УДК 532.543

А. Г. Петров, П. Г. Петров

ПЕРЕНОС ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ НАД РАЗМЫВАЕМЫМ ДНОМ

Теория движения взвешенных частиц в турбулентном потоке при малой концентрации представлена в [1, 2]. В [3] предложено учитывать сухое трение по Кулону между твердыми частицами, движущимися в жидкости. В [4—7] исследование движения смеси жидкости и твердых частиц проводится с помощью реологического соотношения в виде комбинации сухого трения для твердой фазы и вязкого трения для жидкой. В [4] рассматривается одномерное турбулентное течение над ровным дном. В [5—7] изучено движение в общей постановке с произвольным рельефом дна и находится выражение для расхода наносов. В [4—7] концентрация частиц в придонном слое наносов предполагается постоянной.

В настоящей работе на основе перечисленных выше результатов предлагается модель среды, которая дает непрерывное описание движения смеси во всей толще потока, начиная от размываемой поверхности дна с предельной концентрацией частиц. Вдали от поверхности дна, где концентрация мала, уравнения переходят в уравнения движения взвешенных частиц в турбулентном потоке, полученные в [1, 2]. Основной результат — аналитическое выражение расхода наносов в турбулентном потоке для общей трехмерной задачи. Теория не требует введения неизвестных эмпирических параметров.

1. Допущения. Рассматривается турбулентный поток тяжелой несжимаемой жидкости с твердыми частицами в области $\xi(x, y) < z < \eta$, где x, y, z — декартова система координат с вертикальной осью z, уравнение свободной поверхности $z = \eta$, а уравнение поверхности дна $z = \xi(x, y)$. В области $z < \xi(x, y)$ расположена неподвижная сыпучая однородная среда. На границе раздела $z = \xi(x, y)$ происходит массообмен. Плотность твердых частиц $\rho_ч$ больше плотности жидкости $\rho_в$.

Предполагается, что основная масса частиц двигается в придонном слое толщины порядка a, много меньшей глубины $h = \eta - \xi$. Характерный горизонтальный размер потока L существенно больше глубины. Таким образом, выполняются неравенства

$$a \ll h \ll L. \tag{1.1}$$

Из основного предположения (1.1) можно получить следствия.

1. Касательные напряжения на вертикальных площадках и ускорение жидкости по вертикали пренебрежимо малы. Давление распределяется по гидростатическому закону. Если ввести ортогональные координаты X, Y, Z (Z — расстояние по нормали вверх от поверхности дна), то давление в придонном слое на уровне Z можно записать в виде

$$p = p_а + \rho_в g(\eta - \xi - Z) + g(\rho_ч - \rho_в)(a_\infty - a(Z)); \tag{1.2}$$

$$a(Z) = \int_0^Z c(Z)\,dZ, \quad a_\infty = a(\infty), \tag{1.3}$$

где $p_а$ — атмосферное давление на поверхности жидкости; второе слагаемое — вес столба чистой жидкости; третье — относительный вес столба твердых частиц в жидкости; $a(Z)$— эффективная толщина слоя частиц; c — объемная концентрация частиц в жидкости.

2. Изменение толщины слоя a по любому направлению много меньше изменения отметки дна

$$|\nabla a| \ll |\nabla \xi|, \ \nabla = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y). \tag{1.4}$$

Поэтому градиент давления в смеси равен градиенту давления в чистой жидкости. В дальнейшем ограничимся рассмотрением течений при числе Фруда, меньшем единицы, где $|\nabla\eta| \ll |\nabla\xi|$, и поэтому

$$\nabla p = -\rho_{в} g \nabla \xi. \tag{1.5}$$

3. Угол γ между вертикалью и нормалью к поверхности дна мал. В дальнейшем учитываем члены первого порядка малости по величине γ, в частности, $\cos\gamma \approx 1$.

4. Через вертикальную площадку диффузионный поток пренебрежимо мал.

2. Уравнение диффузии. Пусть u_X, u_Y — компоненты скорости частиц, параллельных поверхности дна, $u_Z = -w$ — скорость осаждения частиц. Вектор потока частиц $\mathbf{j}$ состоит из конвективного и диффузионного потоков, т. е.

$$j_X = cu_X,\ j_Y = cu_Y,\ j_Z = -cw - \varepsilon_s \partial c/\partial Z. \tag{2.1}$$

Здесь ε_s — коэффициент турбулентной диффузии, который в придонном слое по порядку величины равен $\varepsilon_s \sim v_0 a$ (v_0 — характерная скорость на верхней границе слоя).

Запишем уравнение диффузии

$$\partial c/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{2.2}$$

и оценим слагаемые, входящие в это уравнение:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c u_X}{\partial X} + \frac{\partial c u_Y}{\partial Y} \sim \frac{c v_0}{L},\quad \frac{\partial}{\partial Z}\varepsilon_s\frac{\partial c}{\partial Z} \sim \frac{c v_0}{a}.$$

Из оценок следует, что при $a/L \ll 1$ уравнение диффузии (2.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left(cw + \varepsilon_s\frac{\partial c}{\partial Z}\right) = 0.$$

При удалении от придонного слоя концентрация c стремится к нулю, поэтому после интегрирования имеем

$$cw + \varepsilon_s \partial c/\partial Z = 0. \tag{2.3}$$

3. Уравнения движения. Спроектируем уравнение движения придонного слоя смеси на направления, параллельные дну:

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla p + \partial\tau/\partial Z - \rho g \nabla \xi, \tag{3.1}$$

$$\rho = \rho_{ч} c + \rho_{в}(1 - c) = \rho_{в}(1 + c(s - 1)),\quad s = \rho_{ч}/\rho_{в}$$

(ρ — плотность смеси, $\mathbf{v}$ — скорость смеси).

Касательное напряжение в смеси на площадках, параллельных дну, складывается из напряжений турбулентного движения $\tau_{в}$ и трения между частицами $\tau_{к}$:

$$\tau = \tau_{в} + \tau_{к}. \tag{3.2}$$

Введем характерное касательное напряжение на дне $\tau_0 \sim \lambda\rho_{в} v_0^2/2$.

Коэффициент λ выражается через коэффициент Шези $c_{Ш}$: $\lambda = 2g/c_{Ш}^2$. Для песчаных каналов $c_{Ш}$ меняется в пределах $30 \div 50$ м^{0,5}/с. Отсюда и получается требуемая оценка $\tau_0 \sim 0{,}01\rho_{в} v_0^2/2$. Значения $\tau_{в}$ и $\tau_{к}$ в пределах придонного слоя изменяются от 0 до τ_0. Из оценок

$$\left|\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| \sim \frac{\rho v_0^2}{L},\quad \frac{\partial\tau_{к}}{\partial Z} \sim \frac{\partial\tau_{в}}{\partial Z} \sim \frac{0{,}01\rho_{в} v_0^2}{a}$$

следует, что при $a/L \ll 0{,}01$ ускорением можно пренебречь. Тогда с помощью (1.5) уравнение (3.1) приведется к виду

$$\partial\tau/\partial Z = c(\rho_{ч} - \rho_{в}) g \nabla\xi. \tag{3.3}$$

4. **Реология.** Будем считать, что $\tau_к$ и $\tau_в$ направлены по вектору $\partial v/\partial Z$. Тогда

$$(4.1)\qquad \boldsymbol{\tau} = \tau \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial Z}\Big/\left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial Z}\right|, \quad \tau = \tau_в + \tau_к.$$

Касательное напряжение $\tau_в$ обусловлено турбулентным движением среды и находится по закону Прандтля [8]

$$(4.2)\qquad \tau_в = (\varkappa Z|\partial \mathrm{v}/\partial Z|)^2 \rho_в E(c).$$

Функция $E(c)$ определяет величину вкладов в турбулентное трение жидкой и твердой фаз. В предельном случае, когда твердая фаза не дает вклада, $E(c) = 1 - c$, а когда вклады твердой и жидкой фаз пропорциональны массовым концентрациям, $E(c) = 1 + (s - 1)c$, что и принято в [4]. В [7] принимается промежуточный случай ($E = 1$).

Касательное напряжение $\tau_к$ определяется из закона сухого трения по Кулону

$$(4.3)\qquad \tau_к = p_s \operatorname{tg} \varphi,\ p_s = g(\rho_ч - \rho_в)(a_\infty - a),$$

где φ — угол внутреннего трения (для песка $\operatorname{tg} \varphi \approx 0{,}5$); p_s — дополнительное давление в смеси.

Таким образом, (4.3) можно представить в виде

$$(4.4)\qquad \tau_к = A(a_\infty - a),\ A = (\rho_ч - \rho_в) g \operatorname{tg} \varphi.$$

Для одномерного случая предложенная реология согласуется с приведенной в [4].

5. **Граничные условия.** На границе раздела $Z = 0$ выполняются условия непрерывности скорости и касательного напряжения, откуда получим

$$(5.1)\qquad Z = 0\colon\ \mathrm{v} = 0,\ \tau_в = 0.$$

На верхней границе слоя частиц будем считать заданным касательное напряжение $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}$, а концентрация $c = 0$. Эти условия можно записать как

$$(5.2)\qquad Z \to \infty\colon c \to 0,\ \boldsymbol{\tau} \to \mathbf{T}.$$

Предельные значения в (5.2) достигаются при $Z \sim a_0$, поэтому $\mathbf{T}$ с точностью до малых a_0/h равна касательному напряжению на дне при отсутствии в потоке твердых частиц, $\mathbf{T}$ может быть найдена из известных в гидродинамике соотношений.

6. **Постановка задачи для одномерного движения.** Запишем уравнение диффузии (2.3), уравнение движения (3.3) и реологическое соотношение (4.1):

$$(6.1)\qquad \partial\tau/\partial Z = cA\Gamma,\ \Gamma = (\partial\xi/\partial X)/\operatorname{tg}\varphi;$$

$$(6.2)\qquad cw + \varepsilon_s \partial c/\partial Z = 0;$$

$$(6.3)\qquad \tau = A(a_\infty - a) + \tau_в,\ \tau_в = \rho_в \varepsilon \partial v/\partial Z;$$

$$(6.4)\qquad \varepsilon_s = k\varepsilon,\ \varepsilon = (\varkappa Z)^2 \partial v/\partial Z,\ \varkappa \approx 0{,}4.$$

Коэффициент диффузии ε_s пропорционален коэффициенту турбулентной вязкости ε, а k порядка единицы [9].

Таким образом, для вычисления $c(Z)$ и $v(Z)$ требуется решить систему (6.1)—(6.4) с граничными условиями (5.1) и (5.2).

6а. *Определение касательных напряжений и толщины движущегося слоя частиц.* Проинтегрируем уравнение (6.1) по Z и с помощью (6.3) получим

$$(6.5)\qquad \tau = A(a_\infty - a) + \tau_в = T + A\Gamma(a - a_\infty).$$

Из (6.5) вытекает, что $\tau_в$ — линейная функция от переменной a, причем $\tau_в(0) = 0$, $\tau_в(a_\infty) = T$. Отсюда

$$(6.6)\qquad \tau_в = T(a/a_\infty).$$

Принимая во внимание закон Прандтля (6.3), (6.4), из (6.6) имеем

(6.7) $$\varkappa Z \frac{\partial v}{\partial Z} = u_* \left(\frac{a}{a_\infty E}\right)^{1/2}, \quad u_* = \left(\frac{T}{\rho_в}\right)^{1/2};$$

(6.8) $$\varepsilon = \varkappa Z u_* \left(\frac{a}{a_\infty E}\right)^{1/2}$$

(u_* — динамическая скорость). Из (6.5) и условия, что на дне $a = 0$, $\tau_в = 0$, можно найти

(6.9) $$a_\infty = \frac{T}{A(1+\Gamma)} - \frac{u_*^2}{(s-1)\, g \operatorname{tg} \varphi (1+\Gamma)}, \quad s = \frac{\rho_ч}{\rho_в}.$$

6б. *Распределение концентрации частиц.* Подставим в уравнение диффузии (6.2) выражение (6.8) для турбулентной диффузии ε_s. Тогда для концентрации $c(Z)$ и толщины слоя $a(Z)$ находим

(6.10) $$\alpha c + \left(\frac{a}{a_\infty E}\right)^{1/2} Z \frac{dc}{dZ} = 0, \quad \frac{da}{dZ} = c;$$

(6.11) $$\alpha = w/u_* \varkappa k.$$

Существует предельная концентрация $c_н$ (концентрация насыщения) для движущейся смеси. Поэтому уравнение (6.10) справедливо в области $\delta \leqslant Z$, в которой $c \leqslant c_н$.

В слое $0 \leqslant Z \leqslant \delta$ концентрация постоянна $c = c_н$, значение a линейно растет с увеличением Z. Таким образом, в области $0 \leqslant Z \leqslant \delta$ имеем

(6.12) $$c = c_н, \ a = c_н Z.$$

В области $\delta \leqslant Z$ распределение концентрации надо определить из системы уравнений (6.10) с граничными условиями

(6.13) $$Z = \delta{:}\ a = a_0 = c_н \delta, \ c = c_н, \qquad Z = \infty{:}\ a = a_\infty, \ c = 0.$$

При малой концентрации ($c \ll 1$) можно положить $E = 1$. Тогда первое уравнение (6.10) с учетом (6.13) имеет следующий интеграл:

(6.14) $$2\alpha (a_\infty a)^{1/2} + Z da/dZ - a = (2\alpha - 1) a_\infty.$$

Из (6.14) с учетом условий (6.13) при $Z = \delta$ найдем

(6.15) $$c_н \delta / a_\infty = a_0 / a_\infty = (1 - 1/2\alpha)^2.$$

Уравнение (6.14) с помощью замены

(6.16) $$a/a_\infty = (1 - \psi)^2$$

можно привести к виду

(6.17) $$-2(1-\psi) d\psi / [\psi(2\alpha - 2 + \psi)] = dZ/Z, \ \psi(\delta) = 1/2\alpha,$$

затем проинтегрировать и получить решение краевой задачи (6.10), (6.13):

(6.18) $$Z = \frac{a_\infty (2\alpha - 2 + \psi)^{(2\alpha-1)/(\alpha-1)}}{c_н (2\alpha - 1)^{2\alpha/(\alpha-1)} \psi^{1/(1-\alpha)}}, \qquad c = 2a_\infty (\psi - 1) \frac{d\psi}{dZ} = c_н \left(\frac{(2\alpha-1)^2 \psi}{2\alpha - 2 + \psi}\right)^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

Из решения (6.18) с учетом (6.15) находится асимптотика распределения концентрации при $Z \gg \delta$

(6.19) $$c = c_н \left(\frac{\delta}{Z}\right)^\alpha \left(1 - \frac{1}{(2\alpha-1)^2}\right)^{2\alpha}.$$

Можно показать, что при достаточно больших α с относительной погрешностью $1/(2\alpha - 1)$ решение представляется приближенной формулой

$$c = c_{\text{н}}(\delta/Z)^{\alpha}. \tag{6.20}$$

Полученные результаты (6.18)—(6.20) справедливы при $\alpha > 1$. При $\alpha = 1$ решение имеет вид

$$Z/\delta = 4\psi^2 e^{2/\psi - 4}, \quad c = c_{\text{н}} e^{4-2/\psi}, \quad \delta = a_\infty/4c_{\text{н}}. \tag{6.21}$$

В этом случае при $Z \gg \delta$ асимптотика

$$c = c_{\text{н}} 4\psi^2 \frac{\delta}{Z} \approx \frac{4c_{\text{н}}}{(\ln(Z/\delta))^2}\frac{\delta}{Z}. \tag{6.22}$$

При $\alpha < 1$ решения краевой задачи (6.10), (6.13) не существует.

6в. *Расход наносов.* Найдем расход наносов в предположении, что частицы двигаются со скоростью смеси. С помощью интегрирования по частям и формулы (6.7) получим

$$G = \int_0^\infty \rho_{\text{ч}} cv\,dZ = \int_0^\infty \rho_{\text{ч}} v \frac{\partial}{\partial Z}(a - a_\infty)\,dZ = \rho_{\text{ч}} \int_0^\infty (a_\infty - a)\frac{\partial v}{\partial Z} dZ =$$

$$= \frac{\rho_{\text{ч}} u_*}{\varkappa} \int_0^\infty (a_\infty - a)\left(\frac{a}{a_\infty}\right)^{1/2} dZ.$$

На основе (6.7) и (6.16) запишем

$$G = \frac{\rho_{\text{ч}} a_\infty u_*}{\varkappa} I, \quad I = \int_0^\infty \psi(2-\psi)(1-\psi)\frac{dZ}{Z}. \tag{6.23}$$

Как видно из (6.23), расход зависит от уклона Γ через a_∞. Подставляя вместо a_∞ выражение (6.9), имеем

$$G = \frac{G_0}{1+\Gamma}, \quad G_0 = \frac{\rho_{\text{ч}} u_*^3 I}{\varkappa(s-1) g \operatorname{tg}\varphi}. \tag{6.24}$$

Согласно (6.12), (6.16) и (6.17), найдем

$$\frac{dZ}{Z} = \begin{cases} -\dfrac{2d\psi}{1-\psi}, & 0 \leqslant Z \leqslant \delta, \quad \dfrac{1}{2\alpha} \leqslant \psi \leqslant 1, \\ -\dfrac{2(1-\psi)\,d\psi}{\psi(2\alpha - 2 + \psi)}, & \delta < Z, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \dfrac{1}{2\alpha}. \end{cases} \tag{6.25}$$

С помощью подстановки (6.25) интеграл (6.23) нетрудно вычислить. Приведем асимптотическое разложение по малому параметру $1/2\alpha$:

$$I = 4/3 + 1/2\alpha^2 + \ldots, \quad 1/2\alpha \ll 1. \tag{6.26}$$

В приближении (6.26) основной вклад в расход наносов ($I \approx 4/3$) дает донный слой толщины δ с постоянной концентрацией $c_{\text{н}}$. При $Z \gg \delta$ концентрация взвешенных наносов быстро убывает по степенному закону (6.20) и дает относительно малый вклад ($\sim 1/\alpha^2$).

При $0 < \alpha - 1 \ll 1$ можно получить асимптотическое выражение

$$I \approx 4 \ln \frac{1}{\alpha - 1}, \quad \alpha - 1 \ll 1. \tag{6.27}$$

В этом случае, соответствующем большой скорости потока, относительный вклад в расход взвешенной части наносов существенно превосходит вклад придонного слоя толщины δ.

6г. *Учет относительной скорости частиц.* Спроектируем уравнение баланса сил, действующих на дисперсную фазу в единичном объеме смеси, на плоскость, касательную к поверхности дна:

$$F_{\text{с}} + F_{\text{к}} + F_g = 0. \tag{6.28}$$

Первое слагаемое — сила сопротивления частиц в жидкости, пропорциональная квадрату относительной скорости частиц $v_{\text{от}}$. Ее можно представить в виде

(6.29) $$F_{\text{с}} = \frac{c}{V_{\text{ч}}} f, \quad f = -(\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{в}}) g V_{\text{ч}} \frac{|v_{\text{от}}| v_{\text{от}}}{w^2} \Rightarrow$$

$$F_{\text{с}} = -Ac \frac{|v_{\text{от}}| v_{\text{от}}}{w^2 \operatorname{tg} \varphi},$$

где $V_{\text{ч}}$ — объем отдельной частицы; $c/V_{\text{ч}}$ — число частиц в единице объема; f — сила сопротивления, действующая на отдельную частицу. При $|v_{\text{от}}| = |w|$, очевидно, f равна весу твердой частицы за вычетом силы Архимеда.

Второе слагаемое — сила кулоновского трения, с помощью (4.4) получим

(6.30) $$F_{\text{к}} = \frac{\partial \tau_{\text{к}}}{\partial Z} = -Ac.$$

Наконец, проекцию силы F_g, действующую на частицу в жидкости за счет наличия ускорения силы тяжести, можно представить как

(6.31) $$F_g = -Ac\Gamma.$$

Подставляя выражения (6.29)—(6.31) в уравнение (6.28), найдем величину относительной скорости частиц в жидкости

(6.32) $$v_{\text{от}}^2 = w^2 \operatorname{tg} \varphi (1 + \Gamma),$$

а направление вектора $v_{\text{от}}$ противоположно скорости смеси v.

С учетом относительной скорости (6.32) расход частиц изменится на величину

(6.33) $$\Delta G = \rho_{\text{ч}} v_0 \int_0^\infty c dZ = \rho_{\text{ч}} v_{\text{от}} a_\infty.$$

Таким образом, с помощью (6.23), (6.24) и (6.33) найдем выражение для расхода:

(6.34) $$G' = G + \Delta G = G_0 \left(1 - \frac{u_{*\text{т}}}{u_*}\right) \frac{1}{1 + \Gamma};$$

(6.35) $$u_{*\text{т}} = \frac{\varkappa}{I} |v_{\text{от}}|$$

($u_{*\text{т}}$ имеет смысл динамической скорости, соответствующей началу трогания частиц). Заметим, что в формулы (6.34), (6.35) не входит ни одной неизвестной эмпирической константы. Скорость твердых частиц $v_{\text{ч}}$ имеет одинаковое направление со скоростью $v(Z)$ смеси. При $v < |v_{\text{от}}|$ скорость частиц равна нулю. Таким образом, распределение скорости частиц по глубине определяется следующим образом:

(6.36) $$v_{\text{ч}} = v(Z) + v_{\text{от}},\ Z \geqslant Z_0,\ v_{\text{ч}} = 0,\ 0 \leqslant Z \leqslant Z_0 < \delta.$$

Уровень Z_0, отделяющий неподвижный слой частиц от движущегося, находится из соотношения

$$-v_{\text{от}} = w \sqrt{\operatorname{tg} \varphi} \left(1 + \frac{\Gamma}{2}\right) = v(Z_0) = \int_0^{Z_0} \frac{\partial v}{\partial Z} dZ.$$

С помощью (6.7) и (6.12) последний интеграл вычисляется в форме

$$v(Z_0) = \frac{u_*}{\varkappa} \int_0^{Z_0} \left(\frac{a}{a_\infty}\right)^{1/2} \frac{dZ}{Z} = 2 \frac{u_*}{\varkappa} \left(\frac{c_{\text{н}} Z_0}{a_\infty}\right)^{1/2},$$

откуда $c_н Z_0/a_\infty = (v_0 \varkappa/2u_*)^2$. Согласно (6.32) и (6.35), получим

$$\frac{c_н Z_0}{a_\infty} = \left(\frac{I u_{*т}}{2u_*}\right)^2 = \operatorname{tg}\varphi \frac{\varkappa^2 k^2}{4} \alpha^2 (1 + \Gamma). \tag{6.37}$$

Более точно величина расхода (6.33) должна вычисляться с учетом распределения (6.36), в котором при $0 \leqslant Z \leqslant Z_0$ твердые частицы покоятся. Оценим погрешность в формуле (6.33). Используя (6.37) и (6.35), имеем

$$\rho_ч c_н \int\limits_0^{Z_0} (v + v_{от}) \frac{dZ}{\Delta G} = \frac{2u_*}{3\varkappa |v_{от}|} \left(\frac{c_н Z_0}{a_\infty}\right)^{3/2} = \frac{\varkappa^2 v_{от}^2}{12 u_*^2} = \frac{I^2}{12}\left(\frac{u_{*т}}{u_*}\right)^2.$$

7. Решение общей задачи. Из уравнений диффузии (2.3), движения (3.3) и реологического соотношения (4.1) по аналогии с одномерным случаем вместо (6.5) имеем

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R},\ \mathbf{R} = \mathbf{T} + A\boldsymbol{\Gamma}(a - a_\infty),\ \boldsymbol{\Gamma} = \nabla\xi \operatorname{ctg}\varphi. \tag{7.1}$$

В рамках принятых допущений $\Gamma \ll 1$

$$R = T + A\Gamma_т(a - a_\infty) \tag{7.2}$$

($\Gamma_т$ — проекция вектора $\boldsymbol{\Gamma}$ на вектор $\mathbf{T}$). Из реологического соотношения (4.1)—(4.4) и уравнения (7.1) находим

$$R = \tau_к + \tau_в = A(a_\infty - a) + \tau_в. \tag{7.3}$$

Поскольку $\tau_в = 0$ при $Z = 0$, из уравнений (7.2) и (7.3) следует

$$a_\infty = T/(A(1 + \Gamma_т)). \tag{7.4}$$

По аналогии с одномерной задачей запишем

$$\tau_в = T\frac{a}{a_\infty}, \quad \varkappa Z\left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial Z}\right| = u_*\left(\frac{a}{a_\infty E}\right)^{1/2}. \tag{7.5}$$

Повторяя все рассуждения п. 6в, получим, что уравнения (6.10)—(6.16) справедливы и для двумерного случая.

Поскольку векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{R}$, $\partial\mathbf{u}/\partial Z$ коллинеарны, то из (7.5) вытекает

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial Z} = \frac{u_*}{\varkappa Z}\left(\frac{a}{a_\infty E}\right)^{1/2}\frac{\mathbf{R}}{R}. \tag{7.6}$$

Из (7.1) находим

$$\frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{T}}{T}(1 + \Gamma_т(2\psi - \psi^2)) - \boldsymbol{\Gamma}(2\psi - \psi^2). \tag{7.7}$$

Определим расход наносов в предположении, что частицы двигаются со скоростью смеси, по аналогии с одномерным случаем:

$$\mathbf{G} = \rho_ч \int\limits_0^\infty \mathbf{v} c\, dZ = \rho_ч a_\infty \int\limits_0^\infty (2\psi - \psi^2)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial Z}\, dZ. \tag{7.8}$$

Подставляя выражения (7.6) и (7.7) в (7.8), найдем окончательное выражение для расхода:

$$\mathbf{G} = G_0\left((1 - \Gamma_т(1 - B))\frac{\mathbf{T}}{T} - B\boldsymbol{\Gamma}\right), \quad I_2 = \int\limits_0^\infty (1 - \psi)\psi^2(2 - \psi)^2\frac{dZ}{Z}, \tag{7.9}$$
$$B = I_2/I.$$

Интеграл I вычислен в п. 6в. Аналогично можно найти и интеграл I_2, в результате имеем асимптотические формулы

$$I_2 = \frac{16}{15} + \frac{1}{6\alpha^3}, \quad B \approx \frac{4}{5}, \quad \alpha \gg 1, \quad I_2 = 8\ln\frac{1}{\alpha - 1}, \ B \approx 2, \tag{7.10}$$
$$0 < (\alpha - 1) \ll 1.$$

Учет относительной скорости частиц можно провести аналогично рассуждениям п. 6г. Таким образом, получим

$$G = G_0\left(1 - \frac{u_{*т}}{u_*}\right)\left[\left(1 - \Gamma_т(1 - B)\right)\frac{T}{T} - B\Gamma\right]; \tag{7.11}$$

$$u_{*т} = (\varkappa/I)\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\,(1 + \Gamma_т/2)\,w. \tag{7.12}$$

8. Сравнение с экспериментом. Проведем сравнение с экспериментальными данными теоретических формул для скорости трогания частиц (7.12) и расхода наносов (7.11), подставляя в них известные значения параметров ($\varkappa = 0{,}4$, $\operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}5$). Из (7.12) следует, что на ровном дне отношение $u_{*т}/w \approx 0{,}2$. В [10] на экспериментальном материале установлено, что это отношение меняется в пределах от 0,18 до 0,25.

Как отмечается в [11], одной из наиболее надежных эмпирических формул является следующая [12]:

$$G = \frac{8\rho_ч}{s-1}g^{1/2}\left(\frac{u_*^2}{g} - 0{,}047d\right)^{3/2} \tag{8.1}$$

(d — диаметр частиц). Если воспользоваться для скорости осаждения частиц формулой $w^2 = (s-1)gd$ [11] и (7.12), то (8.1) можно преобразовать к виду

$$G = \frac{8\rho_ч u_*^3}{(s-1)\,g}\left(1 - \left(\frac{u_{*т}}{u_*}\right)^2\right)^{3/2}.$$

Для практики представляет интерес диапазон $u_{*т}/u_* < 0{,}9$, в котором расходы, вычисленные по формулам (8.1) и (6.34), отличаются не более чем на 20 % при $\Gamma = 0$.

Структура формул (7.11) и (7.12) совпадает с полученной ранее в [7] без учета диффузии частиц. Значения коэффициентов в формуле расхода оказываются близкими во всем диапазоне изменения параметра α, кроме близких к единице. Следовательно, проверка формулы в [7] для случая размыва откосов канала относится также и к данной работе, и можно сделать вывод о хорошем соответствии формулы для расхода наносов на неровном дне с экспериментом.

Наконец, полученный степенной закон распределения концентрации (6.20) согласуется с известными результатами [11, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Колмогоров А. Н.** О новом варианте гравитационной теории движения взвешенных наносов М. А. Великанова // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук.— 1954.— № 3.
2. **Баренблатт Г. И.** О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке // ПММ.— 1953.— Т. 17, № 3.
3. **Bagnold R. A.** An approach to the sediment transport problem from general physics.— Wash., 1966.— (Prof. pap./U. S. Geol. Survey, U. S. Depart. of Interior; 422—1).
4. **Kobayashi N.** Fluid and sediment interaction over a plane bed // J. Hydraul. Eng.— 1985.— V. 111, N 6.
5. **Петров П. Г.** Расчет размывов вблизи гидротехнических сооружений // Гидравлика дорожных водопропускных сооружений: Тез. докл. IV Республ. конф. — Саратов, 1985.
6. **Петров П. Г.** Движение донных наносов в турбулентном потоке жидкости // Тр. ЛПИ.— 1988.— № 424.
7. **Петров П. Г.** Движение сыпучей среды в придонном слое потока жидкости // ПМТФ.— 1991.— № 5.
8. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.
9. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
10. **Shields A.** Anwendung der Aechnlichkeits-mechanik und der Turbulenzforschung auf die Gesshiebebewegung // Mitteilungen der Preuss. Versuchanstalt für Wasserbau und Schiffbau.— Berlin, 1936.— H. 26.
11. **Гришанин К. В.** Динамика русловых потоков.— Л.: Гидрометеоиздат, 1979.
12. **Meyer-Peter E., Miller R.** Formulas for bed-load transport // Proc. II Congr. IAHR, Stockholm, 1948.— V. 3.

13. Rouse H. Experiment on the mechanics of sediment suspension // Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge. Mass, 1938.

г. Москва *Поступила 18/II 1991 г., в окончательном варианте — 27/VI 1991 г.*

УДК 532.546

Ш. А. Ершин, У. К. Жапбасбаев

МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В АППАРАТАХ С ПРОНИЦАЕМОЙ ПЕРЕГОРОДКОЙ

Приведена модель турбулентного движения несжимаемой жидкости в аппаратах с неподвижным зернистым слоем, построенная с привлечением современных представлений механики взаимопроникающих континуумов и полуэмпирических теорий турбулентности. Результаты расчета находятся в удовлетворительном согласии с опытом и объясняют известный эффект появления макронеоднородностей в профилях скорости за пористой средой.

Аппараты с проницаемой перегородкой (неподвижный зернистый слой, пакет сеток, пористая вставка) нашли широкое применение в различных технологических процессах [1]. Отличительной особенностью их аэродинамики является то, что поток жидкости (газа) полностью перетекает из одной камеры в другую через пористую среду. При этом на структуру течения в свободных частях аппарата существенным образом оказывает влияние движение в проницаемой перегородке. В последней преобладают струйные и отрывные течения из-за многократного изменения площади проходного сечения пор и направления. Согласно опытным данным [2—5], в порах зернистого слоя достигается высокая степень турбулентности за счет вихреобразования, создаваемого отрывом струй, которое затем распадается между зернами. При этом турбулентные моли состоят из элементов с широким диапазоном линейных масштабов и в макрообъеме имеет место локальное равновесие между генерацией и диссипацией энергии турбулентности. Следуя Хинце [6], можно считать, что интенсивный подвод энергии в каскадном процессе определяется самыми крупными элементами турбулентности, масштабы которых связаны с масштабами среднего движения. В зернистом слое связь между кинетическими энергиями пульсационного и осредненного движения предложена в [7] в виде

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1-\varepsilon}{2} |\mathbf{V}|^2 \tag{1}$$

(ε — порозность зернистого слоя). С помощью этой зависимости проведены расчеты молярной составляющей коэффициента эффективной теплопроводности (диффузии), которые показали удовлетворительное согласие расчетных и опытных данных.

В поровом пространстве происходит интенсивная диссипация кинетической энергии турбулентности. Причем основную роль играют инерционные силы в струйных и отрывных течениях. Поэтому, согласно гипотезе [8], можно считать, что диссипация энергии пульсационного движения зависит от кинетической энергии турбулентности k и среднего линейного размера вихрей, связанного с масштабом осредненного течения. В пористых средах характерным размером является диаметр элементов зернистого слоя, следовательно, диссипацию кинетической энергии турбулентности можно представить в форме

$$\varepsilon = \left[\frac{1}{4}(1-\varepsilon)\right]^{1/2} \frac{k^{3/2}}{d_з}, \tag{2}$$