УДК 534.21

АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

М. Б. Бабенков

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
E-mail: babenkov.michail@gmail.com

Получены дисперсионные соотношения для связанной задачи термоупругости, содержащей уравнение теплопроводности гиперболического типа, проведен их асимптотический анализ. Построены графики зависимостей волнового числа и характеристики скорости затухания колебаний от частоты, проведено их сравнение с аналогичными графиками зависимостей в классической модели.

Ключевые слова: гиперболическая термоупругость, дисперсионные соотношения, характеристика скорости затухания колебаний, волновое число, асимптоты.

Введение. При решении большинства задач о переносе тепла достаточно точные результаты получены с помощью уравнения теплопроводности, основанного на законе Фурье:

$$\boldsymbol{h} = -\lambda \nabla T, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{h}$ — вектор теплового потока; λ — теплопроводность; ∇ — оператор Гамильтона; T — температура. С использованием выражения (1) получается классическое уравнение переноса тепла параболического типа

$$c_v \rho \dot{T} = \lambda\, \Delta T,$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме; ρ — плотность материала; точка обозначает производную по времени; Δ — оператор Лапласа.

Данному уравнению свойственны некоторые парадоксы [1]: бесконечная скорость распространения тепла, бесконечный поток тепла в начальный момент времени и бесконечная скорость распространения максимальной завихренности в связанной задаче термогидродинамики о диффузии вихря на основе уравнений Навье — Стокса [2].

Для получения достоверных результатов в задачах о нагревании металлов короткими лазерными импульсами [3], о движении источников тепла с высокими скоростями [4] и о быстром движении границ фазового перехода [5] вместо закона (1) используется гиперболическое уравнение теплопереноса (модель Максвелла — Каттанео)

$$\tau_h \ddot{T} + \dot{T} - \lambda\, \Delta T = 0,$$

где τ_h — время релаксации теплового потока. Для описания переноса тепла также применяются нелинейная модель теплопроводности параболического типа со степенной зависимостью теплопроводности от температуры, обобщенная модель Максвелла — Каттанео с учетом теплового потока и двухтемпературные модели (см. [6]).

Модель теплопереноса Максвелла — Каттанео создана на основе обобщенного закона Фурье

$$\tau_h \dot{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{h} = -\lambda\, \nabla T.$$

Эмпирическая константа τ_h характеризует скорость распространения тепловых возмущений в среде и указывает на то, что при появлении или исчезновении градиента температуры ∇T тепловой поток исчезает и возникает не мгновенно. Согласно представлениям молекулярно-кинетической теории релаксация теплового потока зависит от среднего расстояния и среднего времени пробега частиц между двумя их последовательными столкновениями и изменяется в интервале от 10^{-14} до 10^{-9} с для различных материалов в зависимости от их структуры и агрегатного состояния.

В случае если в уравнениях связанной задачи термоупругости учитывается параметр τ_h, получается модель для термоупругой среды с учетом релаксации теплового потока [7]. В других моделях для сред скорость распространения термоупругих возмущений конечна [8, 9] (свойства материала зависят от температуры).

1. Основные уравнения связанной задачи термоупругости. Уравнение движения в локальной форме имеет вид

$$\nabla \cdot \tau + \rho \boldsymbol{f} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}, \tag{2}$$

где τ — тензор напряжений; $\boldsymbol{f}$ — вектор массовой плотности внешних сил; $\boldsymbol{u}$ — вектор перемещений. Определяющее уравнение, учитывающее температурные эффекты, записывается следующим образом:

$$\tau = (K - (2/3)G)\varepsilon E + 2Ge - \alpha KTE. \tag{3}$$

Здесь K — изотермический модуль объемного сжатия; G — модуль сдвига; ε — след тензора деформаций; E — единичный тензор; α — температурный коэффициент объемного расширения; T — температура; e — тензор деформаций. Геометрические соотношения имеют вид

$$\varepsilon = (\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})/2, \qquad \varepsilon = \operatorname{tr} e = \nabla \cdot \boldsymbol{u}. \tag{4}$$

С учетом (3), (4) уравнение движения (2) можно представить в форме

$$G\Delta \boldsymbol{u} + (K + G/3)\nabla e - \alpha K \nabla T = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}. \tag{5}$$

Классическое уравнение теплопроводности в связанной задаче термоупругости имеет вид

$$\Delta T - \frac{\rho c_v}{\lambda}\,\dot{T} = \frac{\alpha K T^*}{\lambda}\,\dot{\varepsilon}, \tag{6}$$

где T^* — температура, при которой проводились измерения констант. Таким образом, уравнения (5), (6) представляют собой классическую формулировку связанной задачи термоупругости [10].

Уравнение теплопроводности с учетом релаксации теплового потока в связанной задаче термоупругости записано в виде

$$\Delta T - \frac{\rho c_v}{\lambda}\,[\dot{T} + \tau_h \ddot{T}] = \frac{\alpha K T^*}{\lambda}\,[\dot{\varepsilon} + \tau_h \ddot{\varepsilon}]. \tag{7}$$

Таким образом, уравнения (5), (7) являются уравнениями связанной задачи термоупругости, содержащими уравнение теплопроводности гиперболического типа.

Поскольку сдвиговые колебания не зависят от температуры [10], далее исследуются только объемные колебания термоупругой среды. Вычислив дивергенцию уравнения (5), получаем уравнение динамики для объемных деформаций

$$(K + (4/3)G)\Delta\varepsilon - \alpha K \Delta T = \rho \ddot{\varepsilon}. \tag{8}$$

Итак, формулировка задачи об объемных термоупругих колебаниях в классической постановке дается уравнениями (6), (8), а с учетом конечного времени релаксации теплового потока — уравнениями (7), (8).

2. Анализ дисперсионных соотношений. Рассмотрим задачу о распространении термоупругих волн в направлении координаты s. Преобразуем систему (7), (8) в одно дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial s^4} - (A_1 + A_2)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial s^2} - A_3\,\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial s^2} + A_1A_3(1 - A_4)\,\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial t^3} + A_1A_2(1 - A_4)\,\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial t^4} = 0. \qquad (9)$$

Введем обозначения

$$A_1 = \frac{\rho}{K + 4G/3}, \qquad A_3 = \frac{1}{\lambda}\Big(\rho c_v + \frac{\alpha^2 KT^*}{1 + 4GK^{-1}/3}\Big),$$
$$A_2 = \tau_h A_3, \qquad A_4 = \frac{1}{1 + \rho c_v(1 + 4GK^{-1}/3)/(\alpha^2 KT^*)}. \qquad (10)$$

Все величины в (10) строго положительны. Параметр A_4 изменяется в интервале от 0 до 1. Для твердых тел и жидкостей $A_4 \ll 1$, для газов $A_4 > 1/2$. Параметр A_1 характеризует скорость распространения акустических волн в среде ($c_a = 1/\sqrt{A_1(1 - A_4)}$), параметр A_2 — скорость распространения тепловых волн ($C_r = 1/\sqrt{A_2}$).

Формулировка классической связанной задачи термоупругости получается из (9) при $A_2 = 0$, т. е. при равенстве нулю времени релаксации теплового потока:

$$\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial s^4} - A_1\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial s^2} - A_3\,\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial s^2} + A_1A_3(1 - A_4)\,\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial t^3} = 0. \qquad (11)$$

Различием уравнений (9) и (11) является то, что уравнение (9) содержит производную по времени четвертого порядка.

Для получения дисперсионных соотношений будем искать решение уравнения (9) в виде экспоненты, затухающей по координате:

$$\varepsilon(s, t) = \varepsilon_0\,\mathrm{e}^{(-\gamma + i\delta)s}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad (12)$$

(γ — характеристика скорости затухания колебаний; δ — волновое число; ω — частота).

Подставим выражение (12) в (9). Выделив из полученного уравнения вещественную и мнимую части, находим следующие дисперсионные соотношения:

$$\gamma^4 - 6\gamma^2\delta^2 + \delta^4 + 2A_3\gamma\delta\omega + (A_1 + A_2)(\gamma^2 - \delta^2)\omega^2 - A_1A_2(-1 + A_4)\omega^4 = 0,$$
$$-4\gamma^3\delta + 4\gamma\delta^3 + A_3\gamma^2\omega - 2(A_1 + A_2)\gamma\delta\omega^2 - A_3\omega(\delta^2 + A_1(-1 + A_4)\omega^2) = 0.$$

Проведя замену переменных

$$x = \frac{-\delta^2 + \gamma^2}{A_1\omega^2}, \qquad y = \frac{\delta\gamma}{A_1\omega^2},$$

получаем выражения для зависимостей от параметра x частоты колебаний ω:

$$\omega(x) = \frac{A_3}{A_1}\,\frac{1 - A_4 + x}{(1 + A + 2x)2y}, \qquad A = \frac{A_2}{A_1}, \qquad (13)$$

характеристики скорости затухания колебаний γ:

$$\gamma(x) = \frac{y\omega\sqrt{2A_1}}{\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + 4y^2}}} \qquad (14)$$

и волнового числа δ:

$$\delta(x) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\,\sqrt{A_1(-x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\,)}. \qquad (15)$$

Вспомогательный параметр y в уравнениях (13)–(15) выражается через x по формуле

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-A_4+x)(AA_4-(x+1)(x+A))}{A+A_4+x}}\,. \tag{16}$$

Правые части выражений (13)–(15) линейно зависят от параметра A_3, следовательно, изменение этого параметра обусловливает только изменение масштаба графиков по осям. В случае если A_2 стремится к нулю, можно получить аналогичные выражения для классической задачи термоупругости.

2.1. *Области определения дисперсионных зависимостей.* Для построения графиков дисперсионных соотношений (13)–(15) необходимо найти значения параметра x, при которых исследуемые функции являются вещественными и положительными. Для этого найдем область определения функции (16). У данной функции имеется три корня

$$x_1 = (-1-A+\sqrt{1-2A+A^2+4AA_4}\,)/2; \tag{17}$$

$$x_2 = (-1-A-\sqrt{1-2A+A^2+4AA_4}\,)/2; \tag{18}$$

$$x_3 = -1+A_4 \tag{19}$$

и одна вертикальная асимптота

$$x_4 = -A-A_4. \tag{20}$$

Нетрудно показать, что $x_2 < x_3 < x_1$ и $x_2 < x_4 < x_1$ при любых допустимых значениях констант (10). При этом возможны два варианта расположения корней x_3 и x_4: 1) если $A < 1-2A_4$, то $x_3 < x_4$ (первый вариант); 2) если $A > 1-2A_4$, то $x_4 < x_3$ (второй вариант).

В классической теории термоупругости, т. е. в случае $A = 0$, условия порядка следования корней x_3 и x_4 имеют вид $A_4 < 1/2$ и $A_4 > 1/2$ соответственно.

Подкоренное выражение в (16) принимает положительные значения на двух промежутках, один из которых содержит точку x_1, а другой — точку x_2. Эти промежутки соответствуют разным ветвям кривых дисперсионных зависимостей.

2.2. *Углы наклона касательных к дисперсионным кривым в начале координат.* Анализ углов наклона касательных к дисперсионным кривым в начале координат позволяет отличить акустические ветви от тепловых. Данные углы наклона определяются на основе вычисления предельного значения производных функции $\delta(\omega)$, в случае когда ее аргумент стремится к нулю. При этом параметр x стремится к одному из значений (17)–(20), а именно к тому значению, при котором функции $\omega(x)$ и $\delta(x)$ обращаются в нуль. Известно, что акустическая ветвь $\delta(\omega)$ выходит из начала координат под углом, тангенс которого равен величине, обратной скорости распространения звука в среде $\sqrt{A_1(1-A_4)}$, что является ее отличительным признаком. Проведенный анализ показал следующее.

В первом варианте ($A < 1-2A_4$) промежуток (x_2, x_3) соответствует акустическим ветвям, а промежуток (x_4, x_1) — тепловым ветвям (рис. 1, 2); во втором варианте ($A > 1-2A_4$) промежуток (x_2, x_4) соответствует тепловым ветвям, а промежуток (x_3, x_1) — акустическим ветвям (рис. 3, 4).

Акустические ветви зависимостей $\gamma(\omega)$ и $\gamma(\delta)$ выходят из начала координат под нулевым углом по отношению к оси ω, а тепловые ветви зависимостей $\delta(\omega)$ и $\gamma(\omega)$ — под прямым углом по отношению к оси ω. Тепловая ветвь зависимости $\gamma(\delta)$ выходит из начала координат под углом $\pi/4$. Полученные значения углов не зависят от параметра A, поэтому они одинаковы для гиперболической и классической теорий термоупругости.

2.3. *Горизонтальные асимптоты.* Графики зависимостей $\gamma(\omega)$ и $\gamma(\delta)$ имеют горизонтальные асимптоты, определяемые с помощью вычисления предела функций $\gamma(\omega)$ и $\gamma(\delta)$

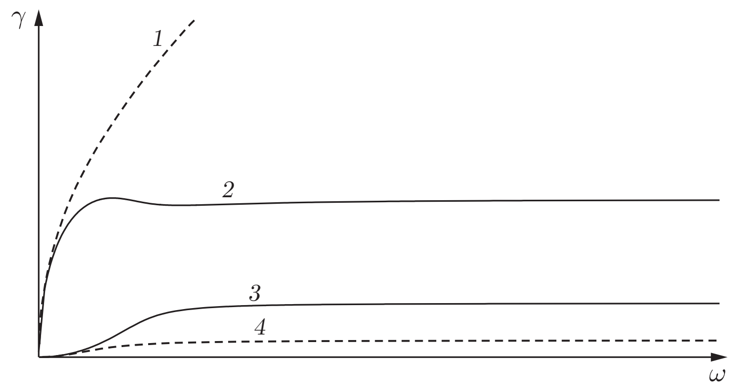

Рис. 1. Качественная зависимость характеристики скорости затухания γ от частоты ω для первого варианта расположения корней:
1 — тепловая ветвь, соответствующая классической теории термоупругости; *2* — тепловая ветвь, соответствующая гиперболической теории термоупругости; *3* — акустическая ветвь, соответствующая гиперболической теории термоупругости; *4* — акустическая ветвь, соответствующая классической теории термоупругости

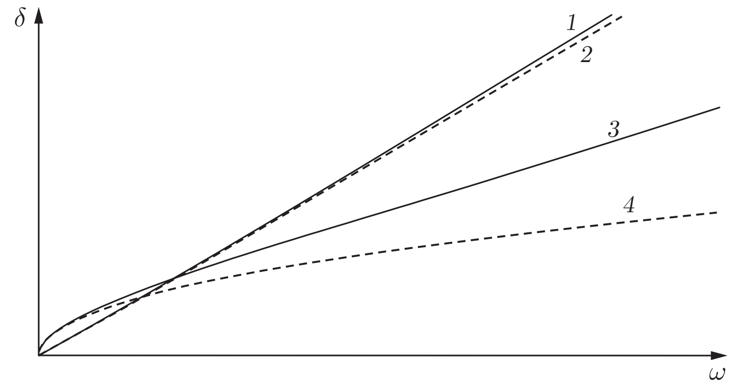

Рис. 2. Качественная зависимость волнового числа δ от частоты ω для первого варианта расположения корней:
1 — акустическая ветвь, соответствующая гиперболической теории термоупругости; *2* — акустическая ветвь, соответствующая классической теории термоупругости; *3* — тепловая ветвь, соответствующая гиперболической теории термоупругости; *4* — тепловая ветвь, соответствующая классической теории термоупругости

при стремлении параметра x к значениям (17)–(20), при которых функции $\omega(x)$ и $\delta(x)$ обращаются в бесконечность. Горизонтальные асимптоты определяются значениями $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_2$:

$$\gamma_1 = \frac{A_3(a-b)}{2a\sqrt{2(A_1 + A_2 - a)}}, \qquad \gamma_2 = \frac{A_3(a+b)}{2a\sqrt{2(A_1 + A_2 + a)}}. \tag{21}$$

Выражения для констант a, b имеют вид

$$a = \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4}, \qquad b = A_2 + A_1(2A_4 - 1).$$

Значения γ_1, γ_2 могут соответствовать тепловым или акустическим асимптотам в зависимости от того, какому интервалу — тепловому или акустическому — принадлежат точки x_1, x_2, т. е. в зависимости от соотношения параметров.

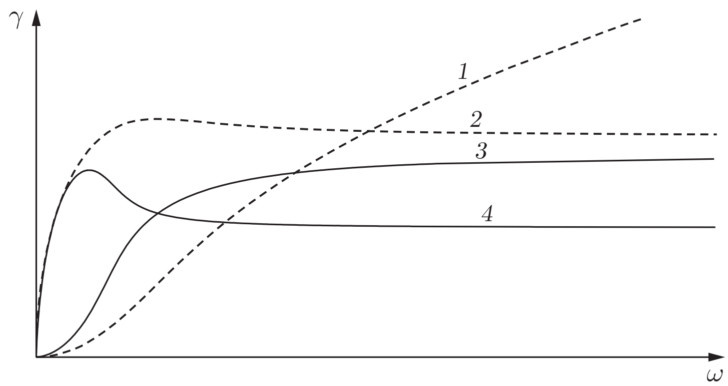

Рис. 3. Качественная зависимость характеристики скорости затухания γ от частоты ω для второго варианта расположения корней:
1 — акустическая ветвь, соответствующая классической теории термоупругости; *2* — тепловая ветвь, соответствующая классической теории термоупругости; *3* — акустическая ветвь, соответствующая гиперболической теории термоупругости; *4* — тепловая ветвь, соответствующая гиперболической теории термоупругости

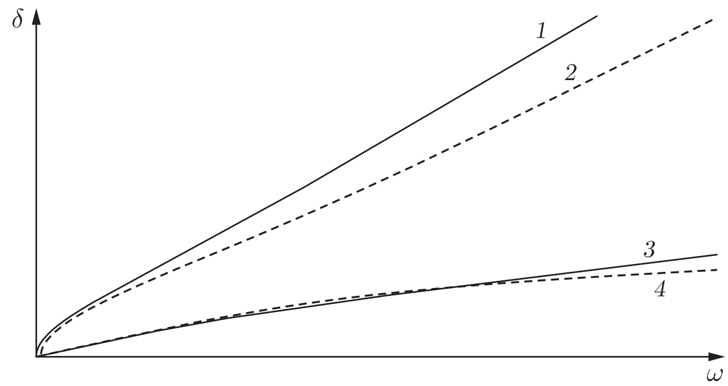

Рис. 4. Качественная зависимость волнового числа δ от частоты ω для второго варианта расположения корней:
1 — тепловая ветвь, соответствующая гиперболической теории термоупругости; *2* — тепловая ветвь, соответствующая классической теории термоупругости; *3* — акустическая ветвь, соответствующая гиперболической теории термоупругости; *4* — акустическая ветвь, соответствующая классической теории термоупругости

В первом варианте прямая $\gamma = \gamma_1$ — асимптота тепловых ветвей, прямая $\gamma = \gamma_2$ — асимптота акустических ветвей, во втором варианте прямая $\gamma = \gamma_1$ — асимптота акустических ветвей, прямая $\gamma = \gamma_2$ — асимптота тепловых ветвей.

В классической теории термоупругости возможна только одна асимптота

$$\gamma = \gamma_2 = \frac{A_3 A_4}{2\sqrt{A_1}},$$

полученная из выражения (21) при $A_2 = 0$ и соответствующая тепловой ветви при $A_4 > 1/2$ и акустической при $A_4 < 1/2$.

При выполнении условия $A = 1 - A_4$, означающего равенство скоростей распространения тепловых и акустических колебаний в среде, горизонтальные асимптоты совпадают

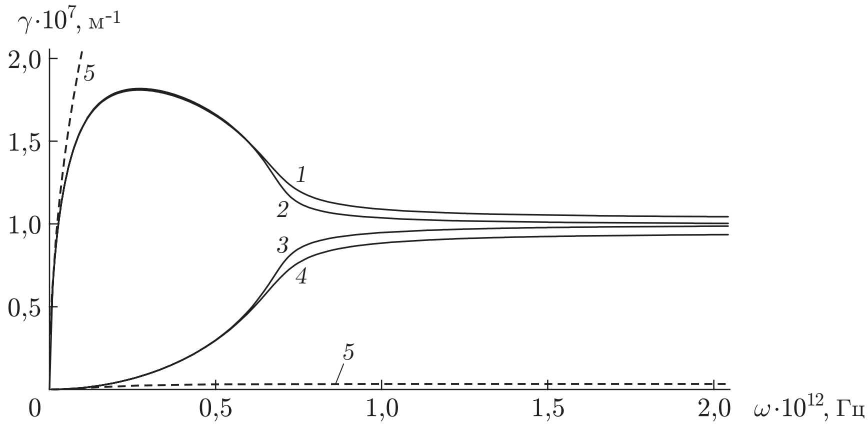

Рис. 5. Зависимость характеристики скорости затухания γ от частоты ω для меди:

1, 2 — тепловые ветви, соответствующие гиперболической теории термоупругости (*1* — расчет по формуле (26), *2* — расчет по формуле (25)); *3, 4* — акустические ветви, соответствующие гиперболической теории термоупругости (*3* — расчет по формуле (25), *4* — расчет по формуле (26)); *5* — ветви, соответствующие классической теории термоупругости для меди ($A < 1 - 2A_4$)

(кривые *2, 3* на рис. 5) и принимают значения

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{A_3(A_1A_4 + c)}{2c\sqrt{2c - 2A_1(A_4 - 2)}}, \qquad c = A_1\sqrt{A_4(4 - 3A_4)}. \tag{22}$$

Если $A < 1 - A_4$ ($A > 1 - A_4$), то $\gamma_1 > \gamma_2$ ($\gamma_1 < \gamma_2$) при любых параметрах (10). Для того чтобы определить относительное расположение асимптот гиперболической термоупругости, рассмотрим эти условия совместно с условиями двух вариантов расположения корней x_3 и x_4.

В первом варианте условие $A < 1 - A_4$ выполняется автоматически, следовательно, тепловая асимптота γ_1 расположена выше акустической асимптоты γ_2 (см. рис. 1).

Во втором варианте допускается условие $A < 1 - A_4$, при котором тепловая асимптота γ_2 находится выше акустической асимптоты γ_1. Однако может выполняться и условие $A > 1 - A_4$, при котором тепловая асимптота γ_2 расположена ниже акустической асимптоты γ_1 (см. рис. 3). Отметим, что когда тепловая асимптота находится ниже акустической, ветви акустических и тепловых дисперсионных кривых пересекаются. В классической теории термоупругости акустические и тепловые ветви пересекаются при $A_4 > 1/2$ (см. рис. 3).

Поскольку в классической теории термоупругости имеется только одна асимптота, в первом варианте наблюдается существенное расхождение классических и гиперболических тепловых ветвей (см. рис. 1), а во втором варианте — классических и гиперболических акустических ветвей (см. рис. 3).

Отметим, что при определенных соотношениях параметров в гиперболической теории термоупругости, в отличие от классической теории термоупругости, на тепловых и акустических ветвях зависимостей $\gamma(\omega)$ и $\gamma(\delta)$ появляются локальные максимумы (см. рис. 1, 3, 5).

2.4. *Наклонные асимптоты.* На графике зависимости $\delta(\omega)$ имеются только наклонные асимптоты, выходящие из начала координат, тангенсы углов наклона которых определяются с помощью вычисления предела отношения функций $\delta(x)/\omega(x)$ при стремлении параметра x к значениям, обращающим $\delta(x)$ и $\omega(x)$ в бесконечность. Тангенсы углов наклона асимптот определяются по формулам

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \sqrt{(A_1 + A_2 - a)/2}; \tag{23}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \sqrt{(A_1 + A_2 + a)/2}, \tag{24}$$

где φ_1 — угол наклона асимптоты акустических ветвей во втором варианте расположения корней и тепловых ветвей в первом варианте; φ_2 — угол наклона асимптоты тепловых ветвей во втором варианте и акустических ветвей в первом варианте. Асимптоты существуют при любых значениях параметров (10).

Из формул (23), (24) следует, что наклонные асимптоты никогда не совпадают, причем всегда верно неравенство $\delta_1 < \delta_2$. Следовательно, ветви графиков могут пересекаться только в первом варианте расположения корней, когда выходящая из начала координат под нулевым углом акустическая ветвь имеет асимптоту, угол наклона которой φ_2 превышает угол наклона асимптоты тепловой ветви φ_1 (см. рис. 2). Во втором варианте расположения корней тепловая асимптота проходит выше акустической и пересечения ветвей не наблюдается (см. рис. 4).

При условии равенства скоростей распространения тепловых и акустических колебаний получаем

$$\operatorname{tg}\varphi_1^* = \sqrt{(2A_1 - A_1A_4 - c)/2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2^* = \sqrt{(2A_1 - A_1A_4 + c)/2},$$

где величина c определяется с помощью формулы (22). Очевидно, что в отличие от горизонтальных асимптот наклонные асимптоты в случае равенства скоростей распространения тепловых и акустических колебаний не совпадают.

В классической теории термоупругости возможна только одна асимптота, тангенс угла наклона которой равен $\sqrt{A_1}$. Величина $\sqrt{A_1}$ получается из выражения (24) при $A_2 = 0$ и соответствует тепловой ветви при $A_4 > 1/2$ и акустической при $A_4 < 1/2$. Выполняется следующее соотношение для тангенсов углов наклона асимптот классической и гиперболической теорий термоупругости: $\operatorname{tg}\varphi_2 < \sqrt{A_1} < \operatorname{tg}\varphi_1$. Это означает, что асимптота классической теории термоупругости всегда находится между двумя асимптотами гиперболической теории термоупругости. Отсутствие асимптоты для тепловой ветви и наличие асимптоты для акустической ветви при $A_4 < 1/2$ (первый вариант расположения корней в классической теории термоупругости) обеспечивают пересечение акустической и тепловой ветвей зависимости $\delta(\omega)$.

Существуют различные мнения о связи между скоростями распространения тепловых и акустических колебаний. В [11] утверждается, что скорости распространения тепловых и акустических колебаний совпадают. В обозначениях, принятых в настоящей работе, данное утверждение соответствует равенству

$$A = 1 - A_4. \tag{25}$$

График зависимости $\gamma(\omega)$ при условии совпадения скоростей тепловых и акустических колебаний представлен на рис. 5 (кривые *2, 3*). В [12] приводится соотношение, в котором скорость распространения тепловых колебаний в $\sqrt{3}$ раз меньше скорости распространения акустических колебаний. Это соотношение соответствует равенству

$$A = (3 - A_4)/3. \tag{26}$$

График, построенный с помощью соотношения (26), представлен на рис. 5 (кривые *1, 4*).

Случаи (25), (26) соответствуют второму варианту расположения корней $A > 1 - 2A_4$. Следует отметить, что графики зависимости волнового числа от частоты, соответствующие соотношениям (25) и (26), практически не различаются.

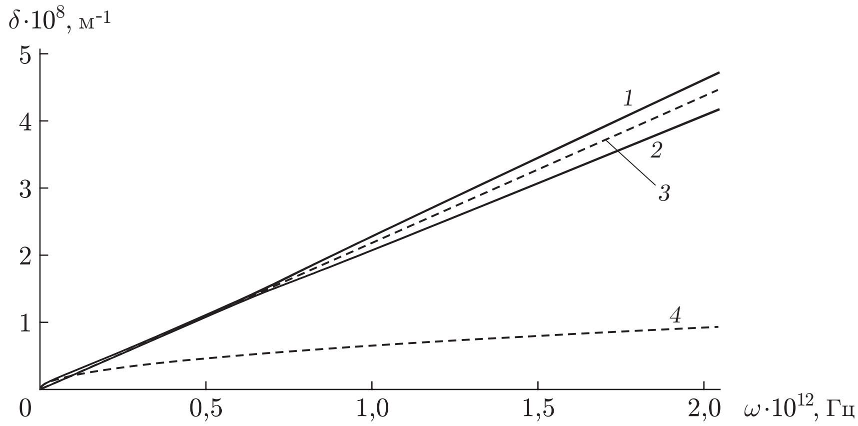

Рис. 6. Зависимость волнового числа δ от частоты ω для меди:
1 — тепловая ветвь, соответствующая гиперболической теории термоупругости; *2* — акустическая ветвь, соответствующая гиперболической теории термоупругости; *3* — акустическая ветвь, соответствующая классической теории термоупругости; *4* — тепловая ветвь, соответствующая классической теории термоупругости ($A < 1 - 2A_4$)

2.5. *Область применимости континуальной модели.* При значениях волнового числа $\delta = 4 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ различие значений величины γ (характеристики скорости затухания колебаний), полученных с помощью классической и гиперболической теорий термоупругости, составляет приблизительно 40 % для акустических ветвей и 70 % для тепловых ветвей. Для тепловой ветви такое различие возникает при значении частоты $\omega = 110$ ГГц (по данным, снятым с классической ветви дисперсионных зависимостей, $\omega = 370$ ГГц), для акустической ветви — при $\omega = 190$ ГГц (значение ω для классической акустической ветви практически такое же). Волновое число δ связано с длиной волны λ соотношением $\delta = 2\pi/\lambda$. Следовательно, выбранному значению волнового числа соответствует длина волны $\lambda \approx 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ м, в то время как, например, постоянная решетки меди на два порядка меньше: $d \approx 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м [13], что свидетельствует о применимости методов механики сплошных сред для описания процессов распространения термоупругих возмущений с учетом релаксации теплового потока. Графики дисперсионных соотношений для меди приведены на рис. 5, 6.

Заключение. В работе получены и исследованы дисперсионные соотношения для связанной задачи термоупругости, а именно зависимость волнового числа от частоты $\delta(\omega)$, зависимость характеристики скорости затухания колебаний от частоты $\gamma(\omega)$ и зависимость характеристики скорости затухания колебаний от волнового числа $\gamma(\delta)$. Проведено сравнение результатов, полученных в рамках гиперболической теории термоупругости (учитывающей релаксацию теплового потока), с результатами, полученными в рамках классической теории термоупругости. Найдены выражения для горизонтальных и наклонных асимптот, проведен их анализ: установлены закономерности их расположения в зависимости от параметров среды. Рассмотрены случаи пересечения акустической и тепловой ветвей дисперсионных зависимостей. Установлены соотношения параметров среды, при которых графики, соответствующие гиперболической и классической теориям термоупругости, значительно различаются. На примере конкретного материала показано, что в области частот, в которой значения коэффициента затухания колебаний, полученные с помощью классической и гиперболической теорий термоупругости, существенно различаются (приблизительно на 40 %), могут быть применены методы континуальной теории.

Автор выражает благодарность Е. А. Ивановой и Д. А. Индейцеву за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шашков А. Г.** Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход / А. Г. Шашков, В. А. Бубнов, С. Ю. Яновский. Минск: Наука и техника, 1993.
2. **Некрасов А. И.** Диффузия вихря: Собр. соч. в 2 т. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 1.
3. **Qiu T. Q., Tien C. L.** Short-pulse laser heating on metals // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1992. N 35. P. 719–726.
4. **Tzou D. Y.** On the thermal shock wave induced by a moving heat source // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1989. N 111. P. 232–238.
5. **Соболев С. Л.** Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // Успехи физ. наук. 1991. Т. 161, № 3. С. 5–29.
6. **Жоу Д.** Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2006.
7. **Энгельбрехт Ю. К.** Моды распространения одномерных волн в неограниченной термоупругой среде при конечной скорости распространения тепла // Изв. АН ЭССР. Физика. Математика. 1973. Т. 22, № 2. С. 188–195.
8. **Ivanov Ts. P.** Thermoviscoelasticity with a temperature rate dependence // Theor. Appl. Mech. 1974. V. 5, N 2. P. 81–85.
9. **Колпациков В. Л., Яновский С. Ю.** Связанная динамическая задача термоупругости для полупространства с учетом тепловой памяти // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47, № 1. С. 670–675.
10. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970.
11. **Ландау Л. Д.** Краткий курс теоретической физики / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1969. Т. 1.
12. **Косевич А. М.** Основы механики кристаллической решетки. М.: Наука, 1972.
13. **Pearson W. B.** A handbook of lattice spacings and structure of metals and alloys. L.: Pergamon Press, 1964.

Поступила в редакцию 19/XII 2010 г.