УДК 517.95

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ: УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ

А. Е. Мамонтов, М. И. Уваровская*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
* Институт математики и информатики Якутского государственного университета им. М. К. Аммосова, 677016 Якутск
E-mails: relic@hydro.nsc.ru, uvar@sakha.ru

Рассматривается проблема формулировки минимальных условий на входные данные, при которых можно гарантировать существование и единственность решений краевых задач, описывающих неодномерные течения идеальной несжимаемой жидкости, на примере начально-краевой задачи в пространственно-временном цилиндре, построенном на ограниченной области течения с условием непротекания на ее границе (что соответствует течению жидкости в замкнутом сосуде). Вопросы существования рассмотрены только для плоских течений, а вопросы единственности — и для трехмерных. Искомые условия получены в виде условий принадлежности вихря определенным функциональным пространствам Орлича. Проведено сравнение полученных результатов с известными результатами. Приведены примеры допустимых типов особенностей, при которых полученные результаты сохраняют силу, что составляет физическую интерпретацию этих результатов.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, идеальная несжимаемая жидкость, нестационарные течения, обобщенные решения, пространства Орлича, лемма Гронуолла.

Введение. Как известно, движение идеальной несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Эйлера [1]

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{f}; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ — вектор скорости; p — давление; $\boldsymbol{f}$ — заданный вектор внешних массовых сил. Величины $\boldsymbol{v}$, p, $\boldsymbol{f}$ являются функциями времени t и пространственных переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $n = 3$ соответствует трехмерным течениям общего характера, а $n = 2$ — плоскопараллельным.

В данной работе исследуется задача математической корректности модели (1), (2), т. е. вопрос о существовании и единственности решений краевых задач для этой системы. Эта задача является классической, достаточно полный обзор результатов, полученных при ее решении, приведен в [2, 3]. Среди работ по корректности модели (1), (2) особо следует выделить классические работы Т. Като [4], В. И. Юдовича [5, 6] и А. В. Кажихова [7], лежащие в основе исследований в данной области. В работах [6, 7] рассматривается

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00550) и в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук и их руководителей (№ МК-213.2008.1).

более интересная с физической точки зрения задача о протекании жидкости сквозь заданную область, в то время как в [4, 5] заложены основы глобальной теории существования и единственности решений начально-краевых задач для (1), (2), т. е. получены соответствующие теоремы в целом (при любых сколь угодно больших значениях времени и начальных данных). Это было сделано для двумерной задачи с начально-краевыми условиями вида

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{4}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей, принадлежащей классу C^2 (или $C^{2+\alpha}$ в [4]); $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $T > 0$ — произвольный интервал времени; $\boldsymbol{v}_0$ — начальная скорость. Решение задачи (1)–(4) ищется в пространственно-временном цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Начальная скорость должна удовлетворять условиям (2), (4). Задача (1)–(4) описывает движение жидкости в замкнутом сосуде и не очень интересна с прикладной точки зрения. Однако с этой задачи как с модельной естественно начинать математическое исследование, которое впоследствии может быть распространено на другие начально-краевые задачи. Для трехмерных движений задача математической корректности в целом модели (1), (2) оказалась существенно более сложной. В частности, вопрос о существовании решений в целом не решен до сих пор.

В настоящей работе также ограничимся исследованием задачи (1)–(4). Вопрос существования рассматривается только для случая $n = 2$. Целью работы является уточнение условий на входные данные и на искомое решение, гарантирующих существование и единственность решения в целом. В частности, представляет интерес доказательство существования решения при негладких входных (особенно начальных) данных, а также обеспечение единственности решения при наиболее слабых (насколько это возможно) требованиях на него. Таким образом, будем рассматривать не классические решения задачи, построенные в [4], а обобщенные, основы теории которых заложены в [5]. При этом достаточно рассмотреть случай односвязной ограниченной области Ω, так как обобщение на другие области может быть проведено аналогично [5]. В работе [5] существование решения задачи (1)–(4) доказано при условии ограниченности начального вихря ($\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0 \in L_\infty(\Omega)$), при этом само решение принадлежало следующему классу:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} \in L_\infty(Q_T), \qquad \|\nabla p\|_{L_\infty(0,T,L_r(\Omega))} \leqslant Cr \quad \forall r \gg 1. \tag{5}$$

В [5] также показано, что в классе (5) решение задачи единственно. Из результатов, добавившихся к указанному результату [5] за прошедшие 45 лет, можно выделить следующие.

1. В [8] доказано существование решения задачи (1)–(4) при $n = 2$ с достаточно "плохой" начальной скоростью:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0 \in L_M(\Omega). \tag{6}$$

Здесь $L_M(\Omega)$ — пространство Орлича, порожденное любой N-функцией M, такой что ее дополнительная N-функция $\bar{M}$ удовлетворяет условию

$$\int^{+\infty} \bar{M}'(t)t^{-2}\exp(-t^2/\gamma)\,dt < \infty \tag{7}$$

с некоторой постоянной $\gamma(\Omega)$ (основные понятия, связанные с пространствами Орлича, приведены в п. **1**). Условия (6), (7) означают, что $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0$ хотя и принадлежит пространству $L_1(\Omega)$, но не принадлежит $L_r(\Omega)$ для каких-либо $r > 1$.

2. В [2] доказана единственность решения (1)–(4) при более слабых ограничениях на решение, а именно при

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\|_{L_\infty(0,T,L_r(\Omega))} \leqslant C\theta(r), \qquad r \gg 1 \tag{8}$$

в случае достаточно медленно (логарифмически) растущих функций θ. Этот результат основан на анализе неравенства типа Гронуолла

$$\int_\Omega \psi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \leqslant \int_0^t \int_\Omega g(s,\boldsymbol{x})\psi(s,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,ds \tag{9}$$

с неотрицательными функциями ψ и g (при заданной функции g требуется доказать, что $\psi = 0$), причем для ограниченных g анализ (9) тривиален (сводится к применению классической леммы Гронуолла). При g, удовлетворяющих оценке вида (8) с $\theta(r) = r$, этот анализ проведен в [5], а в [2] данный результат был усилен.

Однако следует заметить, что условия (6)–(8) являются недостаточно конструктивными. В частности, условие (8) представляет собой семейство условий, к тому же требования на θ в нем очень громоздкие и их проверка затруднена. При этом остается открытым вопрос об оптимальности этих результатов.

В настоящей работе вместо (6)–(8) получены более ясно сформулированные условия на начальные данные и решение, при которых можно доказать теоремы существования и единственности в целом, причем условие (8) заменяется на более естественное и легко проверяемое условие принадлежности вихря специальным пространствам Орлича. При этом используются, в частности, результаты [9] для неравенства (9). Следует отметить, что в работах [2, 9] была независимо обнаружена связь между неравенством (9) и проблемой единственности траекторий жидких частиц, но исследование этой связи проведено в разных терминах: в [2] — с помощью пространств вида (8), в [9] — с помощью пространств Орлича. Второй путь представляется более естественным (в частности, в силу формулировки условий на вихрь в виде принадлежности лишь одному пространству, а не семейству) как для уравнений Эйлера, так и для задачи о траекториях и задачи о неравенстве (9).

Для того чтобы сформулировать полученные результаты, необходимы некоторые сведения из анализа и вспомогательные построения (см. п. **1**). В п. **2** сформулированы условия, обеспечивающие однозначную разрешимость двумерной задачи (1)–(4) в классах, в которых (при любом n) имеет место единственность решения, и проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными в [2]. Целью п. **3** является поиск наиболее общих условий (на входные данные), гарантирующих разрешимость двумерной задачи, а также дана физическая интерпретация полученных результатов.

1. Вспомогательные сведения и построения. Как сказано выше, исследование поставленной задачи естественно проводить с использованием функциональных пространств Орлича. Теория этих пространств подробно изложена в [10]. В данной работе лишь кратко сформулированы необходимые сведения о них.

Функция M одной вещественной переменной называется N-функцией, если она выпуклая, четная (следовательно, далее можно рассматривать ее поведение только на правой полуоси), а на правой полуоси строго возрастает и удовлетворяет соотношениям

$$\frac{M(s)}{s} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to 0, \qquad \frac{M(s)}{s} \to +\infty \quad \text{при} \quad s \to +\infty.$$

Для любой N-функции M можно определить дополнительную к ней N-функцию $\bar{M}$, которая является ее преобразованием Лежандра. Поскольку любая N-функция почти всюду дифференцируема, определение $\bar{M}$ можно записать в форме $\bar{M}' = (M')^{-1}$.

Если множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет конечную меру (например, является ограниченной областью, которая и будет в дальнейшем рассматриваться), то можно ввести класс Орлича $K_M(\Omega)$ как множество измеримых функций u, таких что $\displaystyle\int_\Omega M(u(\boldsymbol{x}))\,d\boldsymbol{x} < \infty$. Пространство Орлича $L_M(\Omega)$ является линейной оболочкой класса $K_M(\Omega)$, поэтому в нем естественно вводится норма Люксембурга

$$\|u\|_{L_M(\Omega)} = \inf\Big\{k \;\Big|\; \int\limits_\Omega M\Big(\frac{u(\boldsymbol{x})}{k}\Big)\,d\boldsymbol{x} \leqslant 1\Big\}.$$

В силу конечности меры Ω важно лишь поведение N-функций на $+\infty$, поэтому далее в формулах для них подразумевается, что они выписаны для больших значений аргументов.

Пример 1.1. $M(s) = s^p/p$, $p > 1$, $\bar{M}(s) = s^q/q$, $q = p/(p-1)$, $L_M(\Omega) = L_p(\Omega)$, $L_{\bar{M}}(\Omega) = L_q(\Omega)$.

Пример 1.2. $M(s) = \mathrm{e}^s - s - 1$, $\bar{M}(s) = (s+1)\ln(s+1) - s$. Пространство $L_M(\Omega)$ состоит из функций, принадлежащих всем $L_r(\Omega)$, $r < \infty$ (но все же неограниченных, вообще говоря), а пространство $L_{\bar{M}}(\Omega)$ состоит из функций хотя и интегрируемых (и даже обладающих несколько лучшими свойствами), но не принадлежащих никакому $L_{1+\varepsilon}(\Omega)$.

Гладкие функции, вообще говоря, не плотны в $L_M(\Omega)$, поэтому их замыкание $E_M(\Omega)$ (в норме $L_M(\Omega)$) в общем случае образует сепарабельное подпространство в $L_M(\Omega)$, причем $L_{\bar{M}}(\Omega) = (E_M(\Omega))^*$, так что ограниченные множества в $L_M(\Omega)$ $*$-слабо секвенциально компактны. Пространства $E_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$ совпадают тогда и только тогда, когда M удовлетворяет Δ_2-условию: $M(2u) \leqslant CM(u)$ при $u \gg 1$, что означает не более чем степенной рост M на бесконечности. Это условие также является критерием совпадения множеств $K_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$.

Рост N-функций на бесконечности можно сравнивать с помощью отношений "$\prec$" и "$\prec\!\!\prec$", вводимых следующим образом:

$$M_1 \prec M_2, \qquad \text{если} \quad M_1(u) \leqslant M_2(Cu), \qquad u \gg 1,$$
$$M_1 \prec\!\!\prec M_2, \qquad \text{если} \quad M_2(u)/M_1(Cu) \to \infty, \qquad u \to \infty \quad \forall C > 0.$$

В первом случае имеет место непрерывное вложение $L_{M_2}(\Omega) \hookrightarrow L_{M_1}(\Omega)$, во втором случае это вложение является строгим (в теоретико-множественном смысле) и в определенном смысле компактным (например, $L_{M_2}(\Omega) \subset K_{M_1}(\Omega)$). Соответственно отношение $M_1 \sim M_2$ (понимаемое как одновременное выполнение отношений $M_1 \prec M_2$ и $M_2 \prec M_1$) является критерием совпадения $L_{M_1}(\Omega) = L_{M_2}(\Omega)$.

Для функций, растущих быстрее степенных, можно выделить так называемое Δ^2-условие, состоящее в том, что $M^2 \sim M$, т. е. $M^2(u) \leqslant M(Cu)$ при $u \gg 1$. Если не учитывать "патологические" случаи (которые в данной работе не возникают), этому условию удовлетворяют все N-функции M, растущие не медленнее функций вида $F(s) = \exp(s^\varepsilon)$.

Таким образом, пространства Лебега $L_r(\Omega)$ являются частным случаем пространств Орлича, теория которых частично подобна теории пространств L_r (особенно в случае, когда M и $\bar{M}$ одновременно удовлетворяют Δ_2-условию), но во многом отличается от нее и позволяет описать тонкие свойства функций в Ω.

Между пространствами Лебега и Орлича имеется также следующая связь. Рассмотрим множество измеримых функций u, принадлежащих всем $L_p(\Omega)$ при $p \in [\alpha, \beta)$, таких что $\|u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\omega(p)$, $p \in [\alpha, \beta)$, с заданной функцией ω. Как отмечено в различных случаях разными исследователями (см. обзор в [11]), это множество содержится в пространстве Орлича $L_M(\Omega)$ с подходящей функцией M. Достаточно полно и систематически эта связь изучена в работах [11, 12]. В данной работе используются терминология и некоторые результаты [11]. Ниже рассматривается только случай $\beta = +\infty$. Описанное выше множество превращается в банахово пространство $L_{\omega,\infty}$, если его снабдить нормой

$$\|u\|_{L_{\omega,\infty}} = \sup_{p \in [\alpha, +\infty)} \frac{\|u\|_{L_p(\Omega)}}{\omega(p)}. \tag{1.1}$$

Это пространство не зависит от выбора α (т. е. соответствующие нормы эквивалентны) и не меняется, если ω изменяется с точностью до эквивалентности специального вида:

$$\omega_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \omega_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_1\omega_1(p) \leqslant \omega_2(p) \leqslant C_2\omega_1(p). \tag{1.2}$$

Операторы

$$\mathbf{In}_\infty[\omega](v) = \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{v^p\,dp}{\omega^p(p)}, \qquad \mathbf{Sc}_\infty[\Phi](p) = \max_{v \geqslant 1} \frac{v}{\Phi^{1/p}(v)}$$

осуществляют соответствие между функциями $\omega = \omega(p)$ и N-функциями $\Phi = \Phi(v)$ (см. [11]), а именно: в случае достаточно быстро растущих Φ, т. е. медленно растущих ω (которые используются ниже), указанное соответствие принимает вид равенства

$$L_{\omega,\infty} = L_\Phi \qquad \text{при} \quad \Phi = \mathbf{In}_\infty[\omega], \quad \text{т. е.} \quad \omega = \mathbf{Sc}_\infty[\Phi].$$

И наоборот, любое пространство L_Φ с достаточно быстро растущей Φ можно представить как $L_{\omega,\infty}$ с соответствующей функцией ω.

Таким образом, в рассматриваемом случае семейство оценок в L_p эквивалентно оценке в соответствующем пространстве Орлича. Используя этот факт, можно попытаться перевести в термины пространств Орлича результаты работы [2] (см. п. **2**). Однако для неравенства (9) такой перевод нецелесообразен, поскольку в [9] исследование неравенства (9) проведено сразу в терминах пространств Орлича, причем показана неулучшаемость результата. Приведем частичную формулировку этого результата.

Определение 1.1. Класс $\mathcal{K}$ есть множество N-функций, удовлетворяющих одному из трех эквивалентных ограничений:

$$\int\limits^{+\infty} \frac{\ln M(s)}{s^2}\,ds = +\infty, \qquad \int\limits^{+\infty} \frac{ds}{\bar{M}(s)} = +\infty, \qquad \int\limits^{+\infty} \frac{ds}{sM^{-1}(s)} = +\infty. \tag{1.3}$$

Замечание 1.1. Все элементы $\mathcal{K}$, за исключением "патологических" случаев, удовлетворяют Δ^2-условию.

Утверждение 1.1. *Пусть функции g и ψ заданы в Q_T и неотрицательны, $\psi \in L_{1+\varepsilon}(Q_T)$, $g \in K_M(Q_T)$, $M \in \mathcal{K}$. Тогда из* (9) *следует $\psi = 0$. Если $M \notin \mathcal{K}$, то найдутся неотрицательные $\psi \in L_\infty(Q_T)$ и $g \in L_\infty(0,T,L_M(\Omega))$, такие что неравенство* (9) *будет выполнено, хотя $\psi \not\equiv 0$.*

Из (1.3) следует, что класс $\mathcal{K}$ состоит из функций, растущих быстрее всех степенных. Для любой $M \in \mathcal{K}$ можно найти $M_1 \in \mathcal{K}$, такую что $M_1 \prec\!\!\prec M$, так что условия принадлежности L_M или K_M с какой-либо $M \in \mathcal{K}$ равносильны.

Пример 1.3. $M_\alpha(s) = \exp{(s/\ln^\alpha s)}$, $M_\alpha \in \mathcal{K}$ при $\alpha \leqslant 1$. Соответствующая функция $\omega(p) = \mathbf{Sc}_\infty[M_\alpha](p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} p\ln^\alpha p$. Таким образом, если сформулировать условие на g в виде $\|g\|_{L_p(Q_T)} \leqslant Cp\ln^\alpha p$, то утверждение типа леммы Гроноулла для (9) верно при $\alpha \leqslant 1$. Можно продолжать уточнять условия на M, выбирая, например, $M(s) = \exp{(s/(\ln s \ln^\alpha \ln s))}$, что даст новые логарифмы в ω (ср. [2]), и т. д.

Необходимы также свойства некоторых дифференциальных операторов в пространствах Орлича. Поскольку для L_p эти свойства хорошо изучены, естественно применить экстраполяционные методы. Если использовать представление пространств Орлича в виде пространств $L_{\omega,\infty}$, то в применении этих методов отсутствует необходимость в силу тривиальности задачи, но такое представление неудобно из-за его громоздкости. Для целей данной работы удобно использовать конструктивный метод экстраполяции, разработанный в [13–15], который состоит в следующем. Пусть линейный оператор A ограниченно действует в L_p при всех $p \gg 1$ и его норма $\|A\|_{\mathcal{L}(L_p)} \leqslant C\varphi(p)$. Тогда следует вычислить обратное преобразование Меллина на функции $\varphi^p(p)$:

$$\varphi^p(p) = \int\limits_{\sigma}^{+\infty} \psi(s)s^p\,ds \tag{1.4}$$

($\sigma \geqslant 0$ можно выбирать произвольно, при этом формула (1.4) в определенном смысле распространяется на случай неаналитических функций φ [15]) и полученную функцию ψ принять в качестве ядра интегрального преобразования типа свертки:

$$\mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi](v) = \int\limits_{\sigma}^{+\infty} \psi(s)\Phi(vs)\,ds. \tag{1.5}$$

В результате можно утверждать, что A действует ограниченно из L_M в L_Φ для любых N-функций Φ и M, связанных соотношением $M = \mathbf{F}_{\psi,\sigma}[\Phi]$. В частности, если $\varphi(p) = p$, то из (1.4) (с точностью до отношения "$\overset{\varphi}{\sim}$", что несущественно, как отмечено выше) следует $\psi(s) = \mathrm{e}^{-s}$, и оператор (1.5) превращается в оператор $\mathbf{S}$, изученный в [13]:

$$\mathbf{S}[\Phi](v) = \int\limits_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\,\Phi(vs)\,ds. \tag{1.6}$$

Таким образом, получаем

Утверждение 1.2. *Если линейный оператор A при всех $p \gg 1$ обладает свойством $\|A\|_{\mathcal{L}(L_p)} \leqslant Cp$, то $A \in \mathcal{L}(L_M, L_\Phi)$ для всех N-функций M и Φ, связанных соотношением $M = \mathbf{S}[\Phi]$, где оператор $\mathbf{S}$ определен формулой* (1.6).

В данной работе утверждение 1.2 рассматривается в случае $\Phi \in \mathcal{K}$.

Утверждение 1.3. *Если $M = \mathbf{S}[\Phi]$ и M удовлетворяет Δ^2-условию, то $\Phi \in \mathcal{K}$ эквивалентно $M \in \mathcal{K}_1$, где $\mathcal{K}_1$ состоит из функций M, удовлетворяющих условию*

$$\int^{+\infty} \frac{\ln\ln M(s)}{s^2}\,ds = +\infty. \tag{1.7}$$

Замечание 1.2. Как следует из замечания 1.1 и того, что $\mathbf{S}$ повышает скорость роста тех функций, к которым он применяется, Δ^2-условие в утверждении 1.3 не является дополнительным существенным ограничением, а отсеивает лишь "патологические" функции, несущественные с прикладной точки зрения.

Доказательство утверждения 1.3. Построим сначала удобное представление для асимптотики функции M. Для этого рассмотрим уравнение $\Phi(vs_*(v)) = \exp(s_*(v)/2)$ для величины $s_*(v)$ при $v \gg 1$. В силу того что при $s = 1$ величина $\mathrm{e}^{-s/2}\,\Phi(vs) > 1$, а при $s \to +\infty$ она стремится к нулю (так как оператор $\mathbf{S}$ определен на функциях, растущих медленнее экспоненты), такая величина $s_*(v)$ найдется. Нетрудно также показать, что она единственна при $v \gg 1$ и монотонно стремится к $+\infty$ при $v \to +\infty$. Таким образом, при $s > s_*(v)$ имеем $\Phi(vs) < \mathrm{e}^{s/2}$, так что

$$M(v) = \int\limits_{0}^{s_*(v)} \mathrm{e}^{-s}\,\Phi(vs)\,ds + \int\limits_{s_*(v)}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\,\Phi(vs)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \Phi(vs_*(v)) + 2\exp(-s_*(v)/2) \leqslant 2\exp(s_*(v)/2).$$

Таким образом, $M(v) \prec \exp(s_*(v))$.

В то же время, если положить

$$\beta(v) = \frac{1}{4v}\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{2}\,\Phi(vs_*(v))\Big),$$

то по определению получим $\beta(v) \leqslant s_*(v)/4$ и

$$M(4v) \geqslant \int\limits_{\beta(v)}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\,\Phi(4vs)\,ds \geqslant \Phi(4v\beta(v))\,\mathrm{e}^{-\beta(v)} = \frac{1}{2}\,\exp\Big(\frac{s_*(v)}{2} - \beta(v)\Big) \geqslant \frac{1}{2}\exp\,(s_*(v)/4),$$

откуда в силу Δ^2-условия для M следует $M(v) \succ \exp\,(s_*(v))$.

Итак, $M(v) \sim \exp(s_*(v))$. Теперь можно записать следующую цепочку соотношений, в которых символ „$\overset{+\infty}{\sim}$" означает одновременное обращение в $+\infty$ (или принятие конечных значений):

$$\int^{+\infty} \frac{\ln\Phi(s)}{s^2}\,ds = \int^{+\infty} \frac{\ln\Phi(vs_*(v))}{v^2 s_*^2(v)}\,d(vs_*(v)) = \int^{+\infty} \frac{1}{2v}\,\frac{d(vs_*(v))}{vs_*(v)} =$$

$$= \frac{1}{2v}\,\ln\,(vs_*(v))\Big|_{v=+\infty} + \frac{1}{2}\int^{+\infty} \frac{\ln(vs_*(v))}{v^2}\,dv \overset{+\infty}{\sim} \int^{+\infty} \frac{\ln v + \ln s_*(v)}{v^2}\,dv \overset{+\infty}{\sim}$$

$$\overset{+\infty}{\sim} \int^{+\infty} \frac{\ln s_*(v)}{v^2}\,dv = \int^{+\infty} \frac{\ln\ln M(v)}{v^2}\,dv,$$

что и требовалось доказать.

2. Существование и единственность обобщенного решения с неограниченным вихрем. Как отмечено в [2] (без доказательства), определение обобщенного решения задачи (1)–(4), данное в [5], и теорема существования для него могут быть распространены на случай неограниченного вихря. Поэтому в данной работе не приводится подробное доказательство существования, а лишь отмечаются отличия, возникающие в рассматриваемом случае, и приводятся необходимые сведения из [5].

Как и в [5], задачу следует свести к нахождению функции тока ψ:

$$\boldsymbol{v} = \hat{\nabla}\psi \equiv \Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big).$$

При этом в силу (4) можно считать $\psi\big|_{\partial\Omega} = 0$. Применяя к (1) операцию rot (понимаемую здесь как скалярный оператор: $\operatorname{rot}\boldsymbol{w} = (w_2)_{x_1} - (w_1)_{x_2} = -\hat{\nabla}\cdot\boldsymbol{w}$) и учитывая (2), получим уравнение Гельмгольца для вихря $\omega = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = -\Delta\psi$:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\omega = \operatorname{rot}\boldsymbol{f}.$$

Таким образом, получаем следующую задачу для функции тока:

$$\frac{\partial\,\Delta\psi}{\partial t} + \hat{\nabla}\psi\cdot\nabla\Delta\psi = -\operatorname{rot}\boldsymbol{f}, \qquad \psi\big|_{t=0} = \psi_0, \quad \psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.1}$$

где ψ_0 — функция тока начальной скорости $\boldsymbol{v}_0$.

Зафиксируем произвольную функцию $M \in \mathcal{K}_1$ и введем следующие функциональные пространства.

Определение 2.1. $V^{(M)}$ есть пространство обобщенных решений u задач вида

$$\Delta u = g, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где функции g — любые элементы пространства $L_M(\Omega)$. При этом $\|u\|_{V^{(M)}} = \|\Delta u\|_{L_M(\Omega)}$.

Определение 2.2. $V_1^{(M)}$ есть пространство функций, определенных в Q_T, принадлежащих $V^{(M)}$ при почти всех $t \in (0,T)$ и имеющих конечную норму $\|u\|_{V_1^{(M)}} = \sup\limits_{t\in(0,T)} \|u(t,\cdot)\|_{V^{(M)}}$.

В предельном случае, когда M стремится к бесконечности при конечных значениях аргумента (т. е. $L_M(\Omega) = L_\infty(\Omega)$), эти пространства совпадают с пространствами V и V_1, введенными в [5]. По аналогии с [5] дадим следующее определение.

Определение 2.3. Пусть $\psi_0 \in V^{(M)}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} \in L_1(0,T,L_M(\Omega))$. Обобщенным решением задачи (2.1) называется функция $\psi \in V_1^{(M)}$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega \chi\big|_{t=0} \Delta\psi_0 \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{Q_T} \Delta\psi \Big[\frac{\partial\chi}{\partial t} + \hat\nabla\psi\cdot\nabla\chi\Big] \, d\boldsymbol{x}\, dt = \int\limits_{Q_T} \chi \operatorname{rot} \boldsymbol{f} \, d\boldsymbol{x}\, dt$$

для всех гладких в Q_T функций χ, обращающихся в нуль на боковой поверхности $\partial\Omega\times(0,T)$ и при $t = T$.

Так же как в [5], можно показать, что обобщенное решение ψ задачи (2.1) в смысле определения 2.3 является слабонепрерывным по t в пространстве $W_2^1(\Omega)$ (и в этом смысле, в частности, удовлетворять начальному условию в (2.1)), а также имеет производные $\nabla\psi_t \in L_\infty(0,T,L_p(\Omega))$ при всех $p < \infty$ (хотя последнее слагаемое в оценке (3.14) из [5] для этих производных изменится).

Оператор $A: \ \Delta\psi \mapsto D^2_{\boldsymbol{x}}\psi$ ограничен во всех $L_p(\Omega)$ и его норма $\|A\|_{\mathcal{L}(L_p)} \leqslant Cp$ (через $D^2_{\boldsymbol{x}} h = \nabla_{\boldsymbol{x}} \otimes \nabla_{\boldsymbol{x}} h$ обозначены все вторые производные h по $\boldsymbol{x}$). В [5] этот факт использован для простейшего экстраполяционного вывода: $A \in \mathcal{L}(L_\infty(\Omega), L_N(\Omega))$, где $N(s) = \mathrm{e}^s$, причем $L_N(\Omega)$ было представлено в виде $L_{\omega,\infty}$ с $\omega(p) = p$. В рассматриваемом случае потребуется более общее утверждение, следующее из утверждения 1.2: $A \in \mathcal{L}(L_M(\Omega), L_\Phi(\Omega))$, где $M = \mathbf{S}[\Phi]$. Согласно утверждению 1.3 предположение $M \in \mathcal{K}_1$ эквивалентно тому, что $\Phi \in \mathcal{K}$. Таким образом, доказано

Утверждение 2.1. *Для обобщенного решения задачи* (2.1) *верно, что* $D^2_{\boldsymbol{x}}\psi \in L_\infty(0,T,L_\Phi(\Omega))$, *где* $\Phi \in \mathcal{K}$.

Дальнейшее доказательство существования обобщенного решения практически дословно повторяет рассуждения в [5], и из этого доказательства следует теорема существования, аналогичная теореме 4.1 в [5], с той лишь разницей, что V следует заменить на $V^{(M)}$, а для $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$ потребовать лишь принадлежности пространству $L_1(0,T,L_M(\Omega))$. Действительно, искомое решение строится как неподвижная точка оператора B: $\psi \mapsto \psi'$ решения задачи

$$\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial t} + \hat\nabla\psi\cdot\nabla\Delta\psi' = -\operatorname{rot} \boldsymbol{f}, \qquad \psi'\big|_{t=0} = \psi_0, \quad \psi'\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.2}$$

Как показано в [5], для подходящим образом определенных решений этой задачи имеет место оценка

$$\max_{t\in[0,T]} \|\Delta\psi'(t,\cdot)\|_{L_p} \leqslant \|\Delta\psi_0\|_{L_p} + \int\limits_0^T \|\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(t,\cdot)\|_{L_p}\, dt \tag{2.3}$$

при всех $p = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Разделив (2.3) на $\omega(p)$ и перейдя к $\sup_p$, получим оценку

$$\|\Delta\psi'\|_{L_\infty(0,T,L_{\omega,\infty})} \leqslant \|\Delta\psi_0\|_{L_{\omega,\infty}} + \|\operatorname{rot}\boldsymbol{f}\|_{L_1(0,T,L_{\omega,\infty})}.$$

Используя эквивалентное представление $L_{\omega,\infty} = L_M$, получим оценку

$$\|\psi'\|_{V_1^{(M)}} \leqslant \|\psi_0\|_{V^{(M)}} + \|\operatorname{rot}\boldsymbol{f}\|_{L_1(0,T,L_M(\Omega))},$$

которая служит аналогом оценки (4.17) в [5]. Дальнейшие рассуждения о неподвижной точке оператора B задачи (2.2) повторяются дословно.

Основной целью п. **2** является доказательство теоремы единственности.

Теорема 2.1. *При $M \in \mathcal{K}_1$ (т. е. при выполнении (1.7)) обобщенное решение задачи (2.1) в классе $V_1^{(M)}$ (т. е. в смысле определения 2.3) единственно.*

Доказательство. Как показано в [5], для разности $\alpha = \psi_1 - \psi_2$ двух решений получается неравенство

$$\int\limits_\Omega |\nabla\alpha|^2\,d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |D^2_{\boldsymbol{x}}\psi_1| \cdot |\nabla\alpha|^2\,d\boldsymbol{x}\,ds. \tag{2.4}$$

В силу утверждения 2.1 $g = |D^2_{\boldsymbol{x}}\psi_1| \in L_\infty(0,T,L_\Phi(\Omega))$ с $\Phi \in \mathcal{K}$. Заменяя при необходимости Φ на некоторую другую $\Phi_1 \in \mathcal{K}$, добьемся включения $g \in K_{\Phi_1}(Q_T)$. Также в силу утверждения 2.1 $|\nabla\alpha|$ ограничен. С учетом утверждения 1.1 из (2.4) получаем $\nabla\alpha = 0$, а значит, и $\alpha = 0$. Теорема 2.1 доказана.

Дальнейшие рассуждения об определении давления p и построении единственного обобщенного решения исходной задачи (1)–(4) следуют логике [5]. Таким образом, доказана

Теорема 2.2. *Решение задачи (1)–(4) в классе $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} \in L_\infty(0,T,L_M(\Omega))$, $M \in \mathcal{K}_1$ (см. (1.7)) существует и единственно (давление p определяется с точностью до аддитивной функции времени).*

Как отмечено в [2], для доказательства единственности решений (1)–(4) размерность течения несущественна. Поясним, каким образом теорема 2.2 обобщается на случай $n = 3$. Если задача (1)–(4) имеет два решения $(\boldsymbol{v}_1, p_1)$ и $(\boldsymbol{v}_2, p_2)$, то для их разности $(\boldsymbol{v}, p)$ имеем задачу

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_2 + \nabla p = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0; \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=0} = 0, \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0. \tag{2.6}$$

Умножая первое уравнение в (2.5) скалярно на $2\boldsymbol{v}$ и интегрируя по $Q_t = \Omega\times(0,t)$, с учетом второго уравнения в (2.5) и условий (2.6) получим

$$\int\limits_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x} = -2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_2)\,d\boldsymbol{x}\,ds, \tag{2.7}$$

где $\boldsymbol{D}$ — симметричная часть градиента (тензор скоростей деформаций). Равенство (2.7) получено формально, но для решений рассматриваемого класса эта процедура может быть строго обоснована [2, 5]. Таким образом, из (2.7) следует неравенство вида (9) с $\psi = |\boldsymbol{v}|^2$ и $g = C|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_2)|$. По аналогии с двумерным случаем сформулируем требование на решение в терминах вихря $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}$. Оператор задачи для нахождения $\boldsymbol{v}$ через $\boldsymbol{\omega}$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.8}$$

точнее, оператор $\boldsymbol{\omega} \mapsto \nabla \otimes \boldsymbol{v}$ (в (2.7) требуется оценка для $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$, но она в данном случае не лучше, чем для $\nabla \otimes \boldsymbol{v}$) при $n = 3$ обладает теми же свойствами (использованными выше), что и при $n = 2$: его норма в $\mathcal{L}(L_p)$ не превышает Cp [16]. Следовательно, для обеспечения равенства $\boldsymbol{v} = 0$ необходимо вновь потребовать $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_2) \in K_\Phi(Q_T)$, $\Phi \in \mathcal{K}$, что приводит к требованию $\boldsymbol{\omega} \in L_\infty(0, T, L_M(\Omega))$, $M \in \mathcal{K}_1$ (т. е. (1.7)). Таким образом, теорема 2.2 верна и при $n = 3$.

Естественно провести сравнение результата теоремы 2.2 с результатом работы [2]. Если изложить результат [2] в обозначениях, используемых в данной работе, то он будет формулироваться следующим образом. Рассматриваются решения класса $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \in L_\infty(0, T, L_{\theta,\infty})$ (при этом в (1.1) вместо sup берется $\overline{\lim}$, что в данном случае несущественно), в котором на θ налагается требование

$$\int^{+\infty} \frac{da}{a\rho(a)} = \infty, \tag{2.9}$$

где $\rho(a) = \inf\limits_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} a^\varepsilon \theta(1/\varepsilon)/\varepsilon$ при $a \gg 1$. Как указано в п. **1**, описанное условие на $\boldsymbol{v}$ равносильно требованию $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \in L_\infty(0, T, L_M(\Omega))$, где $M(v) = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{v^p\, dp}{\theta^p(p)}$, т. е. $M = \mathbf{In}_\infty[\theta]$. Таким образом, возникает вопрос о соотношении условий (1.7) и (2.9). Приведем более удобное описание класса допустимых θ, т. е. удовлетворяющих (2.9).

Лемма 2.1. *Условие* (2.9) *эквивалентно расходимости интеграла*

$$\int^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi\theta(\xi)} = +\infty. \tag{2.10}$$

Доказательство. Имеем $\rho(a) = \inf\limits_{z \gg 1} a^{1/z} z\theta(z) = a^{1/z_*} z_* \theta(z_*)$, где $1 + \mathbf{e}_\theta(z_*) = (\ln a)/z_*$; $\mathbf{e}_\theta(z) = z\theta'(z)/\theta(z)$ — показательная характеристика функции θ (см. [14, 15]). Как отмечено в [2], условие (2.9) заведомо означает более медленный рост функции θ на бесконечности по сравнению с $\ln^{1+\varepsilon}$ (нетрудно заметить, что аналогичное утверждение верно и для (2.10)), т. е. $\mathbf{e}_\theta(z)$ убывает как $1/\ln z$, так что для z_* имеет место асимптотическое представление $z_* = (\ln a)(1 - o(1))$. Теперь эквивалентность (2.9) и (2.10) очевидна. Лемма 2.1 доказана.

Пример 2.1. Если $\theta(p) = \ln^\alpha p$, $\alpha > 0$, то условие (2.10) выполнено при $\alpha \leqslant 1$. Также в класс (2.9) (или, что то же, в класс (2.10)) попадают функции вида $\theta(p) = \ln p \ln\ln p \ldots$ (см. [2]).

Пример 2.2. Рассмотрим функцию $M(v) = \exp(\exp(v^\gamma))$, $\gamma > 0$. Ясно, что (1.7) выполнено при $\gamma \geqslant 1$. Нетрудно показать, что $\theta(p) = \mathbf{Sc}_\infty[M](p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \ln^{1/\gamma} p$. Таким образом, условие (2.9) также выполнено при $\gamma \geqslant 1$.

Сформулируем следующую лемму.

Лемма 2.2. *Условие* (1.7) *эквивалентно расходимости интеграла*

$$\int^{+\infty} \frac{ds}{sM^{-1}(\mathrm{e}^s)} = +\infty. \tag{2.11}$$

Доказательство. Как доказано в [9] (см. также (1.3)), имеет место эквивалентность условий

$$\int^{+\infty} \frac{\ln N(s)}{s^2} = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int^{+\infty} \frac{ds}{sN^{-1}(s)} = +\infty.$$

Переобозначая $N(s) = \ln M(s)$, получим требуемое.

Предварительные построения завершаются следующим асимптотическим представлением.

Лемма 2.3. *Для функций* θ *класса* (2.9) (*или, что то же, класса* (2.10)) *и* M *класса* (1.7) (*или, что то же, класса* (2.11)), *связанных отношением* $M = \mathbf{In}_\infty[\theta]$ (*т. е.* $\theta = \mathbf{Sc}_\infty[M]$), *имеет место асимптотика* $\theta(s) \overset{\mathcal{L}}{\sim} M^{-1}(\mathrm{e}^s)$.

Доказательство. Введем следующие обозначения: $N = M^{-1}$, $\varkappa$ — функция, описывающая решение уравнения $\mathbf{e}_N(\varkappa(p)) = 1/p$ (как показано в [14], для функций рассматриваемого класса такое уравнение имеет единственное решение, поэтому функция $\varkappa$ корректно определена). Тогда $\theta(p) = N(\varkappa(p))\varkappa^{-1/p}(p)$, поскольку $\theta(p) = \max M^{-1}(v)/v^{1/p}$. Для функции $M(u) = \exp(\exp(u^\gamma))$ из примера 2.2 нетрудно вычислить $\ln\varkappa(p) \sim (p/\gamma)/\ln(p/\gamma)$, так что в рассматриваемом классе заведомо $\ln\varkappa(p)$ растет медленнее p. Отсюда, в частности, следует, что $\ln\varkappa(p) - p < 0$ при $p \gg 1$. Рассмотрим величину

$$A \equiv \ln N(\varkappa(p)) - \ln N(\mathrm{e}^p) = \int\limits_{\mathrm{e}^p}^{\varkappa(p)} \frac{N'(\xi)\,d\xi}{N(\xi)} = \int\limits_{\varkappa^{-1}(\mathrm{e}^p)}^{p} \frac{N'(\varkappa(\eta))\varkappa'(\eta)\,d\eta}{N(\varkappa(\eta))} = \int\limits_{\varkappa^{-1}(\mathrm{e}^p)}^{p} \frac{\varkappa'(\eta)\,d\eta}{\eta\varkappa(\eta)}.$$

Оценивая в знаменателе множитель $\eta \in [\varkappa^{-1}(\mathrm{e}^p), p]$ и вычисляя интеграл, получим оценку

$$A \in \Big[\frac{\ln\varkappa(p)}{p} - 1, \frac{\ln\varkappa(p) - p}{\varkappa^{-1}(\mathrm{e}^p)}\Big].$$

Таким образом,

$$-1 \leqslant \ln N(\varkappa(p)) - \ln N(\mathrm{e}^p) - \frac{\ln\varkappa(p)}{p} \leqslant \frac{\ln\varkappa(p) - p}{\varkappa^{-1}(\mathrm{e}^p)} - \frac{\ln\varkappa(p)}{p} < 0$$

(отметим, что последнее выражение стремится к нулю при $p \to \infty$), откуда окончательно получаем $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \theta(p)/N(\mathrm{e}^p) \leqslant 1$, что и требовалось доказать.

Применяя леммы 2.1–2.3, окончательно получаем

Утверждение 2.2. *Условия* (2.9) *и* (1.7) *эквивалентны.*

Таким образом, результат теоремы 2.2 совпадает с результатом работы [2]. Равносильность этих результатов согласуется с неулучшаемостью условий на функцию g в неравенстве (9), доказанной в разных терминах в работах [2] (в терминах, сводящихся к пространствам $L_{\theta,\infty}$) и [9] (в терминах пространств Орлича). Однако, на наш взгляд, преимущество результата, полученного в настоящей работе, заключается в его большей ясности и удобстве проверки условий теоремы.

3. Существование слаборегулярных решений плоской задачи (1)–(4). Рассмотрим задачу (1)–(4) при $n = 2$ и выясним условия на входные данные, особенно на начальные данные $\boldsymbol{v}_0$, при которых удается доказать существование решений. Получающийся при этом класс решений существенно шире рассмотренного в п. **2**, и доказывать единственность этих решений затруднительно.

Как сказано во введении, поставленный вопрос изучался в работе [8], в которой сформулирован класс (6), (7). Заимствуем из [8] некоторые обозначения, приведенные в следующем определении.

Определение 3.1. $S(\Omega)$ есть множество гладких векторных полей $\boldsymbol{v}$, заданных в Ω и удовлетворяющих (2), (4); $S_2(\Omega)$ есть замыкание $S(\Omega)$ в норме $L_2(\Omega)$.

Решения класса, рассматриваемого в п. **3**, описываются в следующем определении.

Определение 3.2. Пусть $\boldsymbol{v}_0 \in S_2(\Omega)$, $\boldsymbol{f} \in L_2(Q_T)$. Функция $\boldsymbol{v} \in L_2(0, T, S_2(\Omega))$ называется слабым обобщенным решением задачи (1)–(4), если она удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \boldsymbol{v}\cdot\Big[\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}\Big]\,d\boldsymbol{x}\,dt+\int\limits_{Q_T}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\xi}\,d\boldsymbol{x}\,dt+\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{\xi}\big|_{t=0}\,d\boldsymbol{x}=0 \tag{3.1}$$

для всех $\boldsymbol{\xi}\in C^\infty(Q_T)$, таких что $\boldsymbol{\xi}\big|_{t=T}=0$, $\boldsymbol{\xi}(t,\cdot\,)\in S(\Omega)$ при всех $t\in[0,T]$.

В определении 3.2 отсутствует p, но давление однозначно (с точностью до аддитивной функции t) восстанавливается по $\boldsymbol{v}$ на основе ортогонального разложения $L_2(\Omega)=S_2(\Omega)\oplus G(\Omega)$ [17], которое также делает определение 3.2 корректным.

Основной целью п. **3** является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть N-функция M такова, что*

$$\bar{M}(s)\prec\!\!\prec \exp{(s^2)}. \tag{3.2}$$

Тогда для любых входных данных класса

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0\in L_M(\Omega); \tag{3.3}$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}\in L_1(0,T,L_M(\Omega))$$

найдется обобщенное слабое решение задачи (1)–(4) *в смысле определения* 3.2, *причем*

$$\boldsymbol{v}\in L_\infty(0,T,S_2(\Omega)),\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\in L_\infty(0,T,L_M(\Omega)); \tag{3.4}$$

а если M удовлетворяет Δ_2-условию, то имеет место оценка

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\|_{L_\infty(0,T,L_M(\Omega))}\leqslant\|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0\|_{L_M(\Omega)}+\|\operatorname{rot}\boldsymbol{f}\|_{L_1(0,T,L_M(\Omega))}. \tag{3.5}$$

Замечание 3.1. В силу не более чем степенной скорости роста рассматриваемых функций M Δ_2-условие имеет чисто технический характер и не накладывает существенных ограничений на M.

Доказательство теоремы 3.1. Обозначим $Y=\{\,\boldsymbol{u}\in S_2(\Omega)\colon \operatorname{rot}\boldsymbol{u}\in L_M(\Omega)\}$, $\|\boldsymbol{u}\|_Y=\|\boldsymbol{u}\|_{L_2(\Omega)}+\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\|_{L_M(\Omega)}$. По условию $\boldsymbol{v}_0\in Y$. Рассмотрим последовательность функций $\boldsymbol{v}_{0k}\in S(\Omega)$, таких что $\boldsymbol{v}_{0k}\to\boldsymbol{v}_0$ $*$-слабо в Y. Например, в качестве функций $\boldsymbol{v}_{0k}$ можно принять усреднения $\boldsymbol{v}_0$. Для каждого k можно построить единственное обобщенное решение $\boldsymbol{v}_k$ задачи (1)–(4) (с $\boldsymbol{v}_{0k}$ вместо $\boldsymbol{v}_0$) в смысле определения в п. **2**, при этом имеет место оценка

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_k\|_{L_\infty(0,T,L_M(\Omega))}\leqslant\|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_{0k}\|_{L_M(\Omega)}+\|\operatorname{rot}\boldsymbol{f}\|_{L_1(0,T,L_M(\Omega))} \tag{3.6}$$

(об этой оценке см., например, [8]), а $\boldsymbol{v}_k$ и $\boldsymbol{v}_{0k}$ удовлетворяют тождеству (3.1). Эти приближенные решения достаточно гладкие (причем с большим запасом) для того, чтобы для них имела место первая энергетическая оценка.

Основную роль в настоящем построении играет компактное вложение $Y\hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)$, которое вытекает из следующих соображений. Как отмечено в работе [18], $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L_{\bar{M}}(\Omega)$ при выполнении условия (3.2), поэтому $L_M(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega)$. В силу метода компенсированной компактности (см. [19]) получаем требуемое вложение $Y\hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)$. В силу (3.6) и первой энергетической оценки множество $\{\boldsymbol{v}_k\}$ ограничено в пространстве $L_\infty(0,T,Y)$, поэтому найдется $\boldsymbol{v}\in L_\infty(0,T,Y)$, такая что $\boldsymbol{v}_k\to\boldsymbol{v}$ $*$-слабо в этом пространстве (после перехода к подпоследовательности). Таким образом, эта функция удовлетворяет (3.4). Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то можно добиться того, чтобы $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_{0k}\to\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0$ в норме $L_M(\Omega)$, тогда в (3.6) можно перейти к пределу и получить (3.5).

Тождество (3.1) для $\boldsymbol{v}_k$ означает, что $\partial\boldsymbol{v}_k/\partial t$ действуют на соленоидальные финитные функции так же, как и выражение $\boldsymbol{f}-\operatorname{div}(\boldsymbol{v}_k\otimes\boldsymbol{v}_k)$, т. е. эти величины совпадают как функционалы над пространством соответствующих пробных функций. Таким образом, $\{\partial\boldsymbol{v}_k/\partial t\}$ ограничено в $L_2(0,T,X^*)$, где $X=\{\boldsymbol{\xi}\in\overset{\circ}{W}{}_\infty^1(\Omega),\ \operatorname{div}\boldsymbol{\xi}=0\}$ (X^* есть специальное расширение пространства $W_1^{-1}(\Omega)$). В силу вложений $Y\hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow X^*$ и соображений компактности типа Обэна — Симона [20, 21] можно утверждать, что $\{\boldsymbol{v}_k\}$ компактно в $L_2(Q_T)$. Таким образом, можно считать, что $\boldsymbol{v}_k \to \boldsymbol{v}$ сильно в $L_2(Q_T)$, но в этом случае предельный переход в тождестве (3.1) для $\boldsymbol{v}_k$ тривиален, и поэтому $\boldsymbol{v}$ есть искомое решение. Теорема доказана.

Замечание 3.2. Из ограниченности $\{\partial \boldsymbol{v}_k/\partial t\}$ в $L_2(0,T,X^*)$ и $\{\boldsymbol{v}_k\}$ в $L_\infty(0,T,Y)$ стандартными рассуждениями получаем сходимость $\boldsymbol{v}_k(t) \to \boldsymbol{v}(t)$ в норме $L_2(\Omega)$ почти при всех $t \in [0,T]$. Поэтому в определении 3.2 можно не требовать выполнения условия $\boldsymbol{\xi}\big|_{t=T} = 0$ и брать интеграл по Q_t вместо Q_T. Тогда возникает дополнительный интеграл $\displaystyle\int\limits_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\xi}\,d\boldsymbol{x}$, в котором также можно перейти к пределу (такого рода определение решения предлагалось в [2]).

Замечание 3.3. Из доказательства теоремы 3.1 следует, что рассматриваемый в ней класс течений является предельно широким, в котором еще имеет место свойство $\boldsymbol{v}(t,\cdot\,) \in L_2(\Omega)$, означающее конечность кинетической энергии течения (во всей области и подобластях), если формулировать класс в терминах вихря.

Возникает вопрос о сравнении результата теоремы 3.1 с результатом работы [8], т. е. о соотношении между условиями (7) и (3.2). Это сравнение особенно важно, поскольку были использованы различные методы. В [8] оценка компактности получалась на основе анализа свойств решений задачи (2.8) с помощью сингулярного интеграла:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_\Omega \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\omega(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}. \tag{3.7}$$

При этом согласно лемме 1 в [8] постоянная γ в (7) вычисляется следующим образом: $\gamma = 4A$, где A есть константа в оценке $\operatorname{mes}\{k(\boldsymbol{z}) > t\} \leqslant (A/t)^2$, причем $k(\boldsymbol{z}) \leqslant C/|\boldsymbol{z}|$, $|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leqslant C/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$. Таким образом, $\gamma = 4C\sqrt{\pi}$, где C — постоянная в оценке ядра $\boldsymbol{g}$ в (3.7), зависящая от диаметра Ω. Для рассматриваемого в данной работе класса можно записать $\bar{M}(s) = \exp\,(s^2/\nu(s))$, где ν — функция, которая на бесконечности растет медленнее квадратичной функции. Для простоты ограничимся монотонно возрастающими функциями ν, тогда существует предел $\lim\limits_{s\to+\infty} \nu(s) \leqslant +\infty$. Легко показать, что условие (3.2) равносильно требованию

$$\lim_{s\to+\infty} \nu(s) = +\infty. \tag{3.8}$$

В то же время условие (7) записывается в виде

$$\int\limits^{+\infty} \exp\Big(\frac{t^2}{\nu(t)} - \frac{t^2}{\gamma}\Big)\frac{2-\mathbf{e}_\nu(t)}{t\nu(t)}\,dt < +\infty.$$

В силу степенного характера асимптотики дроби $(2-\mathbf{e}_\nu(t))/(t\nu(t))$ на бесконечности это условие означает, что

$$\lim_{s\to+\infty} \nu(s) > \gamma. \tag{3.9}$$

Таким образом, для любой фиксированной области Ω условие (7) (или, что то же, условие (3.9)) более слабое (общее), чем условие (3.2) (или, что то же, условие (3.8)), но если рассматривать результат в классе всех областей Ω одновременно, то эти условия равносильны.

Преимущество теоремы 3.1 заключается в более ясной форме условия (3.2) и более слабых требованиях на $\boldsymbol{f}$, чем в [8]. Кроме того, в теореме 3.1 (в отличие от [8]) Δ_2-условие для M, вообще говоря, не требуется, если отсутствует необходимость получения оценки (3.5).

В заключение дадим частичную физическую интерпретацию полученных результатов. Построим соленоидальное поле $\boldsymbol{u}$ в $\mathbb{R}^2$, принадлежащее $L_2(\Omega)$ и имеющее вихрь с заданным характером особенности в окрестности нуля (считаем для определенности $0 \in \Omega$). Это поле будем искать в виде $\boldsymbol{u} = \hat{\nabla}\psi$, где $\psi = \psi(r)$, $r = |\boldsymbol{x}|$. Тогда

$$\omega = \omega(r) = \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = -\Delta\psi(r) = -\psi''(r) - \psi'(r)/r,$$

где штрих означает производную по r. Если ω задано, то для функции тока ψ получаем соотношение

$$\psi'(r) = \frac{A}{r} - \frac{1}{r}\int_0^r \xi\omega(\xi)\,d\xi$$

с произвольной постоянной A. Очевидно,

$$\boldsymbol{u} = \psi'(r)\cdot\begin{bmatrix} x_2/r \\ -x_1/r \end{bmatrix},$$

т. е. $|\boldsymbol{u}| = \psi'(r)$. Так как рассматриваются течения с интегрируемым вихрем, то $\int_0^r \xi\omega(\xi)\,d\xi \to 0$ при $r \to 0$, поэтому $\psi'(r) = (A + o(1))/r$, и для вложения $\boldsymbol{u} \in L_2(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы $A = 0$. Итак, при любой заданной функции $\omega = \omega(r)$ можно построить поле

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2}\int_0^r \xi\omega(\xi)\,d\xi\cdot\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

с вихрем ω и конечной энергией. Условие $\omega \in L_M(\Omega)$ означает сходимость интеграла

$$\int_0 \xi M\Big(\frac{\omega(\xi)}{C}\Big)\,d\xi < \infty \tag{3.11}$$

с некоторой постоянной C. Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то выбор C не играет роли, так как в этом случае $K_M = L_M$.

Пример 3.1. Функция $M \in \mathcal{K}_1$, т. е. удовлетворяет (1.7), например, $M(s) = \exp(\mathrm{e}^s)$ (эта функция M близка к “нижней грани” класса $\mathcal{K}_1$). Положим $\omega(\xi) = \ln\alpha + \ln\ln(1/\xi)$. Легко проверить, что условие (3.11) выполнено при $\alpha < 2$. При этом

$$\int_0^r \xi\omega(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\Big(-\operatorname{Ei}\Big(-2\ln\frac{1}{r}\Big) + r^2\Big(\ln\alpha + \ln\ln\frac{1}{r}\Big)\Big) \sim \frac{1}{2}\,r^2\ln\ln\frac{1}{r},$$

где $\operatorname{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{\mathrm{e}^\eta}{\eta}\,d\eta$, т. е. после умножения на 2 поле (3.10) принимает вид

$$\boldsymbol{u} \sim \Big(\ln\ln\frac{1}{r}\Big)\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Пример 3.2. Функция M удовлетворяет условию (3.2), например, $M(s) = s\ln^\beta s$, $\beta > 1/2$. Положим $\omega(\xi) = \xi^{-2}\ln^{-\alpha-\beta}(1/\xi)$. Легко проверить, что (3.11) выполнено при $\alpha > 1$. При этом

$$\int_0^r \xi\omega(\xi)\,d\xi = \frac{\ln^{1-\alpha-\beta}(1/r)}{\alpha+\beta-1}.$$

После умножения на постоянную поле (3.10) принимает вид

$$\boldsymbol{u} \sim r^{-2}\Big(\ln^{-\gamma}\frac{1}{r}\Big)\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad \gamma > \frac{1}{2}. \tag{3.13}$$

Имея такие поля $\boldsymbol{u}$, можно перемещать особенность из нуля в другие точки области и складывать получающиеся поля друг с другом и с подходящими гладкими соленоидальными полями (таким образом, чтобы сумма удовлетворяла условию (4)). В результате получим начальные поля $\boldsymbol{v}_0$ с точечными особенностями тех классов, которые рассматривались в настоящей работе (т. е. удовлетворяющие (3.3) с функциями M соответствующих классов).

Заключение. Таким образом, часть результатов проведенного исследования могут быть сформулированы в следующем виде: если особенности начальной скорости не хуже, чем особенность (3.13), то возможно построение решения (с конечной кинетической энергией) задачи (1)–(4), которое при всех t сохраняет регулярность не хуже начальной; если же особенности начальной скорости не хуже, чем особенность (3.12), то соответствующее решение при всех t будет принадлежать тому же классу, и в этом классе можно гарантировать единственность решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1.
2. **Yudovich V. I.** Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid // Math. Res. Lett. 1995. N 2. P. 27–38.
3. **Gérard P.** Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionelles (d'après J.-Y.Chemin et J.-M.Delort) // Seminaire Bourbaki, 44ème année (1991–92). N 757. P. 411–444.
4. **Kato T.** On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. V. 25, N 3. P. 188–200.
5. **Юдович В. И.** Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 6. С. 1032–1066.
6. **Юдович В. И.** Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область // Мат. сб. 1964. Т. 64, № 4. С. 562–588.
7. **Кажихов А. В.** Корректность нестационарной задачи о протекании идеальной жидкости через заданную область // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 47. С. 37–56.
8. **Моргулис А. Б.** О существовании двумерных нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости, допускающих вихрь, не суммируемый со степенью, большей единицы // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 209–212.
9. **Кажихов А. В., Мамонтов А. Е.** Об одном классе выпуклых функций и точных классах корректности задачи Коши для уравнения переноса в пространствах Орлича // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 831–850.
10. **Красносельский М. А.** Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. М.: Наука, 1958.
11. **Мамонтов А. Е.** Шкалы пространств L_p и их связь с пространствами Орлича // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, вып. 2. С. 34–57.
12. **Асташкин С. В., Лыков К. В.** Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, "близких" к L_∞ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 974–992.
13. **Мамонтов А. Е.** Экстраполяция линейных операторов из L_p в пространства Орлича, порожденные быстро или медленно растущими N-функциями // Актуальные проблемы современной математики. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1996. Т. 2. С. 95–103.

14. **Мамонтов А. Е.** Интегральные представления и преобразования N-функций. 1 // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 123–145.
15. **Мамонтов А. Е.** Интегральные представления и преобразования N-функций. 2 // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 811–830.
16. **Юдович В. И.** Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1984.
17. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
18. **Похожаев С. И.** О теореме вложения С. Л. Соболева в случае $lp = n$ // Докл. Науч.-техн. конф. по итогам науч.-исслед. работ 1964–1965 гг. М.: Изд-во Моск. энерг. ин-та, 1965. С. 158–170.
19. **Murat F.** Compacité par compensation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1978. V. 5. P. 489–507.
20. **Aubin J. P.** Une théorème de compacité // C. R. Acad. Sci. 1963. V. 256. P. 5042–5044.
21. **Simon J.** Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. V. 146. P. 65–96.

Поступила в редакцию 11/VII 2007 г.