ПМТФ, № 5, 1967

# СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

*В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко*

*(Новосибирск)*

В последние годы получила интенсивное развитие теория слабой турбулентности, т. е. стохастическая теория нелинейных волн [1,2]. В теории слабой турбулентности нелинейность волн предполагается малой, что позволяет, используя гипотезу о случайности фаз отдельных волн, получить кинетическое уравнение для средних квадратов амплитуд волн.

Во многих случаях слабой турбулентности возникает ситуация, когда затухание существенно в области больших волновых чисел и отделено от области, где сосредоточена основная энергия волн (следствие накачки либо начальных условий) широкой областью прозрачности. В работах [3,4] высказывалась гипотеза, что слабая турбулентность в этих случаях вполне аналогична гидродинамической турбулентности при больших числах Рейнольдса в том смысле, что в области прозрачности устанавливается универсальный спектр, определяемый только потоком энергии в область больших волновых чисел. Спектр гидродинамической турбулентности $\varepsilon_k \sim k^{-5/3}$ был получен А. Н. Колмогоровым и А. М. Обуховым [5,6] из соображений размерности. В случае слабой турбулентности спектр получается как точное решение стационарного кинетического уравнения.

Ниже рассматривается случай слабой турбулентности капиллярных волн на поверхности жидкости.

Получено кинетическое уравнение для капиллярных волн. Существенно, что в этом случае основной вклад во взаимодействие дают процессы распада волны на две и слияние двух волн в одну.

Показано, что столкновительный член кинетического уравнения обращается в нуль решением $\varepsilon_k \sim k^{-7/4}$. Высказываются соображения в пользу того, что это решение можно интерпретировать как универсальный спектр в области прозрачности.

**1. Кинетическое уравнение.** Как известно, закон дисперсии волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости имеет вид $\omega_k = \sqrt{\alpha k^3 + gk}$, где $\alpha$ — коэффициент поверхностного натяжения. Плотность жидкости положена равной единице.

Рассматривается случай $k \gg g/\alpha$. Здесь влиянием гравитационных сил можно пренебречь, и спектр приобретает вид $\omega_k = \sqrt{\alpha k^3}$.

Колебания поверхности жидкости без учета вязкости описываются следующей системой уравнений (вязкость впоследствии будет учтена феноменологически):

$$\begin{gathered}\Delta\Phi = 0, \quad z < \eta, \quad \eta_t - \Phi_z = -\eta_x\Phi_x - \eta_y\Phi_y|_{z=\eta} \\ \Phi_t - \alpha(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = {}^1/_2 (\nabla\Phi)^2|_{z=\eta}, \quad \Phi(x, y, z, t)|_{z=-\infty} = 0\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\Phi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости, $\eta(x, y, t)$ — отклонение поверхности от равновесия. Ось $z$ направлена от жидкости. Давление без ограничения общности положено равным нулю. Это уравнение имеет интеграл движения — энергию волн, которая с точностью до членов третьего порядка по $\eta(x, y, t)$ имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\int \alpha[\eta_x^2 + \eta_y^2]\, dx\, dy + \frac{1}{2}\int dx\, dy \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla\Phi)^2\, dz$$

Перейдем в уравнениях (1.1) к фурье-преобразованию по $x$ и $y$, использовав уравнение Лапласа и граничное условие. При этом воспользуемся малостью нелинейности, сохранив в фурье-разложениях члены до второго порядка малости по амплитуде колебаний

$$\frac{\partial\eta_k}{\partial t}-k\Psi_k=\int[(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)-|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_1|]\,\Psi_{k_1}\eta_{k_2}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2$$

$$\frac{\partial\Psi_k}{\partial t}+\alpha k^2\eta_k=\frac{1}{2}\int[(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)+|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|]\,\Psi_{\mathbf{k}_1}\Psi_{\mathbf{k}_2}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2 \qquad (1.2)$$

$$\Psi(x,y,t)=\Phi(x,y,z,t)|_{z=\eta}$$

Удобно перейти к новым переменным $a_k$ и $a_k^*$, комплексным амплитудам волн

$$\eta_k=(4/\alpha k)^{1/4}(a_k+a_{-k}^*),\qquad \Psi_k=-i(4\alpha k)^{1/4}(a_k-a_k^*)$$

Здесь $a_k$, $a_{-k}^*$ нормированы таким образом, что

$$\varepsilon^{(0)}=\int\omega_k|a_k|^2d\mathbf{k} \qquad (1.3)$$

где $\varepsilon_0$ — квадратичная часть энергии волн.

Уравнение для капиллярных волн в этих переменных имеет вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t}-i\omega_k a_k=i\int V_{kk_1k_2}a_{k_1}a_{k_2}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2+2i\int V_{k_1kk_2}a_{k_1}a_{k_2}^*\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2+$$

$$+i\int U_{kk_1k_2}a_{k_1}^*a_{k_2}^*\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2 \qquad (1.4)$$

$$V_{kk_1k_2}=\left(\frac{\alpha}{4\sqrt{2}}\right)^{1/4}\left\{\left(\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_1|}{|\mathbf{k}_2|}\right)^{1/4}[(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2-\mathbf{k}_2^2]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}_1|}\right)^{1/4}[(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)^2-\mathbf{k}^2_1]-\left(\frac{|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}|}\right)^{1/4}[(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)^2-\mathbf{k}^2]\right\}$$

$$U_{kk_1k_2}=\left(\frac{\alpha}{4\sqrt{2}}\right)^{1/4}\left\{\left(\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_1|}{|\mathbf{k}_2|}\right)^{1/4}[\mathbf{k}^2_2-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}_1|}\right)^{1/4}[\mathbf{k}_1^2-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)^2]+\left(\frac{|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}|}\right)^{1/4}[\mathbf{k}^2-(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)^2]\right\} \qquad (1.5)$$

Заметим, что $V_{kk_1k_2}$ и $U_{kk_1k_2}$ — однородные функции степени $^9/_4$, удовлетворяющие условиям симметрии

$$V_{kk_1k_2}=V_{kk_2k_1},\qquad U_{kk_1k_2}=U_{kk_2k_1}=U_{k_2kk_1}$$

Функции $V$ и $U$ зависят только от модулей своих аргументов. Заметим, что капиллярные волны обладают «распадным законом дисперсии» [7], т. е. возможно одновременное выполнение условий

$$\omega_k=\omega_{k_1}+\omega_{k_2},\qquad \mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2$$

Из этого факта следует, что монохроматическая капиллярная волна с волновым вектором $\mathbf{k}$ неустойчива относительно одновременного возбуждения пары волн с волновыми векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ (распадная неустойчивость).

Перейдем к статистическому описанию колебаний. Будем считать систему волн статистически однородной, и, кроме того, фазы отдельных колебаний полностью хаотизованными. Согласно установившейся терминологии [1, 2], будем называть такое состояние слабой турбулентностью волн. Для описания турбулентности можно получить кинетическое уравнение для $n_k=|a_k|^2$ подобно тому, как это сделано в работе А. А. Галеева и

В. И. Карпмана [8]

$$\partial n_k / dt = St(n, n) - 2\nu k^2 n_k \tag{1.6}$$

$$St(n, n) = 4\pi \int |V_{kk_1k_2}|^2 (n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} - n_k n_{k_2}) \times$$
$$\times\, \delta_{k-k_1-k_2} \delta_{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 +$$
$$+ 8\pi \int |V_{k_1kk_2}|^2 (n_{k_1} n_{ki} + n_k n_{k_1} - n_k n_{k_2})\, \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} \delta_{\omega_k - \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \tag{1.7}$$

В кинетическое уравнение введен член — $2\nu k^2 n_k$, где $\nu$ — коэффициент вязкости. Этот член описывает вязкое затухание волн [9].

Согласно формуле (1.3), $n_k$ связано со спектральной плотностью энергии соотношением $\varepsilon_k = \omega_k n_k$. Величину $n_k$ можно интерпретировать как плотность числа волн в $k$-пространстве [1-4].

Уравнение (1.7) обладает законом сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \omega_k n_k\, d\mathbf{k} + 2 \int \nu k^2 \omega_k n_k\, d\mathbf{k} = 0 \tag{1.8}$$

**2. Решение кинетического уравнения.** Рассмотрим уравнение

$$St(n, n) = 0 \tag{2.1}$$

Будем искать цилиндрически-симметричные решения этого уравнения. Воспользуемся независимостью коэффициентной функции от углов, проведем усреднение по углам в уравнении (2.1). Для этого представим $\delta$-функцию от волновых векторов в виде

$$\delta_{k \pm k_1 \pm k_2} = \int e^{i(\mathbf{r},\, k \pm k_1 \pm k_2)}\, d\mathbf{r}$$

Проинтегрировав уравнение (2.1) по углам между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{k}$, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{k}_2$, перейдем к интегрированию по модулям векторов $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, причем $\delta$-функция от волновых чисел заменится выражением

$$\int_0^\infty J_0(kr) J_0(k_1 r) J_0(k_2 r)\, r\, dr = \frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta = {}^1/_2 \sqrt{2\,[k_1^2 k_2^2 + k^2 k_1^2 + k^2 k_2^2 - k^4 - k_1^4 - k_2^4}$$

Здесь $\Delta$ — площадь треугольника, образованного векторами $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$. После этого перейдем в уравнении (2.1) к переменным

$$\omega = k^{3/2}, \qquad \omega_1 = k_1^{3/2}, \qquad \omega_2 = k_2^{3/2}$$

и для сохранения симметрии ядра умножим уравнение на величину $\omega^{1/3}$. После интегрирования по переменной $\omega_2$ получим (2.2)

$$\int_0^\omega P_{\omega,\, \omega_1,\, \omega-\omega_1} (n_{\omega_1} n_{\omega-\omega_1} - n_\omega n_{\omega_1} - n_\omega n_{\omega-\omega_1})\, d\omega_1 +$$
$$+ 2 \int_0^\infty P_{\omega+\omega_1\, \omega,\, \omega_1} (n_{\omega_1} n_{\omega+\omega_1} + n_\omega n_{\omega+\omega_1} - n_\omega n_{\omega_1})\, d\omega_1 = 0$$

$$P_{\omega\omega_1\omega_2} = \frac{(\omega\omega_1\omega_2)^{1/3} |V_{\omega,\, \omega_1,\, \omega_2}|^2}{\sqrt{2\,[\omega_1^{4/3} (\omega - \omega_1)^{4/3} + (\omega\omega_1)^{4/3} + \omega^{4/3} (\omega_1 - \omega)^{4/3} - \omega^{8/3} - \omega_1^{8/3} - (\omega - \omega_1)^{8/3}]}}$$

Здесь $P_{w,\, w_1, w_2}$ — однородная положительно определенная функция степени ${}^8/_3$

$$P_{\omega,\, \omega_1,\, \omega-\omega_1} \sim P_{\omega+\omega_1,\, \omega,\, \omega_1} \sim \omega_1^2 \omega^{8/3} \quad \text{при } \omega_1 \ll \omega \tag{2.3}$$

Будем искать решение уравнения (2.2) в виде $n_\omega = A\omega^s$, где $A$ — произвольная постоянная, а $s$ — неизвестная величина.

Произведем замену переменных во втором интеграле уравнения (2.2) по формулам

$$\omega_1 \to \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}\,\omega_1, \qquad d\omega_1 \to -\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 d\omega_1$$

Функция $P_{\omega+\omega_1,\,\omega_1,\,\omega}$ вследствие ее однородности и симметрии (см. (1.6)) преобразуется следующим образом:

$$P_{\omega+\omega_1,\,\omega_1,\,\omega} \to P_{\omega\omega/\omega_1,\,(\omega-\omega_1)\,\omega/\omega_1,\,\omega_1\omega/\omega_1} \to (\omega/\omega_1)^{8/3} P_{\omega,\,\omega-\omega_1,\,\omega_1}$$

Теперь видно, что после такой замены два интеграла сворачиваются в один, а подынтегральное выражение легко факторизуется.

Уравнение для неизвестной величины $s$, таким образом, имеет вид

$$\int_0^\omega d\omega_1\, \frac{P_{\omega,\,\omega_1,\,\omega-\omega_1}\left[\omega_1^s(\omega-\omega_1)^s - \omega^s\omega_1^s - \omega^s(\omega-\omega_1)^s\right]}{\omega_1^{2s+14/3}(\omega-\omega_1)^{2s+14/3}} \times$$

$$\times \int_0^\omega \left[\omega_1^{2s+14/3}(\omega-\omega_1)^{2s+14/3} - \omega^{2s+14/3}\omega_1^{2s+14/3} - \omega^{2s+14/3}(\omega-\omega_1)^{2s+14/3}\right] d\omega_1 = 0$$

Очевидно, что подынтегральное выражение обращается в нуль при значениях $s$, равных $-1$ и $-{}^{17}/_6$.

Вследствие положительной определенности функции $P$ других степенных решений уравнение (2.1) не имеет.

Первому из уравнения (2.2) соответствует решение $n_\omega^{(1)} = \mathrm{const}/\omega$, т. е. распределение Релея — Джинса.

Второму корню соответствует решение $n_\omega^{(2)} = \mathrm{const}/\omega^{17/16}$.

В $k$-пространстве этим решениям соответствуют распределения

$$n_k^{(1)} = \mathrm{const}\, k^{-1/2}, \qquad n_k^{(2)} = \mathrm{const}\, k^{-13/4}$$

что для спектральной плотности энергии в цилиндрической нормировке дает

$$\varepsilon_k^{(1)} = \mathrm{const}\, k, \qquad \varepsilon_k^{(2)} = \mathrm{const}\, k^{-7/4}$$

Для того чтобы это решение могло иметь физический смысл, необходимо, чтобы интегралы в уравнении (2.7) сходились. Рассмотрим сначала сходимость в области малых $k$.

Заметим, что в первом члене уравнения (2.2) интегрирование по области $\omega - \omega_1 \ll \omega$ дает такой же вклад, как и по области $\omega_1 \ll \omega$. Учитывая это, соберем все члены, обращающиеся в бесконечность при $\omega_1 \to 0$. Получим

$$2\int \{P_{\omega_1,\,\omega_1,\,\omega-\omega_1}[n_\omega n_{\omega-\omega_1} - n_\omega n_{\omega_1}] + P_{\omega+\omega_1,\omega,\,\omega_1}[n_{\omega_1} n_{\omega+\omega_1} - n_\omega n_{\omega_1}]\}\, d\omega_1 \qquad (2.4)$$

С учетом асимптотики (2.3) эти члены имеют порядок

$$\frac{1}{\omega^{1/3}}\frac{\partial n_\omega}{\partial \omega}\int n_{\omega_1}\omega_1^4\, d\omega_1 \qquad (2.5)$$

Отсюда следует, что интегралы в уравнении (2.2) сходятся для обоих полученных решений при $\omega_1 \to 0$. Рассмотрим сходимость при $\omega_1 \to \infty$.

В этом случае наиболее опасными будут члены

$$2n_\omega \int P_{\omega+\omega_1,\, \omega,\, \omega_1} (n_{\omega+\omega_1} - n_\omega)\, \omega^3 n_\omega \, d\omega_1 \sim \omega^3 n_\omega \int \omega_1{}^{2/3} \frac{\partial n_{\omega_1}}{\partial \omega_1} \, d\omega_1 \qquad (2.5)$$

Очевидно, что и в этом предельном случае интегралы в уравнении сходятся для обоих решений.

**3. Физическая интерпретация решений.** Рассмотрим задачу о затухании капиллярных волн. Оценим порядки различных членов в уравнении (1.7). Пусть $\tau$ — характерное время затухания. Член $\partial n/\partial t$ имеет порядок $n/\tau$, тогда как член $St(n, n)$ имеет порядок $\nu^2 n^2 k^2/\omega_k \sim n^2 k^5$ и при достаточно больших $k$ много больше члена $\partial n/\partial t$. Таким образом, член $\partial n/dt$ существен только на малых $k$.

Обозначим границу влияния члена $\partial n/\partial t$ через $a$. Ясно далее, что вязкость влияет только при достаточно больших $k$. Обозначим границу влияния вязкости через $в$. Будем рассматривать случай $в \gg a$. Попытаемся аппроксимировать решение уравнения(1.7) в области $a \ll k \ll в$ при помощи точных решений уравнения (2.1). Рассмотрим сначала распределение Релея — Джинса.

Вследствие сходимости интегралов в уравнении (2.1) для распределения Релея — Джинса главный вклад в интеграл определяется областью $k_1 \sim k$ и имеет порядок $T^2 k^2$. С другой стороны, член $\nu\, k^2 n_k$ имеет порядок $\nu\, T k^{1/2}$. Отсюда видно, что вязкость не может привести к обрезанию распределения Релея — Джинса при больших $k$ и $b = \infty$. Но поскольку полная энергия для распределения Релея — Джинса расходится при больших $k$, это означает, что решение Релея — Джинса не может быть осуществлено в данной задаче.

Рассмотрим теперь решение $n_k = c k^{-17/4}$. Порядок столкновительного члена для этого решения есть $c^2 k^{-7/2}$, а порядок вязкого члена — $\nu c к^{-9/4}$. Отсюда граница влияния вязкого члена $b \sim (c/\nu)^{4/5}$.

Естественно считать, что при $k > b$ решение быстро затухает.

Решение $n_k = c k^{-17/4}$ быстро убывает при $k \gg a$, поэтому основная часть энергии заключена в области $k \sim a$, где существенна нестационарность. Пусть решение в этой области имеет порядок $n_0$. Из условия сшивки на границе энергосодержащей области имеем

$$n_0 \sim c a^{-17/4} \qquad (3.1)$$

Таким образом, истинное решение сильно отличается от решения $n_k = c k^{-17/4}$ в областях $k \lesssim a$ и $k \gtrsim b$. Интегрирование в столкновительном члене производится по всему пространству волновых чисел, в том числе и, по этим областям. При этом вклад области $a \ll k \ll b$ имеет порядок $c^2 k^{-7/2} (a/k)^{13/4}$.

Из формул (2.5) и (2.6) можно оценить вклады областей $k \lesssim a$ и $k \gtrsim b$. Они равны соответственно $c^2 k^{-7/2} (a/k)^{13/4}$ и $c^2 k^{-7/2} (к/b)^{11/4}$. Очевидно, при $a \ll k \ll b$ эти вклады пренебрежительно малы.

Вычислим теперь величину энергии, диссоциируемой в единицу времени. Эта величина задается формулой (1.8). Основной вклад в интеграл определяется верхним пределом

$$p \sim c \int^{b} \frac{\nu k^2 \omega_k}{k^{17/4}} \, k dk \sim \alpha^{1/2} c^2 \qquad (3.2)$$

Находим, что количество диссипируемой энергии или, что то же, поток энергии в область больших $k$ не зависит от величины коэффициента вязкости. Решение в области $a \ll k \ll b$ можно переписать в виде

$$n_k \sim p^{1/2} \alpha^{-1/4} k^{-17/4} \qquad (3.3)$$

Отсюда

$$n_0 \sim p^{1/2} \alpha^{-1/4} a^{-17/4} \qquad (3.4)$$

Из кинетического уравнения (1.7) можно установить, что поток энергии $p$ пропорционален $n^2$, т. е. $n \sim p^{1/2}$. Легко видеть, что $n_k \sim p^{1/2} \alpha^{-1/4} k^{-17/4}$ — единственная степенная функция, удовлетворяющая этому условию по размерности. Полная энергия волн имеет порядок

$$\varepsilon \sim \omega a^2 n_0 \sim \alpha^{1/2} a^{1/2} n_0 \qquad (3.5)$$

Из закона сохранения энергии имеем

$$\varepsilon/\tau \sim p \tag{3.6}$$

Из формул (3.3) — (3.6) находим

$$1 / \tau \sim n_0 a^5 \sim n_0 \varepsilon / \alpha \tag{3.7}$$

Зная $\tau$, легко проверить, что члены $\partial n/\partial t$ и $St(n, n)$ действительно сравниваются при $k \sim a$. Заметим, что кинетическое уравнение применимо только для малой нелинейности, когда $\varepsilon/\alpha \ll 1$. Формулу (3.6) можно переписать в виде $n_0/\tau \sim \partial n_0/\partial t \sim n^2_0 a^5$.

Отсюда $n \sim n_0 \tau/t$, т. е. $n$ убывает обратно пропорционально времени. Найдем границу вязкого затухания

$$b \sim (c / \nu)^{4/5} \sim n_0^{17/5} / \nu^{4/5}$$

Критерий существования области $a \ll k \ll b$ приводит к условию $b \gg a$, которое, как легко убедиться, совпадает с условием $\tau \nu a^2/ \gg 1$, т. е. с требованием, что декремент нелинейного затухания много больше декремента вязкого затухания. Отсюда получаем окончательный критерий применимости теории $\nu a^2/\omega_0 \ll \varepsilon/\alpha \ll 1$.

Построенная картина слабой турбулентности капиллярных волн имеет много общего с картиной турбулентности несжимаемой жидкости при больших числахРейнольдса. В обоих случаях пространство волновых чисел можно разбить на три области — энергосодержащую, промежуточную (инерционную) и область затухания. При этом спектр энергии в энергосодержащей и промежуточной областях не зависит от коэффициента вязкости (коэффициент вязкости определяет только верхнюю границу промежуточной области). В обоих случаях спектр энергии в промежуточной области определяется единственной величиной — потоком энергии из энергосодержащей области. Для гидродинамической турбулентности это позволяет, пользуясь соображениями размерности, найти этот спектр $\varepsilon_k \sim k^{-5/3}$. Турбулентность капиллярных волн содержит дополнительный размерностный параметр $\alpha$, что не позволяет сразу применить размерностные соображения однако после получения кинетического уравнения можно установить, что поток энергии пропорционален квадрату энергии волн, что позволяет сконструировать выражение $\varepsilon_k \sim \alpha^{-1/4} p^{1/2} k^{-17/4}$, которое оказывается точным решением кинетического уравнения.

В теории гидродинамической турбулентности описанная выше картина базируется на гипотезе о локальном характере турбулентности, т. е. на предположении, что интенсивно взаимодействуют лишь масштабы одного порядка. Для капиллярных волн оценки (3.2) фактически обосновывают эту гипотезу. Заметим еще, что остается открытым вопрос об устойчивости построенной картины турбулентности.

В заключение авторы благодарят Р. З. Сагдеева за внимание к работе.

Поступила 7 II 1967

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы. Сб. Вопросы теории плазмы. Атомиздат, 1964, вып. 4, стр. 188.
2. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. Многочастичные аспекты теории турбулентности плазмы. «Nuclear Fusion», 1965, т. 5, № 1, стр. 20.
3. Захаров В. Е. Слабая турбулентность в средах с распадными спектрами. ПМТФ, № 4, стр. 35.
4. Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. Спектр энергии стохастических гравитационных волн. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 6, стр. 1292.
5. Колмогоров А. М. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4, стр. 299.
6. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока. Изв. АН СССР, Сер. геогр. и физ., 1941, т. 5, № 4, 5, стр. 453.
7. Веденов А. А. Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. Атомиздат, 1963, вып. 3, стр. 203.
8. Галеев А. А., Карпман В. И. Турбулентная теория слабонеравновесной разреженной плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, № 2, стр. 592.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.