Здесь $D_{11}(0)$ — дисперсия случайной функции σ_{11}^* при $x_2 = 0$; $D'_{11}(0)$ — дисперсия производной $\sigma_{11,1}^*$ при $x_2 = 0$. Дисперсию $D'_{11}(0)$ вычислим по формуле

$$D'_{11}(0) = -\frac{d^2}{d\tau^2} K_{11}(\tau)|_{\tau=0}, \ \tau = x_1^2 - x_1^1, \tag{4.3}$$

где корреляционная функция напряжения σ_{11}^* при $x_2 = 0$

$$K_{11}(\tau) = \langle \overline{\sigma_{11}^*(x_1)} \sigma_{11}^*(x_1 + \tau) \rangle = \frac{8\alpha^2\sigma^{02}}{(4+n)^2} \exp(i\omega\tau) \tag{4.4}$$

(черта означает комплексное сопряжение).

С учетом формул (3.1), (4.3), (4.4) для вычисления среднего числа выбросов $\lambda(\sigma_*)$, приходящегося на единицу длины, окончательно получаем выражение

$$\lambda(\sigma_*) = \frac{\omega}{2\pi} \exp\left[-\frac{(4+n)^2 \sigma_*^2}{16\alpha^2\sigma^{02}}\right]. \tag{4.5}$$

Таким образом, формулы (4.2), (4.5) позволяют по заданному допустимому детерминированному уровню σ_* приближенно оценить надежность пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ломакин В. А.** Статистические задачи механики твердых деформируемых тел.— М.: Наука, 1970.
2. **Ломакин В. А., Шейнин В. И.** Концентрация напряжений на границе случайно-неоднородного упругого тела // Изв. АН СССР. МТТ.— 1974.— № 2.
3. **Наумов В. Н.** Напряженное состояние случайно-неоднородного упругого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 2.
4. **Подалков В. В., Романов В. А.** Концентрация напряжений на границе микронеоднородного упругого полупространства // ПММ.— 1978.— Т. 42, вып. 3.
5. **Подалков В. В., Романов В. А.** Деформация упругого анизотропного микронеоднородного полупространства // ПММ.—1983.— Т. 47, вып. 3.
6. **Архипов Н. В.** Задача о деформировании микронеоднородного цилиндра // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1984.— № 3.
7. **Кузнецов В. А., Самарин Ю. П.** Плоская задача кратковременной ползучести для среды со случайными реологическими характеристиками // Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин.— Тбилиси: Мецниереба, 1975.
8. **Кузнецов В. А.** Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряженного состояния // Математическая физика.— Куйбышев: КПТИ, 1976.
9. **Попов Н. Н., Самарин Ю. П.** Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // ПМТФ.— 1985.— № 2.
10. **Попов Н. Н.** Ползучесть стохастически неоднородной среды в условиях трехосного напряженного состояния // Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях.— Куйбышев: КПТИ, 1984.
11. **Кузнецов В. А.** Приближенные методы решения задач о надежности распределенных механических систем в условиях ползучести // Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях.— Куйбышев: КПТИ, 1984.
12. **Болотин В. В.** Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений.— М.: Стройиздат, 1971.

Поступила 11/XI 1986 г.

УДК 622 235

О ДИНАМИЧЕСКОМ РАЗВИТИИ ЗОНЫ РАДИАЛЬНЫХ ТРЕЩИН ПРИ КАМУФЛЕТНОМ ВЗРЫВЕ

Е. Н. Шер

(Новосибирск)

При описании разрушающего действия камуфлетного взрыва в твердых средах широко используются зонные модели [1—4], выделяющие обычно вблизи заряда зону перемола, промежуточную зону радиальных трещин и внешнюю зону упругости. Отличие в [1—4] при описании зоны радиальных трещин состоит в разных критериях разрушения упругой среды внешней зоны радиальными трещинами. Здесь используются силовой подход по критическим тангенциальным напряжениям [1—2], энергетический, учитывающий затраты энергии на трещинообразование [3, 5], и кинематический [4].

В [6—8] предложено рассматривать зону радиальных трещин и внешнюю упругую зону в единой упругой постановке. Рост трещин при этом определяется зависимостью скорости трещины от коэффициента интенсивности напряжений в ее вершине, являющейся паспортной характеристикой разрушаемой среды. Предлагаемая схема легко реализуется в квазистатической постановке для задач о взрыве шнурового заряда, так как изучен широкий класс задач о равновесии радиальной системы трещин в упругой плоскости. Трудности в получении точных динамических решений такой задачи заставляют искать приближенные ее решения. Такое решение в приближении большого числа трещин получается, если снова вернуться к разделению зон радиальных трещин и внешней упругой. Аналогичный подход для статической задачи использован в [9].

В упругой зоне для смещения $u(r,\ t)$ при $r > l(t)$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2},\quad a^2 = \frac{E\,(1-\nu)}{(1+\nu)\,(1-2\nu)\,\rho_0}, \tag{1}$$

где a — скорость продольных волн; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ρ_0 — плотность среды.

В зоне радиальных трещин или столбчатой упругости при $r_0(t) < r < l(t)$ выполняется уравнение [2]

$$\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r},\quad a_1^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\,\rho_0}. \tag{2}$$

Для компонент тензора напряжений в этой зоне

$$\sigma_{r1} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial u_1}{\partial r},\quad \sigma_{\theta 1} = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим задачу при следующих граничных условиях: на внутренней границе зоны радиальных трещин при $r = r_0(t)$

$$\sigma_r = -p(t); \tag{4}$$

на фронте трещин при $r = l(t)$

$$u_1 = u; \tag{5}$$

$$\sigma_{r1} + \rho_0\dot{l}\,\frac{\partial u_1}{\partial t} = \sigma_r + \rho_0\dot{l}\,\frac{\partial u}{\partial t}; \tag{6}$$

$$2\gamma_0 n = V - V_1 + \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_{r1})\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)\quad (\dot{l} \neq 0), \tag{7}$$

$$2\gamma_0 n = V - V_1 + \sigma_r\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)\quad (\dot{l} = 0).$$

Уравнения (5), (6) есть выражения непрерывности потоков массы и импульса в лагранжевых переменных, (7) выражает закон переноса энергии через фронт трещин. В этих уравнениях V, V_1 — объемная плотность упругой энергии; $\gamma_0(\dot{l})$ — плотность поверхностной энергии, идущей на образование трещины; n — число трещин на единице длины их фронта. При равномерно распределенных N трещинах $n = N/(2\pi l)$. В аналогичном виде уравнение сохранения энергии приведено в [4]. Здесь только конкретизирован член $2\gamma_0 n$, определяющий диссипацию энергии, идущей на разрушение, и уточнено энергетическое условие для неподвижного фронта при $\dot{l} = 0$.

Функция γ_0 связана с коэффициентом интенсивности напряжений соотношением [10]

$$2Eb^2\gamma_0 R\,(\dot{l}) = (1+\nu)\,\dot{l}^2 K_I^2 \sqrt{1 - \dot{l}^2/a^2}, \tag{8}$$

$$R(c) = 4\sqrt{1 - c^2/a^2}\,\sqrt{1 - c^2/b^2} - (2 - c^2/b^2)^2,$$

где b — скорость поперечных волн; K_I — коэффициент интенсивности напряжений. Учитывая такую связь, можно считать γ_0 известной функцией скорости фронта трещин $\dot{l}$, если известна паспортная зависимость $K_I(\dot{l})$. В этом случае закон движения $l(t)$ находится при решении поставленной задачи. Если же $l(t)$ задано, то (7) позволяет определить $\gamma_0(t)$ и, согласно (8), $K_I(t)$.

В качестве примера последней постановки приведем решение автомодельной задачи о расширении с постоянной скоростью зоны столбчатой упругости от нулевого размера под действием внутреннего давления $p = p_0 t/t_0$. Такая задача — зонное приближение автомодельной задачи о росте с постоянной скоростью звезды большого числа трещин под действием внутренних сосредоточенных сил. В общей постановке она не решена, рассмотрен лишь случай двух трещин.

Условие (4) для данной задачи запишется в виде

(9)
$$\sigma_r = -p_0 t_0/t \text{ при } r = v_0 t.$$

При такой нагрузке перемещение должно быть однородной функцией нулевой степени относительно переменных r и t. Общим решением такого вида уравнения (2) является функция

(10)
$$u_1(r/a_1 t) = a^0 + a^1 \ln (z - \sqrt{z^2 - 1}),\quad z = a_1 t/r.$$

Учитывая (3), из (9) получаем $a^1 = -p_0 t_0 v_0 (1 - \nu^2) \sqrt{1 - v_0^2/a_1^2} / E$. Для скорости и радиального напряжения на фронте трещин при $r = ct - 0$

(11)
$$v_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{p_0 (1 - \nu^2)\, t_0 v_0 \sqrt{1 - v_0^2/a_1^2}}{Et \sqrt{1 - c^2/a_1^2}},$$
$$\sigma_{r1} = -\frac{p_0 t_0 v_0 \sqrt{1 - v_0^2/a_1^2}}{ct \sqrt{1 - c^2/a_1^2}}.$$

Решение уравнения (1) в упругой зоне ищем в виде $u = \partial\varphi/\partial r$. Для потенциала φ запишем уравнение, аналогичное (2): $\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$. Решение его (нужной степени однородности и обеспечивающее обращение перемещения u в нуль при $r = at$, что определяется условием первоначального покоя [11]) имеет вид $\varphi(r, t) = A_1 r (z \ln (z - \sqrt{z^2 - 1}) + \sqrt{z^2 - 1})/a$, $z = at/r$. При этом

(12)
$$u(r, t) = A_1 \sqrt{z^2 - 1}/a.$$

Для скорости и радиального напряжения перед фронтом трещин при $r = ct + 0$

(13)
$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{A_1}{ct} \frac{1}{\sqrt{1 - c^2/a^2}},$$
$$\sigma_r = -\frac{A_1 \rho_0 a^2 (1 - 2\nu + \nu c^2/a^2)}{tc^2 (1 - \nu) \sqrt{1 - c^2/a^2}}.$$

Неизвестная константа A_1 в (12), (13) должна определяться из условий на фронте трещин. Условие (5) удовлетворяется выбором константы a^0 в (10), а из (6) и (11), (13) находим

$$A_1 = \frac{p_0 t_0 v_0 \sqrt{1 - v_0^2/a_1^2} \sqrt{1 - c^2/a_1^2}\, c (1 - \nu)}{\rho_0 a^2 (1 - 2\nu) \sqrt{1 - c^2/a^2}}.$$

Равенство (7) по определенному виду движения позволяет найти γ_0 и с использованием (8) $K_I(t)$:

$$K_I = \frac{Q\sqrt{N}}{2\sqrt{\pi c t}} \frac{b\sqrt{(1-\nu)\,R(c)}\sqrt{1-v_0^2/a_1^2}\,(1-c^2/(2b^2))}{(1-c^2/a^2)^{3/4}}, \tag{14}$$
$$Q = 2\pi v_0 t_0 p_0/N.$$

При предельном переходе v_0, c к нулю выражение (14) преобразуется в асимптотику решения статической задачи о напряжении звезды N трещин длиной l внутренними силами Q при больших N [12]: $K_I = Q\sqrt{N}/(2\sqrt{\pi l})$.

Предложенный метод позволяет решать и статические задачи о равновесии упругого пространства с круговой или сферической полостью при заданном внутри давлении и наличии радиальной системы большого числа трещин. При этом на фронте зоны трещин выполняется условие непрерывности σ_r и u и, кроме того, энергетическое условие (7). При решении таким способом задачи Бови получаются результаты, совпадающие асимптотически с известными при большом числе трещин [12, 13].

Наиболее важное преимущество указанного подхода — возможность реализации численного решения задач о разрушении хрупкой среды при взрыве с позиций механики хрупкого разрушения в общей схеме зонного подхода к рассматриваемой задаче. При таком подходе возможен учет зон разной структуры разрушения вблизи заряда ВВ и построение адекватных явлению математических моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Родионов В. Н., Ромашев А. Н. и др.** Механический эффект подземного взрыва.— М.: Недра, 1971.
2. **Григорян С. С.** Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // ПММ.— 1967.— Т. 31, вып. 4.
3. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения.— М.: Наука, 1974.
4. **Николаевский В. Н.** Предельная скорость фронта разрушения и динамические перегрузки хрупких материалов.— М., 1979.—(Препринт/ИФЗ АН СССР; № 123).
5. **Слепян Л. И.** О волне хрупкого разрушения // Инж. журн. МТТ.— 1968.— № 4.
6. **Шер Е. Н.** Оценка дробящего действия удлиненного заряда в хрупкой среде // ФТПРПИ.— 1975.— № 1.
7. **Шер Е. Н.** Пример расчета движения радиальных трещин, образующихся при взрыве в хрупкой среде в квазистатическом приближении // ФТПРПИ.— 1982.— № 2.
8. **Мартынюк П. А., Шер Е. Н.** Оценка размеров зоны радиальных трещин, образующихся при камуфлетном взрыве шнурового заряда в хрупкой среде // ПМТФ.— 1984.— № 4.
9. **Войтишек Я. В., Слепян Л. И.** Гидродинамическая модель пробивания хрупкой пластины // ФТПРПИ.— 1985.— № 3.
10. **Шер Е. Н.** Об энергетическом условии в носике нестационарной трещины // ПМТФ.— 1969.— № 3.
11. **Соболев С. Л.** Некоторые вопросы теории распространения колебаний // Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики/Под ред. Ф. Франка, Р. Мизеса.— Л.; М.: ОНТИ, 1937.
12. **Шер Е. Н.** Об одном случае равновесия системы радиальных трещин // ПМТФ.— 1974.— № 5.
13. **Ouchterlony F.** Fracture mechanics applied to rock blasting.— Stockholm, 1973.— (Rept/Swedish Detonic Res. Found.; DS 1973 : 29).

Поступила 20/I 1986 г.