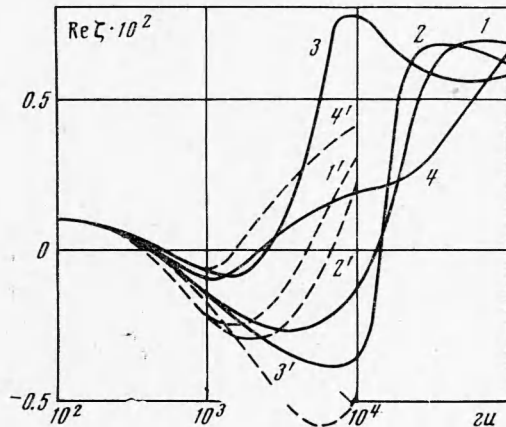
$$\Lambda = \frac{i \Omega_2 c_p T_*}{Q_2(p)} + \frac{\varepsilon}{\tau}$$

В (4.2) величины

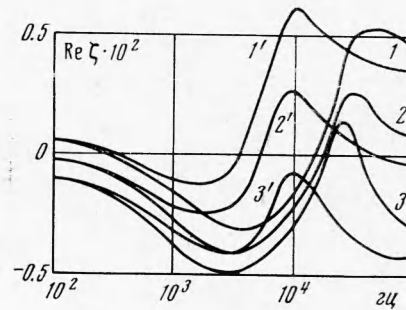
$$\frac{\delta m(x_*)}{m} / \frac{\delta p}{p}, \quad \frac{\delta T_2(x_*)}{T_*} / \frac{\delta p}{p}$$

определяются из решения задачи (2.14), (2.17), (3.15), (3.26). При отражении от поверхности горения конденсированной системы акустическая волна усиливается, если действительная часть акустической проводимости  $Re \zeta$  отрицательная.

Расчет действительной части акустической проводимости  $Re \zeta$  сводился к численному интегрированию системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в действительных переменных



Фиг. 2



Фиг. 3

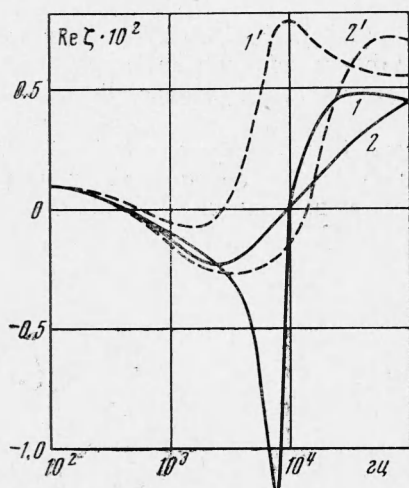
на отрезке  $[0, x_*]$  с граничными условиями (3.15), (3.26) на концах отрезка. Интегрирование, проводившееся методом Рунге — Кутты, начиналось из точки  $x = 0$  с условиями (3.15), по достижении правого конца  $x = x_*$  проверялось выполнение условия (3.26).

Если условие (3.26) не удовлетворялось, значение величины  $\delta m_1$  в  $x = 0$  менялось и интегрирование повторялось для нового значения  $\delta m_1$ . Ниже приводятся результаты расчета зависимости  $Re \zeta$  от частоты по формуле (4.2) при следующих значениях параметров:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 5 \cdot 10^{-4}$  кал/сек·см·°К,  $c_1 = c_p = 0.33$  кал/г·°К,  $\rho_1 = 1.6$  г/см<sup>3</sup>,  $m = 2$  г/сек·см<sup>2</sup>,  $p = 50$  атм,  $\mu = 29$ ,  $T_0 = 300^\circ$  К,  $T_s = 600^\circ$  К,  $\varepsilon = 1$ ,  $\gamma = 1.25$ ,  $z_1 = 10$ ,  $Q_1 + Q_2 = 800$  кал/г. Вместо величины  $n$  использовался параметр  $\nu = (\partial \ln m_* / \partial \ln p)_{T_0}$ , связанный с  $n$  соотношением  $\nu = n + \varepsilon \tau^{-1} \alpha$ . При расчетах принималось  $\nu = 0.67$ .

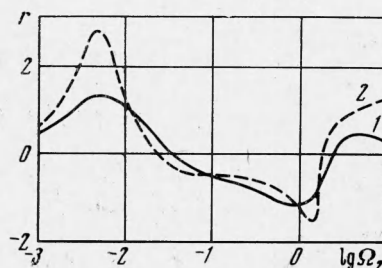
На фиг. 2 сплошными линиями показана зависимость  $Re \zeta$  от частоты для различных значений тепловыделения в  $k$ -фазе  $Q_1(\alpha = 0)$ . Для сравнения штриховыми кривыми показаны результаты расчета зависимости  $Re \zeta$  от частоты при тех же значениях параметров, но без учета инерционности газовой фазы [2]. Кривым 1, 1' соответствует значение  $Q_1 = 20$  кал/г,



2,2' — 40 кал/г, 3,3' — 80 кал/г. Кривые 4,4' получены для случая эндотермической реакции в  $k$ -фазе с  $Q_1 = -80$  кал/г. Видно, что влияние инерционности газовой фазы становится заметным, начиная с частот порядка  $10^3$  гц. При этом в зависимости от величины тепловыделения в  $k$ -фазе учет инерционности газовой фазы может приводить как к увеличению, так и к уменьшению склонности конденсированной системы к акустической неустойчивости горения. Инерционность газовой зоны приводит также к появлению максимума  $Re\zeta$  при больших частотах, соответствующего наибольшему ослаблению акустических волн при отражении, который с ростом  $Q_1$  сдвигается в сторону более низких частот.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 3 показана зависимость  $Re\zeta$  от частоты для различных значений величины  $\alpha$  (кривые 1,1' соответствуют  $\alpha = 0.1$ , 2,2' — 0.3, 3,3' — 0.5) и тепловыделения в  $k$ -фазе  $Q_1$  (кривые 1 — 3 соответствуют  $Q_1 = 20$  кал/г, 1' — 3' — 80 кал/г). С ростом  $\alpha$  склонность конденсированной системы к усилению акустических волн давления возрастает во всей области частот.

В данной работе при расчете величины  $Re\zeta$  использовалось граничное условие на поверхности конденсированной фазы, которое в квазистационарном приближении учитывает протяженность зоны химической реакции в  $k$ -фазе, приводящей к газификации. В ряде других работ (например, [13]) принимается, что переход  $k$ -фазы в газ является поверхностным процессом, массовая скорость которого определяется законом

$$m_1 \sim \exp(-E_s / RT_s)$$

Для этой модели вместо условия на поверхности конденсированной фазы (3.14) получим

$$(4.3) \quad \delta m_1 / m_1 = (E_s / RT_s^2) \delta T_s$$

Для сравнения на фиг. 4 приведены зависимости  $Re\zeta$  от частоты, рассчитанные с использованием условий на поверхности конденсированной фазы в форме (3.14) — сплошные линии и в форме (4.3) — штриховые линии. Кривым 1,1' соответствует значение  $Q_1 = 80$  кал/г, кривым 2,2' — 20 кал/г.

В [9] выполнен расчет акустической проводимости горячей поверхности конденсированной системы с учетом пространственной протяженности зоны одноступенчатой химической реакции в газе. На фиг. 5 приведены зависимости действительной части акустической проводимости горячей поверхности  $r = -c_* Re \zeta / \gamma u_*$  от  $\lg \Omega_2$ , рассчитанные в [9] (штриховая кривая 2) и в данной работе (сплошная кривая 1) при одинаковых значениях параметров конденсированной системы.

Видно, что учет распределенности химической реакции в газе приводит к более выраженным экстремумам на кривой зависимости акустической проводимости от частоты. Наблюдается хорошее качественное и удовлетворительное количественное соответствие хороших кривых.

В заключение отметим, что в проведенном расчете используются упрощенная схема и приближенные значения кинетических констант химических реакций. Поэтому результаты расчетов могут применяться лишь для выявления качественных особенностей зависимости акустической проводимости от различных характеристик процесса горения (в частности, от тепловыделения в  $k$ -фазе), что соответствует современному состоянию экспериментальных исследований в области акустической неустойчивости горения.

Поступила 9 I 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Williams F. A. Response of a burning solid to small — amplitude pressure oscillations. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 11.
2. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. О взаимодействии акустических волн с горячей поверхностью конденсированных систем. ПМТФ, 1966, № 2.
3. Krier H., T'ien J. S., Sirignano W. A., Summerfield M. Nonsteady burning phenomena of solid propellants: theory and experiments. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 2.
4. Culick F. E. A review of calculations for unsteady burning of a solid propellant. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 12.
5. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С., Тульских В. Е. Об акустической проводимости горячей поверхности пороха. ПМТФ, 1969, № 5.
6. Гостинцев Ю. А., Суханов Л. А., Погил П. Ф. К теории нестационарного горения пороха. Горение при гармонически меняющемся давлении. ПМТФ, 1971, № 5.
7. Hart W. R., McClure F. T. Combustion instability: acoustic interaction with a burning propellant surface. J. Chem. Phys., 1959, vol. 30, No. 6.
8. Волков В. П., Медведев Ю. И. О взаимодействии акустических волн с горячей поверхностью твердых топлив при повышенных частотах. ПМТФ, 1969, № 1.
9. T'ien J. S. Oscillatory burning of solid propellants including gas phase time lag. Combust. Sci. and Technol., 1972, vol. 5, No. 2.
10. Мак-Клур Ф. Т., Харт Р. В., Бёрд Дж. Ф. Ракетные двигатели твердого топлива как источники акустических колебаний. В кн. «Исследование ракетных двигателей на твердом топливе». М., Изд-во иностр. лит., 1963.
11. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. К теории стационарной скорости распространения фронта экзотермической реакции в конденсированной среде. ПМТФ, 1965, № 3.
12. Hart R. W., Cantrell R. H. Amplification and attenuation of sound by burning propellants. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 2.
13. Denison M. R., Baum E. A simplified model of unstable burning in solid propellants. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 8.