

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УСЛОВИЙ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ

А. М. Гришин, О. М. Тодес

(Саратов)

В работе предлагается простой способ определения условий воспламенения, основанный на линеаризации исходных нелинейных уравнений. На примерах показано хорошее совпадение точных условий воспламенения и приближенных, полученных при помощи метода линеаризации. Дана физическая интерпретация метода линеаризации.

§ 1. Уравнения стационарной теории теплового взрыва. Задачи стационарной теории теплового взрыва [1-2] приводят в общем случае к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \delta e^\Theta = 0 \quad (1.1)$$

$$\Theta = \frac{(T - T_0) E}{RT_0^2}, \quad \delta = \frac{qL^3}{kRT_0^2} A \exp\left(-\frac{E}{RT_0}\right)$$

Здесь Θ — безразмерная температура, δ — безразмерный кинетический параметр, x, y, z — безразмерные координаты, отнесенные к характерному линейному размеру L области D , заполненной реагирующим веществом, q — тепловой эффект реакции на единицу объема, E — энергия активации, k — коэффициент теплопроводности, $T(x, y, z)$ — абсолютная температура в произвольной точке области, T_0 — абсолютная температура среды, окружающей реагирующую систему, R — универсальная газовая постоянная, A — предэкспоненциальный множитель в выражении для скорости реакции

$$W(T_0) = A \exp\left(-\frac{E}{RT_0}\right) = \frac{1}{t_p} \quad \left(t_p = \frac{1}{W(T_0)}\right)$$

Здесь t_p — время полного сгорания при постоянной скорости и начальной температуре.

На границе области

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} + \gamma \Theta\right)\Big|_\Gamma = 0 \quad \left(\gamma = \frac{\alpha L}{k}\right) \quad (1.2)$$

Здесь γ — критерий Био, α — коэффициент теплоотдачи от реагирующей поверхности к окружающей среде, n — нормаль к границе области Γ .

При составлении уравнения (1.1) предполагалось, что относительный разогрев реагирующей системы невелик $(T - T_0)/T_0 \ll 1$, и использовалось разложение $\exp(-E/RT)$. При интенсивном теплоотводе и больших значениях критерия Био $\gamma \rightarrow \infty$, и условие (1.2) переходит в

$$\Theta|_\Gamma = 0 \quad (1.3)$$

При малых значениях критерия Био $\gamma \rightarrow 0$ температура во всех точках реагирующей системы практически одинакова, и рассматриваемая задача эквивалентна задаче о самовоспламенении, сформулированной Н. Н. Семеновым [3].

Краевая задача (1.1), (1.2) при некоторых значениях параметра $\delta = \delta_*$ перестает иметь действительное решение. Эти значения δ_* являются критическими, т. е. значениями δ , при которых достигается тепловое самовоспламенение, и задача стационарной теории теплового взрыва состоит в определении этих значений $\delta = \delta_*$. С математической точки зрения, δ_* есть точки ветвления краевой задачи (1.1), (1.2), так как, согласно [2,4] и результатам следующего параграфа, при этих значениях сливаются два решения данной краевой задачи.

§ 2. Одномерные задачи стационарной теории теплового взрыва. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся решения одномерных задач стационарной теории теплового взрыва. Для пластины при помощи интеграла Франк-Каменецкого для граничных условий

$$\frac{d\Theta}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{d\Theta}{dx} + \gamma\Theta \right) \Big|_{x=1} = 0 \quad (2.1)$$

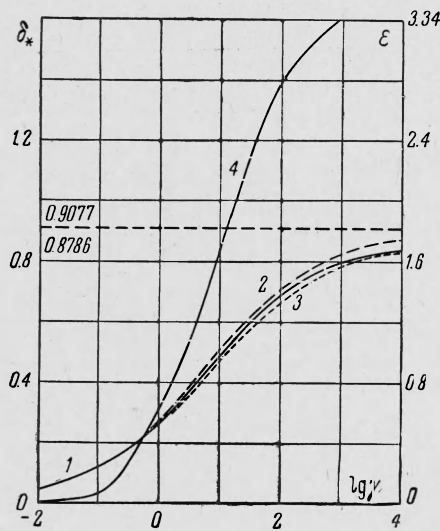
легко найдем критическое значение

$$\delta_* = \frac{2s_*^2}{\text{ch}^2 s_*} \exp \left(-\frac{2}{\gamma} s_* \text{th} s_* \right) \quad (2.2)$$

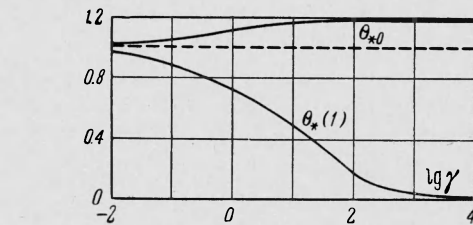
$$(s = \sqrt{1/2 \delta \exp \Theta_0})$$

где s_* — корень уравнения

$$\gamma = (\gamma + 1) s_* \text{th} s_* + s_*^2 \text{sch}^2 s_* \quad (2.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Критический температурный профиль определяется формулой

$$\Theta_*(x) = \Theta_{0*} - 2 \ln \text{ch} s_* x \quad (2.4)$$

Из формулы (2.4) легко найти при $x = 1$ температуру стенки плоского реакционного сосуда, а критический предвзрывной разогрев равен

$$\Theta_{0*} = \ln (2s_*^2 / \delta_*) \quad (2.5)$$

На фиг. 1 сплошной линией изображена зависимость δ_* от $\ln \gamma$, рассчитанная по формуле (2.2), а на фиг. 2 — зависимость Θ_{0*} и $\Theta_*(1)$ от $\ln \gamma$. Из фиг. 2 видно, что $\Theta_{0*} \rightarrow 1$, $\Theta_*(1) \rightarrow 1$ при $\gamma \rightarrow 0$.

Для случая бесконечного цилиндра задача о тепловом взрыве для граничных условий третьего рода решена в работе [5]. Величина δ_* может быть выражена в виде

$$\delta_* = \frac{8m_*}{(1+m_*)^2} \exp \left[-\frac{4m_*}{\gamma(1+m_*)} \right], \quad m_* = 2\gamma^{-1} (\sqrt{1 + 1/4 \gamma^2} - 1) \quad (2.6)$$

Максимальная температура $\Theta_{0*} = \ln (8m_* / \delta_*)$, а критический профиль температуры

$$\Theta_*(x) = \Theta_{0*} - 2 \ln (1 + m_* x^2) \quad (2.7)$$

На фиг. 3 сплошной линией 1 изображена зависимость δ_* от $\ln \gamma$, а на фиг. 4 дан график Θ_{0*} и $\Theta_*(1)$ в функции от $\ln \gamma$. Отсюда видно, что при $\gamma \rightarrow 0$ обе величины стремятся к 1.

Для сферического сосуда имеем уравнение

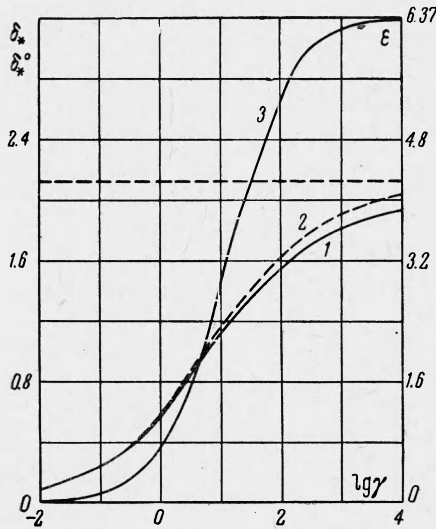
$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\Theta}{dx} + \delta e^\Theta = 0 \quad (2.8)$$

При помощи замены

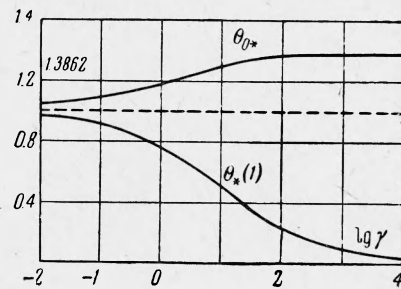
$$\xi = x \sqrt{1/2} \exp \Theta_0, \quad \varphi = \Theta - \Theta_0$$

имеем

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\varphi}{d\xi} + 2e^\varphi = 0 \quad (2.9)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Согласно [6], решение уравнения (2.8), удовлетворяющее условиям симметрии, может быть записано в виде

$$\Theta = \Theta_0 - 2 \int_0^x x^{-2} \left(\int_0^x \xi^2 \exp [\varphi(\xi)] d\xi \right) dx \quad (2.10)$$

Подчиняя (2.10) граничному условию (2.1) при $x = 1$, имеем уравнение для определения величины δ , при котором существует решение краевой задачи (1.1), (1.2) в сферическом случае

$$-\frac{2}{s} \int_0^s x^2 \exp [\varphi(x)] dx + \gamma \left[\Theta_0 - 2 \int_0^s \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x \xi^2 \exp [\varphi(\xi)] d\xi \right) dx \right] = 0 \quad (2.11)$$

Дифференцируя (2.11) по Θ_0 , имеем уравнение для определения $s = s_*$, при котором достигается максимум величины $\delta = \delta_*$

$$\frac{1}{s_*} (1 - \gamma) \int_0^{s_*} x^2 \exp [\varphi(x)] dx + \gamma - s_*^2 \exp [\varphi(s_*)] = 0 \quad (2.12)$$

Здесь и выше $\varphi(\xi)$ — решение уравнения (2.9) при условиях

$$\varphi'(0) = \varphi(0) = 0 \quad (2.13)$$

Согласно [4], уравнение (2.9) при помощи замены переменных

$$\psi = 2 + \xi d\varphi/d\xi, \quad p = \xi^2 \exp [\varphi(\xi)] \quad (2.14)$$

может быть приведено к уравнению первого порядка

$$\frac{d\psi}{dp} = \frac{2(1-p) - \psi}{\psi p} \quad (2.15)$$

Качественно график $\psi = \psi(p)$ дан в работе [4]. Уравнение типа (2.15) интегрировалось численно в работе Эмдена [7]. Данные в работе [7] величины z_1 и y связаны с величинами ψ и p следующим образом:

$$\psi = -y, \quad z_1 = \ln 2p \quad (2.16)$$

Подставляя замену (2.14) в (2.11), имеем после некоторых преобразований

$$\delta = 2p \exp[(\psi - 2)/\gamma] \quad (2.17)$$

а вместо (2.12) имеем уравнение

$$\psi(p) = 2(p - 1)/(\gamma - 1) \quad (2.18)$$

Определив из уравнения (2.18) значения ψ_* и p_* как первую точку пересечения кривой $\psi(p)$ и прямой $\psi = 2(p - 1)/(\gamma - 1)$, найдем по формуле (2.17) величину δ_* для любого соответствующего значения γ . Легко показать, что при изменении $\psi(p)$ величина s все время возрастает. Поскольку при $p = 1$ уравнение (2.15), согласно [4], имеет особую точку типа фокуса, то существует бесконечно много точек пересечения кривой $\psi(p)$ и прямой $\psi = 2(p - 1)/(\gamma - 1)$, следовательно, существует бесконечно много значений $s = s_{i*}$, при которых достигается экстремум величины $\delta = \delta_{i*}$, т. е. кривая $\delta = \delta(s)$ имеет бесконечно много максимумов и минимумов, которые убывают по абсолютной величине с ростом s и при $s \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к значению $\delta = 2 \exp(-2/\gamma)$. Первый максимум $\delta = \delta_{1*}$, достигаемый при минимальном, по сравнению с другими значениями $s = s_{1*}$, является наибольшим, то при $\delta > \delta_{1*}$ действительное решение краевой задачи (2.8), (2.1) отсутствует, и это значение $\delta = \delta_{1*}$ следует считать критическим.

Для $\gamma = 0.2, 0.4$ при помощи работы [7] было найдено соответственно $\delta_{1*} = 0.212, 0.4072$. При помощи разложения решения краевой задачи (2.8), (2.1) в ряд по степеням ξ было найдено, что при $\gamma \rightarrow 0$ температуры на стенке реакционного сосуда $\Theta_*(1)$ и Θ_{0*} стремятся к 1.

Отметим, что первые две краевые задачи при $\delta < \delta_*$ имеют два решения, одно из которых имеет предвзрывной разогрев выше критического, а второе — ниже критического, при $\delta = \delta_*$ оба эти решения сливаются. Краевая задача (2.8), (2.1) при $\delta_{2*} < \delta \leq \delta_{1*}$, где δ_{1*} и δ_{2*} — два последовательных максимума кривой $\delta(s)$, также имеет два решения, которые сливаются при $\delta = \delta_{1*}$. При других значениях δ возможно различное количество решений и при $\delta = 2 \exp(-2/\gamma)$ — бесконечное количество решений.

§ 3. Метод линеаризации. При помощи соответствующей функции Грина можно вместо нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2) получить эквивалентное нелинейное интегральное уравнение, точкой ветвления которого также будет $\delta = \delta_*$. Для этого нелинейного интегрального уравнения можно при помощи метода, развитого в книге [8], построить линейное интегральное уравнение, собственным значением которого будет $\delta = \delta_*$. Возвращаясь от этого линейного интегрального уравнения к линейной краевой задаче, имеем

$$\Delta v + \delta e^{\Theta_*(x,y,z)} v = 0, \quad (\partial v / \partial n + \gamma v)|_{\Gamma} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь v — предел разности двух решений нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2) при $\delta \rightarrow \delta_*$.

Отметим, что определение δ_* как собственного значения краевой задачи (3.1) является, согласно [8], необходимым, но не достаточным.

Достаточность этого условия может быть легко показана для простых реакционных сосудов (плоский, цилиндрический, сферический).

Для плоского реакционного сосуда вместо уравнения (3.1) имеем уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2s^2}{\text{ch}^2 sx} v = 0, \quad v'(0) = 0, \quad \left(\frac{dv}{dx} + \gamma v\right)\Big|_{x=1} = 0 \quad (3.2)$$

Общее решение уравнения (3.2) согласно [6], имеет вид

$$v = c_1 \text{th } sx + c_2 (1 - sx \text{th } sx) \quad (3.3)$$

Удовлетворяя (3.3) граничным условиям (3.2), получим уравнение, совпадающее с уравнением (2.3). Критическое решение соответствующей нелинейной задачи считается известным; поэтому, зная Θ_{0*} и определяя из (2.3) корень s_* , легко найти $\delta_* = 2s_*^2 \exp(-\Theta_{0*})$.

Для цилиндрического случая имеем уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} + \frac{8m^2}{(1+mx^2)^2} v = 0 \quad (3.4)$$

Общее решение уравнения (3.4) может быть найдено в виде

$$v = c_1 \left[\frac{2 + (1 - mx^2) \ln x}{1 + mx^2} \right] + c_2 \frac{1 - mx^2}{1 + mx^2} \quad (3.5)$$

Здесь и выше c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Удовлетворяя (3.5) граничным условиям (3.2), получим уравнение для m_* , решая которое, найдем m_* в форме (2.6). Поскольку и здесь Θ_{0*} считается известным, то $\delta_* = 8 m_*^2 \exp(-\Theta_{0*})$.

Для сферического реакционного сосуда уравнение (3.1) имеет, согласно [7], решение

$$v = c_1 (\xi d\varphi / d\xi + 2) \quad (3.6)$$

удовлетворяющее первому из граничных условий (3.2). Подчиняя (3.6) второму граничному условию (3.2), получим уравнение (2.12). Так как Θ_{0*} известно, то $\delta_* = 2 s_*^2 \exp(-\Theta_{0*})$.

Отметим, что достаточность определения δ_* как собственного значения краевой задачи (3.4), (3.5) показана ранее в [9] для $\gamma \rightarrow \infty$.

Из результатов § 2 вытекает, что $\Theta_*(x, y, z) \sim 1$ при $\gamma \sim 0$, поэтому для малых γ вместо уравнения (3.1) можно записать более простое уравнение

$$\nabla^2 u + \delta e u = 0 \quad (3.7)$$

Таким образом, при малых γ можем определить δ_* для любых форм при помощи формулы

$$\delta_*^0 = \mu_1 / e \quad (3.8)$$

и считать при этом погрешность вычисления δ_* небольшой¹. Здесь μ_1 — первое собственное значение краевой задачи (3.7), (3.1). Более того, как показывают примеры [9], по крайней мере, для всех известных точных аналитических решений в среднем e^{Θ_*} мало отличается от $e = 2.718\dots$ при любых γ , что, согласно [10], может гарантировать неплохую точность при определении собственного значения точной линеаризованной краевой за-

¹ Отметим, что формула (3.8) получена из других соображений также и в [11] для $\gamma = \infty$. Однако в этой работе отсутствуют соображения о точности этой формулы.

дачи (3.1) при помощи первого собственного значения приближенной линеаризованной краевой задачи (3.7), (3.1).

Так, для плоского реакционного сосуда имеем

$$K_1 = \int_0^1 e^{\theta_* x} dx = \frac{\exp \theta_* \operatorname{th} s_*}{s_*} \quad \left(\begin{array}{l} K_1 \rightarrow e = 2.718 \text{ при } \gamma \rightarrow 0 \\ K_1 \rightarrow 2.31 \text{ при } \gamma \rightarrow \infty \end{array} \right) \quad (3.9)$$

Соответственно для случая бесконечного цилиндра

$$K_2 = \int_0^1 e^{\theta_* x} dx = \frac{\exp \theta_*}{2} \left(\frac{1}{1+m_*} + \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{m_*}}{\sqrt{m_*}} \right) \quad \text{при } \gamma \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

$m_* = 1$ и $K_2 = 2.57$, $K_2 \rightarrow e = 2.718 \dots$ при $\gamma \rightarrow 0$

Общее решение уравнения (3.7) имеет вид для плоского реакционного сосуда

$$u = c_1 \cos(x \sqrt{\delta e}) + c_2 \sin(x \sqrt{\delta e}) \quad (3.11)$$

для цилиндрического реакционного сосуда

$$u = c_1 J_0(x \sqrt{\delta e}) + c_2 V_0(x \sqrt{\delta e}) \quad (3.12)$$

для сферического реакционного сосуда

$$u = c_1 x^{-1} \cos(x \sqrt{\delta e}) + c_2 x^{-1} \sin(x \sqrt{\delta e}) \quad (3.13)$$

Здесь и выше c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а J_0 и V_0 — соответственно Бесселевы функции первого и второго рода нулевого порядка. Удовлетворяя (3.11) — (3.13) граничным условиям (3.1), получим уравнения для определения δ_*°

$$\gamma = \sqrt{\delta e} \operatorname{tg} \sqrt{\delta e} \quad \text{для плоского сосуда} \quad (3.14)$$

$$\gamma J_0(\sqrt{\delta e}) = \sqrt{\delta e} J_1(\sqrt{\delta e}) \quad \text{для цилиндрического сосуда} \quad (3.15)$$

$$\gamma = 1 - \sqrt{\delta e} \operatorname{ctg} \sqrt{\delta e} \quad \text{для сферического сосуда} \quad (3.16)$$

Здесь J_1 — Бесселева функция первого рода и первого порядка. Корни уравнений (3.14) — (3.16) определялись методом проб и уточнялись при помощи метода Ньютона.

На фиг. 1 и 3 построены зависимости $\delta_*(\ln \gamma)$ (кривая 1) и $\delta_*^\circ(\ln \gamma)$ (кривая 2) соответственно для плоского и цилиндрического сосудов, а также относительная погрешность ε величины δ_*° (кривые 3 и 4). Точками на фиг. 1 нанесена интерполяционная зависимость [5]

$$\delta = \frac{0.88\gamma}{0.88e + \gamma} \quad (3.17)$$

Для сферического сосуда при $\gamma = 0.2$ было найдено $\delta_*^\circ = 0.212$, что практически совпадает с найденным ранее значением δ_* , а для $\gamma = 0.4$ имеем $\delta_*^\circ = 0.408$ и $\delta_*^\circ = 3.63$ при $\gamma \rightarrow \infty$, что на 9.3% превышает точное значение δ_* , полученное в [2]. В качестве простой интерполяционной зависимости может служить [5]

$$\delta_* = \frac{3.32\gamma}{e + \gamma} \quad (3.18)$$

§ 4. Интерпретация полученных результатов. Как следует из результатов § 2, при $\delta < \delta_*$ существует несколько решений нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2),

Рассмотрим устойчивость решений краевой задачи (1.1), (1.2). При этом полагаем, что решение стационарной задачи (1.1), (1.2) мало отличается от решения нестационарного уравнения теплового взрыва

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \Delta \vartheta + \delta e^{\vartheta} \quad \left(i = \frac{k}{cL^2} \tau \right) \quad (4.1)$$

с граничными условиями (1.2), т. е.

$$v = \Theta + f(x, y, z, t) \quad (4.2)$$

Здесь ϑ — решение нестационарной задачи, функция $f \ll 1$; t — безразмерное время, c — теплоемкость единицы объема. Подставляя (4.2) в (4.1) и отбрасывая малые второго порядка, имеем для возмущения $f(x, y, z, t)$ краевую задачу

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + \delta e^{\Theta} f, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial n} + \gamma f \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (4.3)$$

Решаем задачу (4.3) методом разделения переменных, полагая

$$f(x, y, z, t) = v(x, y, z) \exp(-\lambda t) \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.3), имеем

$$\Delta v + (\lambda + \delta e^{\Theta}) v = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \gamma v \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (4.5)$$

Из формулы (4.4) следует, что если для краевой задачи (4.5) $\lambda_1 > 0$, первое собственное значение, то любое начальное распределение температуры рассасывается со временем, при $\lambda_1 = 0$ этого уже нет. Наконец, при $\lambda_1 < 0$ происходит бесконечное возрастание температуры со временем. В последнем случае стационарное распределение температуры неустойчиво, т. е. происходит самовоспламенение реагирующей смеси.

Следует отметить, что если $\Theta = \Theta_*(x, y, z)$, то краевая задача (4.5) имеет первое собственное значение $\lambda_1 = 0$, так как в этом случае краевая задача (4.5) совпадает с ранее исследованной краевой задачей (3.1), т. е. при $\vartheta = \Theta_*$, $\delta = \delta_*$ выполняется предельное условие воспламенения $\lambda_1 = 0$. Укажем, не приводя подробных выкладок, что решения краевой задачи (1.1), (1.2), у которых максимальный разогрев выше критического, — неустойчивы, а у которых ниже критического — устойчивы. Для $\gamma \rightarrow \infty$ эти выкладки даны в [6]. Для малых γ функция $\Theta_*(x, y, z)$ стремится к семеновскому распределению температуры $\Theta_*(x, y, z) \sim 1$. Тогда, по крайней мере, для малых γ можно вместо краевой задачи (4.5) исследовать уравнение

$$\nabla u + (\lambda + \delta e) u = 0 \quad (4.6)$$

с теми же граничными условиями. Как следует из результатов § 3, уравнением (4.6) можно пользоваться для любых γ , так как $\exp \Theta_*$ в среднем мало отличается от $e = 2.718...$

Тогда предельное условие самовоспламенения реагирующей смеси $\lambda_1 = 0$ будет выполнено, если δ определить по формуле (3.8).

При $\delta > \delta_*$ имеем $\lambda_1 < 0$, и любое начальное распределение температур возрастает со временем и наступает взрыв, а при $\delta < \delta_*$ этого нет.

Используя (3.8) и развернув выражение для δ , данное в начале § 1, можно привести условие теплового взрыва (3.8) к виду

$$t_p \leq e \frac{E}{RT_0} \frac{q}{cT_0} t_e \quad (4.7)$$

Знак равенства соответствует границе воспламенения. При дальнейшем снижении t_p , т. е. возрастании скорости реакции и тепловыделения, всегда происходит тепловой взрыв.

Величина t_e есть время тепловой релаксации, в течение которого разогрев убывает в $e = 2.718$ раз.

В отсутствие тепловыделения от реакции $q = 0$ и $\delta = 0$ краевая задача (4.6), (4.5) описывает охлаждение не реагирующего первоначально нагретого тела той же формы и размеров и с той же теплоемкостью и теплопроводностью, что и реагирующая система, при тех же граничных условиях (4.5). Тогда λ_1 определяет время тепловой релаксации и

$$t_e = \frac{cL^2}{k\lambda_1} \quad (4.8)$$

Физическая интерпретация условия самовоспламенения в форме (4.7) была ранее введена одним из нас [12] для случая теплового взрыва, разбиравшегося Н. Н. Семеновым ($\gamma \rightarrow 0$). Как видно из приведенного анализа, это соотношение остается приблизительно справедливым для всех случаев теплового взрыва, при любой геометрии системы.

Из результатов § 3 следует, что δ_*° всегда несколько выше истинного значения δ_* . Благодаря экспоненциальному росту δ с температурой это соответствует очень небольшому завышению критической температуры самовоспламенения T_0 на $\sim (1-3^\circ)\text{C}$.

Полученный вывод (4.7) позволяет сильно упростить задачу нахождения критических условий теплового самовоспламенения для тел произвольной формы при смешанных условиях охлаждения (1.2).

Кроме того, величину t_e во многих случаях проще определять экспериментально, измеряя регулярный режим охлаждения [13] на модели из не реагирующего вещества с подобными геометрическими и тепловыми параметрами.

Поступила 25 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Конторова Т. А., Тодес О. М. К тепловой теории взрыва. Ж. физ. химии, 1933, т. 4, № 1.
2. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Изд-во АН СССР, 1947.
3. Семенов Н. Н. К теории процессов горения. Ж. русск. физ.-хим. общества. (ч. физ.), 1928, т. 60, № 3.
4. Гельфанд И. М. Задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, т. 14, № 2.
5. Барзыкин В. В., Мержанов А. Г. Краевая задача в теории теплового взрыва. Докл. АН СССР, 1958, т. 120, № 6.
6. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Об устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва. ПММ, 1963, т. 27, № 2.
7. E m d e n. R. Gaskugeln. Leipzig und Berlin druck und verlag von V. G. Teubner, 1907.
8. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. Изд. иностр. лит., 1960.
9. Гришин А. М. Определение точек ветвления некоторых нелинейных уравнений. Тр. молодых ученых. Изд. СГУ, 1964.
10. Крылов Н. М. Избр. тр. Изд-во АН УССР, 1961, 2.
11. Худяев С. И. Критерий разрешимости задачи Дирихле для эллиптических уравнений. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 1.
12. Тодес О. М. Теория теплового взрыва. Ж. физ. химии, 1939, т. 13, № 7.
13. Кондратьев Г. М., Испытание на теплопроводность по методам регулярного режима. Стандартгиз, 1936.