

УДК 532.582.33

ОБРАЗОВАНИЕ КАВЕРНЫ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ДВИЖЕНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

М. В. Норкин

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону

E-mail: norkin@math.rsu.ru

Рассматривается совместное движение идеальной жидкости и полностью погруженного в нее кругового цилиндра на малых временах. Предполагается, что цилиндр, первоначально находившийся в состоянии покоя, движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением. Исследована динамика внутренней и внешней свободных границ жидкости на малых временах. Проведен асимптотический анализ формы внутренней свободной границы вблизи точек отрыва. Показано, что при большом ускорении кругового цилиндра позади него образуется достаточно большая каверна, при этом наблюдается сильное возмущение внешней свободной границы жидкости над поверхностью цилиндра.

Ключевые слова: малые времена, отрыв жидкости, асимптотический анализ, динамика точек отрыва, внутренняя свободная граница, каверна, число Фруда.

На начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с большими ускорениями происходит отрыв жидкости от его поверхности и образуется каверна. Формы каверны и внешней свободной границы жидкости зависят от числа Фруда, разности давлений на свободной поверхности жидкости и в каверне, глубины погружения цилиндра и расстояния до неподвижных твердых границ. В естественных условиях в каверне образуются пары жидкости или газа с давлениями, близкими к нулю (начало кавитации). На данную ситуацию можно оказывать влияние, задавая давление в каверне искусственным путем или рассматривая жидкости с различными плотностями. При этом важную роль играет некоторый безразмерный параметр, характеризующий разность давлений, который в данной работе аналогичен числу кавитации [1].

Близкие задачи о движении кругового цилиндра в жидкости на малых временах без учета отрыва частиц жидкости от его поверхности рассматривались в [2, 3]. В этих работах изучалось влияние различных движений цилиндра на генерацию поверхностных волн. Следует отметить, что асимптотический анализ на малых временах проводился также в задаче о вертикальном ударе плавающего тела [4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим круговой цилиндр, полностью погруженный в идеальную несжимаемую жидкость, занимающую ограниченную область прямоугольной формы. Считаем, что цилиндр, первоначально находившийся в состоянии покоя, движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением w_0 . Предполагается, что в момент начала движения происходит отрыв частиц жидкости от поверхности тела, в результате чего позади цилиндра образуется каверна. Математическая постановка задачи,

записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, жестко связанной с цилиндром, имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0, & \mathbf{R} &\in \Omega(t), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= \dot{h}(t)n_x, & \mathbf{R} &\in S_{11}(t), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{\text{Fr}^2}(y-H) - \frac{1}{2}\chi &= 0, & \mathbf{R} &\in S_{12}(t), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \dot{h}(t)\cos\theta &= \frac{\partial r_f}{\partial\theta} \left(\frac{1}{(1+r_f(\theta,t))^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\sin\theta}{1+r_f(\theta,t)} \dot{h}(t) \right) + \frac{\partial r_f}{\partial t}, & \mathbf{R} &\in S_{12}(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{\text{Fr}^2}(y-H) &= 0, & \mathbf{R} &\in S_2(t); \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \frac{\partial\xi}{\partial x} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \dot{h}(t) \right) + \frac{\partial\xi}{\partial t}, & \mathbf{R} &\in S_2(t); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad x = H_r - \frac{t^2}{2}, \quad x = -H_L - \frac{t^2}{2}; \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, 0) &= 0, & r_f(\theta, 0) &= 0, & \xi(x, 0) &= 0; \\ h(t) &= t^2/2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам

$$t' = \sqrt{a/w_0}t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad h'(t') = ah(t), \quad \Phi' = a\sqrt{w_0a}\Phi, \quad p' = \rho w_0 a p,$$

где штрихами отмечены размерные величины.

Подвижные координаты x, y связаны с неподвижными координатами x_1, y_1 соотношениями $x = x_1 - h(t), y = y_1$.

В приведенных выше выражениях Φ — потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный в подвижной системе координат; $h(t)$ — закон движения цилиндра; a — радиус цилиндра; $\Omega(t)$ — область, занятая жидкостью; $S_{11}(t)$ — часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ — оторвавшаяся от поверхности цилиндра внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ — свободная граница жидкости, которая первоначально была горизонтальной; $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости; p — давление; \mathbf{R} — радиус-вектор с координатами (x, y) .

Функции $r_f = r_f(\theta, t)$ и $\xi = \xi(x, t)$ определяют возмущения внутренней и внешней свободных границ жидкости. В подвижной системе координат уравнения для этих функций имеют вид

$$r = 1 + r_f(\theta, t), \quad y = H + \xi(x, t).$$

На внутренней и внешней свободных границах задаются динамические и кинематические условия. Кинематическое условие на $S_{12}(t)$ записывается в полярных координатах r, θ ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$).

Задача (1.1)–(1.4) содержит безразмерные параметры

$$\text{Fr} = \sqrt{\frac{w_0}{g}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho w_0 a}$$

(Fr — число Фруда; коэффициент χ характеризует разность давлений; p_a — атмосферное давление; p_c — давление в каверне; g — ускорение свободного падения).

В точках пересечения внутренней свободной границы с поверхностью цилиндра (в точках отрыва) ставится условие Кутты — Жуковского, согласно которому скорость жидкости в этих точках должна быть конечной.

Подставив решение задачи (1.1)–(1.4) в интеграл Коши — Лагранжа, определим давление в жидкости

$$p = p_0 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \dot{h}(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{\text{Fr}^2} (y - H) \right) \quad (1.5)$$

(p_0 — безразмерное атмосферное давление).

Следует отметить, что давление в жидкости не может опуститься ниже некоторой очень малой положительной величины p_d . Возможным нижним пределом p_d является давление насыщенных паров жидкости, зависящее от температуры [1].

2. Асимптотическое решение задачи на малых временах. Важной особенностью рассматриваемой задачи является то, что на малых временах отрыв жидкости происходит по конечному, в большинстве случаев не малому, участку поверхности цилиндра. Это означает, что при $t \rightarrow 0$ угловые координаты точек отрыва внутренней свободной границы $\theta_{s1}(t)$, $\theta_{s2}(t)$ имеют предельные значения θ_{s1} , θ_{s2} , причем $\theta_{s1} - \theta_{s2} \neq 0$. Чтобы в дальнейшем учесть динамику точек отрыва, необходимо выполнить замену переменных, при которой точки отрыва, зависящие от времени, переходят в фиксированные точки, соответствующие начальному моменту времени. Для этого запишем задачу (1.1)–(1.4) в полярных координатах и выполним замену переменной по угловой координате θ :

$$\alpha = \frac{\theta_{s2} - \theta_{s1}}{\theta_{s2}(t) - \theta_{s1}(t)} [\theta - \theta_{s1}(t)] + \theta_{s1}.$$

В результате для определения функций $\varphi(\alpha, r, t) = \Phi(r \cos \theta(\alpha, t), r \sin \theta(\alpha, t), t)$, $\eta(\alpha, t) = r_f(\theta(\alpha, t), t)$, $\xi(x, t)$ получаем следующую начально-краевую задачу в переменных α , r , t :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} (1+k)^2 = 0, \quad \mathbf{R} \in \Omega(t),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \dot{h}(t) \cos \theta(\alpha, t), \quad \mathbf{R} \in S_{11}(t),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - (1+k) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \dot{h}(t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta(\alpha, t) - \frac{1}{r} \sin \theta(\alpha, t) (1+k) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + \quad (2.1)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 (1+k)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{\text{Fr}^2} (r \sin \theta(\alpha, t) - H) - \frac{\chi_1}{2} = 0,$$

$$\mathbf{R} \in S_{12}(t) \cup S_2(t);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \dot{h}(t) \cos \theta(\alpha, t) &= (1+k) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \left(\frac{1+k}{(1+\eta(\alpha, t))^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\sin \theta(\alpha, t)}{1+\eta(\alpha, t)} \dot{h}(t) \right) + \\ &+ \frac{\partial \eta}{\partial t} - (1+k) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \mathbf{R} \in S_{12}(t); \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$\varphi(\alpha, r, 0) = 0; \quad (2.3)$$

$$\chi_1 = \chi, \quad \mathbf{R} \in S_{12}(t), \quad \chi_1 = 0, \quad \mathbf{R} \in S_2(t),$$

$$k = (k_1 - k_2)(\theta_{s2}(t) - \theta_{s1}(t))^{-1}, \quad \theta(\alpha, t) = (\alpha + k\theta_{s1}(t) + k_1)(1+k)^{-1}, \quad (2.4)$$

$$k_1 = \theta_{s1}(t) - \theta_{s1}, \quad k_2 = \theta_{s2}(t) - \theta_{s2}.$$

Кинематическое условие на внешней свободной границе (1.2) и граничные условия на твердых стенках (1.3) сохраняют свой вид, но производные потенциала Φ и уравнения рассматриваемых твердых границ определяются формулами

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta(\alpha, t) - \frac{\sin \theta(\alpha, t)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} (1+k), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta(\alpha, t) + \frac{\cos \theta(\alpha, t)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} (1+k),\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$r \sin \theta(\alpha, t) = -H_b, \quad r \cos \theta(\alpha, t) = H_r - t^2/2, \quad r \cos \theta(\alpha, t) = -H_L - t^2/2.$$

Решение задачи (2.1)–(2.5) будем искать в виде разложений ($t \rightarrow 0$)

$$\varphi = t\varphi_0(\alpha, r) + t^3\varphi_1(\alpha, r) + o(t^3); \quad (2.6)$$

$$\eta(\alpha, t) = t^2\eta_0(\alpha) + t^4\eta_1(\alpha) + o(t^4); \quad (2.7)$$

$$\xi(x, t) = t^2\xi_0(x) + t^4\xi_1(x) + o(t^4); \quad (2.8)$$

$$k_1 = c_1 t^2/2 + o(t^2), \quad k_2 = c_2 t^2/2 + o(t^2), \quad (2.9)$$

где величины c_1, c_2 имеют смысл угловых ускорений точек отрыва в начальный момент времени.

Подставляя (2.6)–(2.9) в уравнение и граничные условия задачи (2.1)–(2.5), выполняя необходимые разложения на малых временах и собирая коэффициенты при одинаковых степенях t , для определения функций $\varphi_0 = \varphi_0(\alpha, r)$ и $\varphi_1 = \varphi_1(\alpha, r)$ получаем смешанные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Сводя далее уравнение Пуассона к уравнению Лапласа и выделяя явно зависимость функции φ_1 от коэффициентов c_1 и c_2 , окончательно имеем ($x_\alpha = r \cos \alpha, y_\alpha = r \sin \alpha$):

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_0 &= 0, \quad \mathbf{R} \in \Omega(0), \quad \varphi_0 = 0, \quad y_\alpha = H, \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} &= \cos \alpha, \quad \mathbf{R} \in S_{11}(0), \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} \chi - \frac{1}{\text{Fr}^2} (\sin \alpha - H), \quad \mathbf{R} \in S_{12}(0),\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_\alpha} &= 0, \quad y_\alpha = -H_b, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\alpha} = 0, \quad x_\alpha = H_r, \quad x_\alpha = -H_L; \\ \varphi_1 &= \frac{1}{2} c \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \alpha + (c_1 - c\theta_{s1})u + w, \quad c = (c_2 - c_1)(\theta_{s2} - \theta_{s1})^{-1};\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\Delta u = 0, \quad \mathbf{R} \in \Omega(0), \quad u = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_\alpha} x_\alpha, \quad y_\alpha = H,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{2} \sin \alpha, \quad \mathbf{R} \in S_{11}(0), \quad u = -\frac{1}{2} \text{Fr}^{-2} \cos \alpha, \quad \mathbf{R} \in S_{12}(0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y_\alpha^2} x_\alpha - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\alpha} \right), \quad y_\alpha = -H_b,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha^2} y_\alpha - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_\alpha} \right), \quad x_\alpha = H_r, \quad x_\alpha = -H_L,$$

$$\Delta w = 0, \quad \mathbf{R} \in \Omega(0), \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \mathbf{R} \in S_{11}(0),$$

$$w = -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\sin \alpha}{\text{Fr}^2} \right) (\eta_0(\alpha) - \cos \alpha) - \frac{1}{6} \left[\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{\cos^2 \alpha}{\text{Fr}^4} \right], \quad \mathbf{R} \in S_{12}(0),$$

$$w = -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_\alpha} + \frac{1}{\text{Fr}^2} \right) \xi_0(x_\alpha) - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_\alpha} \right)^2, \quad y_\alpha = H,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y_\alpha} = 0, \quad y_\alpha = -H_b, \quad \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha^2}, \quad x_\alpha = H_r, \quad x_\alpha = -H_L.$$

Для коэффициентов разложений (2.7), (2.8) получаем следующие равенства:

$$\eta_0(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \cos \alpha \right),$$

$$4\eta_1(\alpha) = - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\sin \alpha}{\text{Fr}^2} \right) \eta_0(\alpha) + \frac{1}{2} c \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial \alpha} \alpha + (c_1 - c\theta_{s1}) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} +$$

$$+ (c_1 + c(\alpha - \theta_{s1})) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial \alpha} + \sin \alpha \right) - \eta'_0(\alpha) \left(\sin \alpha - \frac{\cos \alpha}{\text{Fr}^2} \right),$$

$$\xi_0(x_\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_\alpha},$$

$$4\xi_1(x_\alpha) = (c_1 - c\theta_{s1}) \frac{\partial u}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial w}{\partial y_\alpha} + \xi'_0(x_\alpha) [1 + H(c_1 - c\theta_{s1})].$$

Исследуем задачу (2.10) и определим предельные (при $t \rightarrow 0$) значения координат точек отрыва. С этой целью введем в рассмотрение новую функцию

$$v = \chi/2 - \text{Fr}^{-2}(y - H) - \varphi_0.$$

Потребуем, чтобы эта функция была неотрицательной на смоченной поверхности цилиндра $S_{12}(0)$. Это условие означает, что в главном приближении давление в жидкости не может опуститься ниже давления в каверне. Учитывая также неравенство

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \geq \cos \alpha, \quad \mathbf{R} \in S_{12}(0),$$

которое является следствием отрыва, сведем задачу (2.10) к смешанной краевой задаче теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности цилиндра:

$$\Delta v = 0, \quad \mathbf{R} \in \Omega(0), \quad v = \chi/2, \quad y_\alpha = H,$$

$$-\frac{\partial v}{\partial r} = \text{Fr}^{-2} \sin \alpha + \cos \alpha, \quad v \geq 0, \quad \mathbf{R} \in S_{11}(0),$$

$$-\frac{\partial v}{\partial r} \geq \text{Fr}^{-2} \sin \alpha + \cos \alpha, \quad v = 0, \quad \mathbf{R} \in S_{12}(0), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y_\alpha} = -\text{Fr}^{-2}, \quad y_\alpha = -H_b, \quad \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} = 0, \quad x_\alpha = H_r, \quad x_\alpha = -H_L.$$

Из общей теории решения краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных с односторонними ограничениями на границе области следуют теорема существования и единственности решения задачи (2.12) и отсутствие особенностей функции v вблизи точек отрыва: $v \sim |\mathbf{R} - \mathbf{R}_s|^{3/2}$, где \mathbf{R}_s — радиус-вектор соответствующей точки [5]. Таким образом, в главном приближении условие Кутты — Жуковского выполнено.

Чтобы удовлетворить условию Кутты — Жуковского в следующем приближении, необходимо сгладить граничную функцию $w(\alpha, 1)$ в малых окрестностях точек отрыва (порядка 0,01) и подобрать величины c_1, c_2 , так чтобы в этих точках функция φ_1 была непрерывно дифференцируемой (функция $w(\alpha, 1)$ непрерывна на отрезке $[\theta_{s1}, \theta_{s2}]$, а ее

производная в точках θ_{s1} , θ_{s2} имеет корневые особенности). Это условие можно записать одним из следующих способов (в зависимости от того, с какой стороны происходит приближение к точкам отрыва):

$$\lim_{\alpha \rightarrow \theta_{s1}-0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \sqrt{\theta_{s1} - \alpha} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \theta_{s2}+0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \sqrt{\alpha - \theta_{s2}} = 0 \quad (2.13)$$

или

$$\lim_{\alpha \rightarrow \theta_{s1}+0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \sqrt{\alpha - \theta_{s1}} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \theta_{s2}-0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \sqrt{\theta_{s2} - \alpha} = 0.$$

Используя, например, формулы (2.13) и учитывая (2.11), получаем равенство

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \alpha^2} \alpha + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \right) + (c_1 - c \theta_{s1}) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в (2.13) и используя выражение для c (2.11), имеем систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных c_1 , c_2 . Решая эту систему, находим искомые величины

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{d_1 d_{22} - d_2 d_{12}}{d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}}, & c_2 &= \frac{d_2 d_{11} - d_1 d_{21}}{d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}}, \\ d_{11} &= -\theta_{s1} a_1 / 2 + \theta_{s2} a_2, & d_{12} &= \theta_{s1} (a_1 / 2 - a_2), & d_{21} &= \theta_{s2} (b_2 - b_1 / 2), \\ d_{22} &= \theta_{s2} b_1 / 2 - \theta_{s1} b_2, & d_1 &= -a_3 (\theta_{s2} - \theta_{s1}), & d_2 &= -b_3 (\theta_{s2} - \theta_{s1}), \\ a_1 &= \lim_{\alpha \rightarrow \theta_{s1}-0} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \alpha^2} \sqrt{\theta_{s1} - \alpha}, & a_2 &= \lim_{\alpha \rightarrow \theta_{s1}-0} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sqrt{\theta_{s1} - \alpha}, & a_3 &= \lim_{\alpha \rightarrow \theta_{s1}-0} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \sqrt{\theta_{s1} - \alpha}, \\ b_1 &= \lim_{\alpha \rightarrow \theta_{s2}+0} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \alpha^2} \sqrt{\alpha - \theta_{s2}}, & b_2 &= \lim_{\alpha \rightarrow \theta_{s2}+0} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sqrt{\alpha - \theta_{s2}}, & b_3 &= \lim_{\alpha \rightarrow \theta_{s2}+0} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \sqrt{\alpha - \theta_{s2}}. \end{aligned}$$

Для полного решения данной задачи на малых временах необходимо также провести асимптотический анализ формы внутренней свободной границы вблизи точек отрыва. В окрестности первой точки отрыва коэффициенты разложения (2.7) изменяются следующим образом:

$$\eta_0(\alpha) \sim \frac{1}{2} \beta_1(\theta_{s1}) \sqrt{\alpha - \theta_{s1}}, \quad \eta_1(\alpha) \sim -\frac{1}{16} \frac{\beta_1(\theta_{s1}) \beta}{\sqrt{\alpha - \theta_{s1}}}.$$

Здесь постоянная β определяется равенством

$$\beta = \sin \theta_{s1} - \text{Fr}^{-2} \cos \theta_{s1} - c_1.$$

Следовательно, в окрестности первой точки отрыва разложение (2.7) неприменимо. В этом случае нужно построить внутреннее решение, справедливое в окрестности данной точки, и согласовать его с внешним разложением (2.7).

Так как в окрестности первой точки отрыва первые два члена разложения (2.7) имеют одинаковый порядок по t , если $\alpha - \theta_{s1} = O(t^2)$ при $t \rightarrow 0$, то переменную τ во внутреннем решении целесообразно представить в виде

$$\tau = \frac{\alpha - \theta_{s1}}{t^2}. \quad (2.15)$$

При этом внешнее решение принимает вид

$$\eta(\alpha, t) = \frac{1}{2} \beta_1(\theta_{s1}) t^3 \left(\sqrt{\tau} - \frac{\beta}{8\sqrt{\tau}} \right) + o(t^3), \quad t \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

В соответствии с (2.16) внутреннее представление свободной границы будем искать в виде

$$\eta(\alpha, t) = \beta_1(\theta_{s1})t^3 H(\tau)/2 + o(t^3), \quad (2.17)$$

где $H(\tau)$ — неизвестная функция.

Проводя в уравнении (2.2) замену переменной (2.15), используя разложения (2.6), (2.17) и ограничиваясь только главными по t членами (порядка t^2), для определения функции $H(\tau)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с нулевым начальным условием и условием срачивания с внешним решением на бесконечности, которое следует из (2.16):

$$\begin{aligned} (\tau - \beta/2)H'(\tau) - 3H(\tau)/2 &= -\sqrt{\tau}, & 0 < \tau < \infty, \\ H(0) = 0, & \quad H(\tau) = \sqrt{\tau} - \beta/(8\sqrt{\tau}), & \tau \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В случае $\beta \geq 0$ решение задачи (2.18) имеет вид

$$\begin{aligned} H(\tau) &= 4\tau^{3/2}/(3\beta), & 0 \leq \tau \leq \beta/2, \\ H(\tau) &= 4[\tau^{3/2} - (\tau - \beta/2)^{3/2}]/(3\beta), & \beta/2 \leq \tau < \infty. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Аналогично находится внутреннее представление свободной границы в окрестности второй точки отрыва:

$$\begin{aligned} \eta(\alpha, t) &= \beta_2(\theta_{s2})t^3[\sqrt{\tau} - \beta_1/(8\sqrt{\tau})]/2 + o(t^3), & t \rightarrow 0, \\ \tau &= (\theta_{s2} - \alpha)/t^2, & \eta_0(\alpha) \sim \beta_2(\theta_{s2})\sqrt{\theta_{s2} - \alpha}/2, & \beta_1 = c_2 - \sin \theta_{s2} + \text{Fr}^{-2} \cos \theta_{s2}, \\ \eta(\alpha, t) &= \beta_2(\theta_{s2})t^3 H_1(\tau)/2 + o(t^3). \end{aligned}$$

Функция $H_1(\tau)$ определяется решением задачи (2.18), в которой β следует заменить на β_1 ($\beta_1 \geq 0$). Следовательно, функция $H_1(\tau)$ имеет вид (2.19), где параметр β заменен на β_1 .

3. Численная реализация и анализ результатов. При решении смешанной краевой задачи (2.12) с неизвестной априори областью контакта можно использовать те же методы и приемы, что и при решении задачи об ударе с отрывом (обзор соответствующих работ приведен в [6–8]). Для определения точек отрыва в начальный момент времени применяется специальный итерационный процесс, позволяющий свести данную нелинейную задачу к последовательному решению линейных краевых задач, которые решаются численно с использованием пакета конечных элементов FreeFem++ [9].

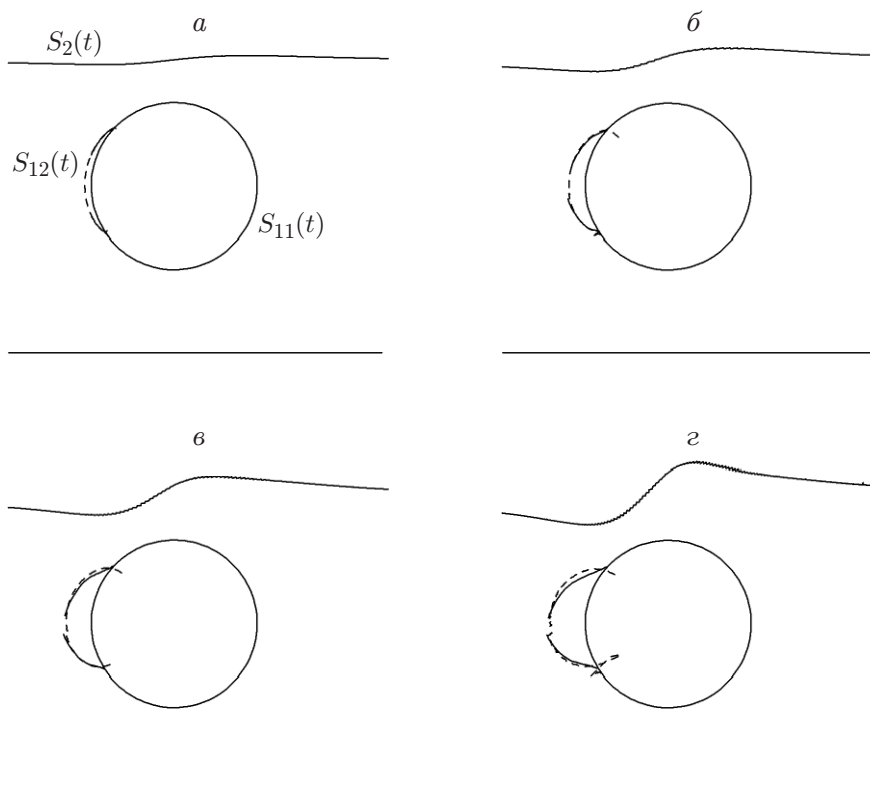
Следует отметить, что уже в главном приближении точки отрыва зависят от всех параметров задачи. Как показывают численные расчеты, на малых временах точки отрыва движутся навстречу друг другу (зона отрыва уменьшается). Значения коэффициентов c_1 , c_2 приведены в таблице.

Динамика внутренней и внешней свободных границ жидкости исследуется при следующих фиксированных значениях параметров задачи: $\chi = 1/2$, $\text{Fr} = 3$, $H = 3/2$, $H_b = -2$, $H_r = 5$, $H_L = -5$, которым соответствуют значения коэффициентов $c_1 = 0,26$, $c_2 = -0,17$, $\beta = 0,52$, $\beta_1 = 0,29$. На рисунке показаны формы внутренней и внешней свободных границ жидкости в различные моменты времени.

Следует отметить, что в главном приближении внутренняя свободная граница пересекает поверхность цилиндра под прямым углом. При этом отсутствует необходимость строить решения для пограничных слоев, так как особенность в разложении (2.7) появляется только во втором приближении.

Зависимость величин θ_{s1} , θ_{s2} , c_1 , c_2 , β , β_1 от числа Фруда
при $\chi = 0,5$, $H = 1,5$, $H_b = -2$, $H_r = 5$, $H_L = -5$

Fr	θ_{s1}	θ_{s2}	c_1	c_2	β	β_1
9	2,275	3,906	0,26	-0,13	0,52	0,55
7	2,282	3,892	0,26	-0,14	0,52	0,53
5	2,299	3,859	0,26	-0,15	0,52	0,47
3	2,359	3,732	0,26	-0,17	0,52	0,29
2,5	2,402	3,641	0,25	-0,24	0,54	0,10
2	2,487	3,461	0,22	-0,40	0,59	-0,32
1,6	2,654	3,118	0,26	-0,47	0,56	-0,89



Формы внутренней и внешней свободных границ жидкости при $\chi = 0,5$, $Fr = 3$,
 $H = 1,5$, $H_b = -2$, $H_r = 5$, $H_L = -5$ в различные моменты времени:
 $a - t = 0,5$; $б - t = 0,8$; $в - t = 1,0$; $г - t = 1,2$

Следует отметить, что давление жидкости на смоченной поверхности цилиндра должно быть больше нуля. Иными словами, для жидкости всегда должно выполняться неравенство $p \geq p_d$, $p_d \geq 0$, $p_d \approx 0$. В главном приближении, т. е. для очень малых времен, это условие будет выполнено. Численные расчеты, проведенные с использованием формулы (1.5), показывают, что при данных значениях параметров задачи и рассматриваемых моментах времени давление на смоченной поверхности цилиндра больше давления в каверне. Эта ситуация сохраняется при увеличении числа Фруда и нарушается при его уменьшении. Например, при $Fr = 1,6$, $t = 0,5$ давление в окрестности каждой точки отрыва незначительно падает по сравнению с давлением в каверне. Отметим также, что при $Fr = 1,6$ образуется каверна очень малых размеров, которая при дальнейшем уменьшении

числа Фруда исчезает. Таким образом, при $0 < Fr < Fr_*$, $Fr \approx 1,5$ имеет место безотрывный режим обтекания цилиндра.

Заключение. В работе показано, что при большом ускорении кругового цилиндра, полностью погруженного в жидкость, происходит отрыв жидкости от цилиндра и образуется каверна. Исследована динамика внутренней и внешней свободных границ жидкости на малых временах. Проведен асимптотический анализ формы внутренней свободной границы вблизи точек отрыва. Результаты проведенных исследований позволяют сделать следующий вывод: при большом ускорении кругового цилиндра позади него образуется достаточно большая каверна, при этом наблюдается сильное возмущение внешней свободной границы жидкости над цилиндром.

Автор выражает благодарность А. А. Коробкину за полезные обсуждения проблемы взаимодействия твердых тел с жидкостью на малых временах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. **Tyvand P. A., Miloh T.** Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 286. P. 67–101.
3. **Tyvand P. A., Landrini M.** Free-surface flow of a fluid body with an inner circular cylinder in impulsive motion // *J. Engng Math.* 2001. V. 40. P. 109–140.
4. **Korobkin A. A., Iafrati A.** Hydrodynamic loads during initial stage of floating body impact // *J. Fluids Structures.* 2005. V. 21. P. 413–427.
5. **Лионс Ж. Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
6. **Норкин М. В.** Отрывной удар эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2008. № 1. С. 120–132.
7. **Норкин М. В.** Отрывной удар круглого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины // *ПМТФ.* 2009. Т. 50, № 4. С. 76–86.
8. **Норкин М. В.** Удар с отрывом эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности несжимаемой, экспоненциально-стратифицированной жидкости // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.* 2009. С. 168–173. (Спецвыпуск.)
9. **Жуков М. Ю.** Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева. Ростов н/Д: Изд-во Юж. федерал. ун-та, 2008.

Поступила в редакцию 10/VI 2011 г.