УДК 532.582

О СИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ В ЖИДКОСТИ ТЕЛА С ПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ НА СТЕНКУ

В. Л. Сенницкий

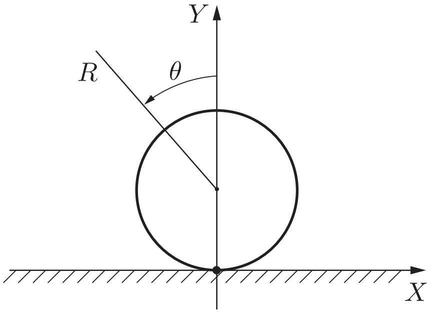
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: svovl@hydro.nsc.ru

Определено течение идеальной жидкости, происходящее вследствие ее протекания сквозь границу бесконечно длинного твердого цилиндра, соприкасающегося с твердой стенкой. Получена формула, согласно которой сила, действующая со стороны части цилиндра конечной длины на стенку, направлена внутрь стенки и при этом может быть сколь угодно велика по модулю.

Ключевые слова: жидкость, соприкасающиеся твердые тела, проницаемая граница, силовое воздействие.

1. В [1–4] рассмотрены задачи о силовом взаимодействии, движении идеальной или вязкой жидкости и находящегося в ней твердого тела в присутствии твердой стенки при периодических по времени воздействиях на гидромеханическую систему. Такие задачи представляют особый интерес, если расстояние между телом и стенкой не велико по сравнению с размером тела, в частности, если тело касается стенки.

В данной работе рассмотрена следующая задача. В идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной извне плоской поверхностью абсолютно твердой стенки, находится тело Q — абсолютно твердый бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса a с проницаемой для жидкости границей (см. рисунок). Стенка и тело Q покоятся относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Поверхность стенки совпадает с плоскостью $Y = 0$. Тело Q касается стенки вдоль прямой линии, лежащей на оси Z. Занимаемая жидкостью вне тела Q область Ω содержится в полупространстве $Y \geqslant 0$. На боковой поверхности Γ тела Q, в направлении внешней нормали к Γ, жидкость совершает заданное движение со скоростью U. В области Ω течение жидкости является потенциальным плоским. Предполагается, что течение жидкости внутри тела Q является трехмерным (жидкость втекает в тело Q и вытекает из него через его боковую поверхность и удаленные на бесконечность основания). Требуется определить силу F, действующую в направлении оси Y на стенку со стороны тела q — части тела Q — кругового цилиндра радиуса a с основаниями, лежащими в плоскостях течения, отстоящих друг от друга на расстояние l.



2. Будем рассматривать течение жидкости в плоскости $Z = 0$.

Потенциал Φ скорости жидкости удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi = 0 \qquad (a < R < \infty, \quad 0 < Y < \infty) \tag{2.1}$$

и условиям

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = 0 \quad \text{при} \quad Y = 0, \qquad -\infty < X < 0 \quad \text{и} \quad 0 < X < \infty; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R} = U \quad \text{при} \quad R = a, \qquad -\pi < \theta < \pi; \tag{2.3}$$

$$\nabla\Phi \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty, \qquad 0 \leqslant Y. \tag{2.4}$$

Здесь R, θ — полярные координаты, связанные с X, Y соотношениями

$$X = -R\sin\theta, \qquad Y = a + R\cos\theta.$$

Положим

$$U = W\chi, \tag{2.5}$$

где W — функция t;

$$\chi = 1 + \varepsilon^2 \, \frac{2(1+\cos\theta) - \varepsilon^2}{[2(1-\varepsilon)(1+\cos\theta) + \varepsilon^2][2(1+\varepsilon)(1+\cos\theta) + \varepsilon^2]} \tag{2.6}$$

($0 < \varepsilon < 2$ — параметр).

Отметим, что зависимость W от t, в частности, может быть периодической.

Согласно (2.6) имеем

$$\chi = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm\pi; \tag{2.7}$$

$$\chi = 1 + O(\varepsilon^{2\alpha}) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \qquad -\pi + \varepsilon^{1-\alpha} \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon^{1-\alpha}; \tag{2.8}$$

$$0 < \chi \leqslant 9/8 + O(\varepsilon^2) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \qquad -\pi < \theta < -\pi + \varepsilon^{1-\alpha} \quad \text{и} \quad \pi - \varepsilon^{1-\alpha} < \theta < \pi \tag{2.9}$$

($0 < \alpha < 1$ — постоянная).

Зависимость χ от θ, ε, задаваемая соотношением (2.6), представляет интерес ввиду того, что в соответствии с (2.5), (2.7)–(2.9) выполняется следующее:

а) скорость U обращается в нуль в точке касания окружности $R = a$ с осью X;

б) при малых значениях ε всюду на окружности $R = a$, за исключением лишь малой окрестности точки касания с осью X, скорость U может рассматриваться как функция только t, при том что в упомянутой окрестности скорость U как функция θ является ограниченной.

Задача (2.1)–(2.5) имеет решение

$$\Phi = (1/2)aW\ln[R^2 + 2(1-\varepsilon)aR\cos\theta + (1-\varepsilon)^2a^2] + \\ + (1/2)aW\ln[R^2 + 2(1+\varepsilon)aR\cos\theta + (1+\varepsilon)^2a^2] + \varphi \tag{2.10}$$

(φ — функция t), представляющее собой потенциал скорости жидкости, течение которой вызывается двумя источниками жидкости интенсивности $2\pi aW$, находящимися в точках $(0, -\varepsilon a)$, $(0, \varepsilon a)$ плоскости $Z = 0$.

3. Внутрь тела q через его границу втекает импульс.

Формула для потока S внутрь тела q через его боковую поверхность Y-импульса жидкости имеет следующий вид:

$$S = al\rho\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big\{\Big[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2\Big]\cos\theta - \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\,\frac{\partial\Phi}{\partial R}\Big\}\Big|_{R=a}\,d\theta, \tag{3.1}$$

где ρ — плотность жидкости.

Отметим, что сила $-F$ есть поток внутрь тела q через его боковую поверхность Y-импульса стенки.

Будем предполагать, что поток импульса внутрь тела q через его основания равен нулю и центр инерции тела q неподвижен. Тогда, в частности, должно выполняться соотношение

$$S - F = 0. \tag{3.2}$$

Определим силу F при малых значениях ε.

Используя (2.10), (3.1), (3.2), получим

$$F = -\pi a l \rho W^2 \varepsilon^{-1}[1 + O(\varepsilon^{1/2})] \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.3}$$

Из (3.3), в частности, следует, что $F < 0$, т. е. сила, действующая со стороны тела q на стенку, направлена внутрь стенки (тело "давит" на стенку), и при этом $|F|$ может быть сколь угодно большим.

4. Известно, что маленькие газовые пузырьки в жидкости вследствие наличия в ней поверхностно-активных веществ движутся в жидкости как твердые шарики [5]. Ввиду этого изложенное выше (в частности, задача (2.1)–(2.5), формула (3.3)) может рассматриваться как основа математической модели поведения гидромеханической системы, состоящей из жидкости, твердой стенки и находящегося в жидкости, контактирующего со стенкой газового пузырька, имеющего изменяющийся со временем радиус.

Отметим, что радиус пузырька может изменяться со временем, например, периодически.

Пусть $\hat{a}$ и $\hat{W}$ — характерные значения соответственно радиуса и скорости изменения радиуса пузырька. Тогда характерной величиной размерности силы должна быть $\rho\hat{a}^2\hat{W}^2$. Однако формула (3.3) служит указанием на то, что вследствие изменений радиуса пузырька со временем на стенку со стороны пузырька может действовать направленная внутрь стенки сила, по модулю много большая, чем $\rho\hat{a}^2\hat{W}^2$. Наличие такой силы предположительно должно приводить к существенному локальному деформированию или даже разрушению стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
2. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
3. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
4. **Сенницкий В. Л.** О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 57–62.
5. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 15/II 2005 г.