

УДК 622.831.32

**ПОТОКИ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧАХ
О ДЕЙСТВИИ ШТАМПА НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ**

Г. Л. Линдин¹, Т. В. Лобанова²

¹*Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного университета,
E-mail: lindins@ngs.ru, ул. Циолковского, 23, 654041, г. Новокузнецк, Россия*

²*Сибирский государственный индустриальный университет,
ул. Кирова, 42, 654007, г. Новокузнецк, Россия*

Построены линии тока энергии в задачах о равномерной вертикальной нагрузке на границе упругой полуплоскости и о вдавливании гладкого штампа в жесткопластическую среду. Проанализирован баланс работы напряжений на скоростях смещений. В качестве приложения рассмотрен процесс формирования зоны уплотнения при трамбовке.

Линии тока энергии, распределение напряжений и смещений, энергетический барьер

Отмечено [1], что основные процессы горного производства есть не что иное, как передача энергии от одного участка массива к другому. Изучение направлений передачи энергии в рассмотренных процессах представляет большой интерес. На необходимость такого подхода указывалось уже в трудах ученых в 50-е годы XX в. [2, 3]. Позднее были введены линии тока энергии и вектор наибольшей плотности тока энергии [4]. Этот вектор позволяет рассматривать процессы перераспределения напряжений и связанных с ними смещений как единое целое. В результате оказывается, что в деформируемом материале энергия течет подобно движению сжимаемой жидкости.

В отличие от напряжений, зависящих от внешних усилий и смещений на всей границе упругого тела, внутренняя энергия в указанное место течет только по вполне определенным направлениям. В этой связи весьма показательна задача о действии вертикальной нагрузки на участке свободной границы упругой полуплоскости. На упругом этапе деформирования среда сжимается в области влияния нагруженного участка, образованного линиями тока энергии, приходящими с внешней части полуплоскости. Когда нагрузка превышает предельное значение, возникает зона пластических деформаций, приводящая к существенному изменению направления тока энергии внешней нагрузки и характера процесса деформирования.

Аналогичная ситуация наблюдается при динамическом уплотнении грунтов тяжелыми трамбовками. Увеличение массы трамбовки или высоты падения при заданных размерах ее подошвы целесообразно лишь до некоторого предела, превышение которого может приводить к развитию пластических деформаций сдвига. При этом кинетическая энергия падающей трамбовки переходит в работу выдавливания и разрыхления грунта около трамбовки.

Существуют разные варианты жесткопластических решений плоской задачи о гладком штампе, которые отличаются полем скоростей смещений в зоне пластического течения. Эти скорости определяют линии тока энергии, которые могут не соответствовать пластической области. Поэтому появляется возможность выбора жесткопластического решения, более точно соответствующего характеру тока энергии.

ЗАДАЧА О РАВНОМЕРНОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Пусть на участке $-a \leq x \leq a$ границы $y = 0$ упругой полуплоскости (рис. 1) действует равномерное вертикальное сжимающее напряжение $q > 0$, а остальная часть границы свободная:

$$\text{при } x \in [-a, a] \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \text{а при } x \notin [-a, a] \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} — компоненты тензора напряжений.

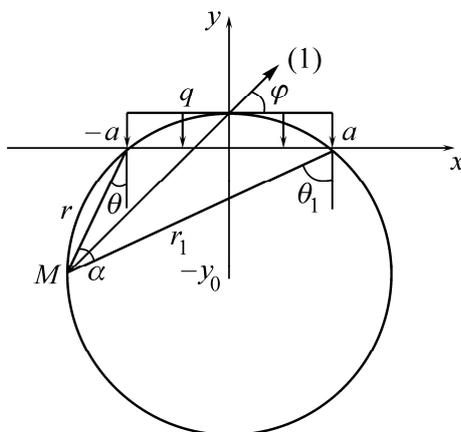


Рис. 1. Постановка задачи о вертикальной нагрузке

Значения главных напряжений в произвольной точке $M(x, y)$, согласно [5],

$$\sigma_1 = -\frac{q}{\pi}(\alpha + \sin \alpha), \quad \sigma_2 = -\frac{q}{\pi}(\alpha - \sin \alpha), \quad (2)$$

где α — угол между полярными радиусами r, r_1 точки M относительно концов нагруженного участка (рис. 1). Индексом (1) отмечено первое главное направление напряжений, являющееся биссектрисой угла α и составляющее угол φ с положительным направлением оси x . Напряжения в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{q}{\pi}(\alpha + \sin \alpha \cos 2\varphi), \\ \sigma_y = -\frac{q}{\pi}(\alpha - \sin \alpha \cos 2\varphi), \\ \tau_{xy} = -\frac{q}{\pi} \sin \alpha \sin 2\varphi, \end{cases} \quad (3)$$

где угол φ выражается через ординату $(-y_0)$ центра окружности, проходящей через концы участка и точку M :

$$\varphi = \arctg \frac{y + y_0 - \sqrt{a^2 + y_0^2}}{x}, \quad y_0 = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2y}, \quad \alpha = \arctg \frac{a}{y_0}.$$

Линии уровня вертикального напряжения подобны разрезу отдельных чешуй луковицы. Иначе выглядят линии уровня горизонтального напряжения. На рис. 2 приведены линии уровня горизонтального напряжения согласно (3).

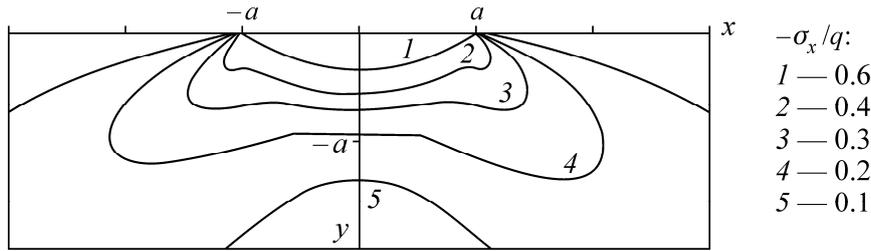


Рис. 2. Линии уровня горизонтального напряжения

Рассмотрим смещения в зависимости от полярных переменных r, θ ; r_1, θ_1 с началом координат в концах нагруженного участка $-a, a$ соответственно, а полярные углы θ, θ_1 откладываются от вертикали по часовой стрелке. Тогда, согласно [5], получим следующие выражения смещений:

$$\begin{cases} u_x = -\frac{q(1-\nu)}{\pi G} \left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} (r\theta \sin \theta - r_1\theta_1 \sin \theta_1) + r_1 \cos \theta_1 \ln r_1 - r \cos \theta \ln r \right], \\ u_y = u_c - \frac{q(1-\nu)}{\pi G} \left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} (r\theta \cos \theta - r_1\theta_1 \cos \theta_1) + r \sin \theta \ln r - r_1 \sin \theta_1 \ln r_1 + 2a \ln a \right], \end{cases} \quad (4)$$

где u_c — вертикальное смещение середины нагруженного участка; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона. На рис. 3 изображены эпюры безразмерных горизонтальных смещений $x + u_x(x, y)\pi G/aq(1-\nu)$ вертикальных линий: $x = a/5, \dots, x = 9a/5$ в случае $\nu = 0.2$.

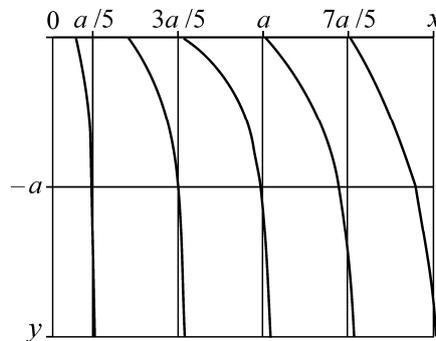


Рис. 3. Горизонтальные смещения вертикальных линий

Смещение этих линий направлено к оси ординат ($u_x < 0$) вблизи границы полуплоскости, а абсолютная величина u_x возрастает с ростом абсциссы x . Это связано с равномерным сжатием в точках нагруженного участка границы.

Вертикальное смещение $u_c = -2qa(1-\nu) \ln c / (\pi G)$ середины нагруженного участка границы полуплоскости может быть произвольным при $c > 1$. Для значения $c = 10$ на рис. 4 изображены эпюры безразмерных вертикальных смещений $y + u_y(x, y)\pi G/aq(1-\nu)$ горизонтальных линий: $y = 0, \dots, y = -6a$ в случае $\nu = 0.2$. Штриховой линией отмечена вертикально неподвижная граница “амортизатора” для действующей нагрузки, размеры которого практически пропорциональны параметру c и не зависят от q и упругих постоянных полуплоскости.

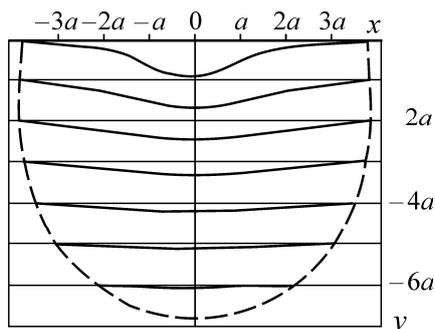


Рис. 4. Вертикальные смещения горизонтальных линий

ЗАДАЧА О ПЛОСКОМ ШТАМПЕ

Краевая задача о вдавливании гладкого штампа с прямолинейным горизонтальным основанием в упругую полуплоскость рассмотрена на рис. 5. На участке границы $y = 0, -a \leq x \leq a$ задано равномерное вертикальное смещение $-V < 0$ и нулевое касательное напряжение, а остальная часть границы свободна от напряжений:

$$\text{при } x \in [-a, a] \quad u_y = -V, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \text{при } x \notin [-a, a] \quad \sigma_y = 0. \quad (5)$$

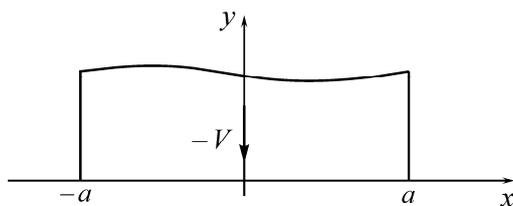


Рис. 5. Постановка задачи о штампе

Решение краевой задачи (5) получено путем подбора аналитической в полуплоскости функции $\Phi(z)$, при которой достигается постоянное вертикальное смещение на участке границы $-a \leq x \leq a$ [6]. Это решение с точностью до чисто мнимой постоянной имеет вид:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z),$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)},$$

$$2G(u_x + iu_y) = 4(1-\nu)\varphi(z) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi(z)} + ic,$$

$$\Phi(z) = \frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - z^2}}, \quad \varphi(z) = \frac{P}{2\pi} \arcsin \frac{z}{a},$$

где P — вертикальная нагрузка на штамп единичной толщины.

Запишем выражения для безразмерных напряжений и смещений:

$$\frac{\pi a}{P} \sigma_x = -\frac{\cos A}{B} + \frac{y_1^2 \cos 3A}{B^3},$$

$$\frac{\pi a}{P} \sigma_y = -\frac{\cos A}{B} - \frac{y_1^2 \cos 3A}{B^3},$$

$$\frac{\pi a}{P} \tau_{xy} = -\frac{x_1 y_1 \sin 3A}{B^3}, \quad (6)$$

$$\frac{2\pi G}{P} u_x = -2(1-\nu) \arccos C + \frac{y_1 \sin 2A}{B},$$

$$\frac{2\pi G}{P} u_y = 2(1-\nu) \ln \left(\sqrt{\left(\frac{y_1}{C}\right)^2 + 1} - \frac{y_1}{C} \right) - \frac{y_1 \cos 2A}{B} - \frac{2\pi G}{P} V,$$

где величины A, B, C определяются следующим образом:

$$A = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x_1 y_1}{1-x_1^2+y_1^2}, & 1-x_1^2+y_1^2 \geq 0, \\ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x_1 y_1}{1-x_1^2+y_1^2} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(x_1), & 1-x_1^2+y_1^2 < 0, \end{cases}$$

$$B = y_1 [(1-x_1^2+y_1^2)^2 + 4x_1^2 y_1^2]^{\frac{1}{4}},$$

$$C = \left(\frac{1-x_1^2-y_1^2}{2} + \left[\left(\frac{1-x_1^2-y_1^2}{2} \right)^2 + y_1^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x_1 = x/a, \quad y_1 = y/a.$$

Если ввести безразмерный параметр $D = 2\pi\mu V/P$, то смещение штампа пропорционально вертикальной нагрузке на штамп:

$$V = \frac{D}{2\pi G} P.$$

Рассмотрим линии уровня нормальных напряжений вблизи нагруженного участка. Как и в задаче о равномерной вертикальной нагрузке, линии уровня вертикального напряжения подобны разрезу отдельных чешуй луковицы. Иначе выглядят линии уровня горизонтального напряжения. На рис. 6 приведены линии уровня горизонтального напряжения согласно (6). Они более вытянуты в горизонтальном направлении (см. рис. 2) и формируют области горизонтального сжатия справа и слева от нагруженного участка. Эти области образуют зоны вытеснения среды в процессе роста нагрузки и перехода от упругого к пластическому деформированию.

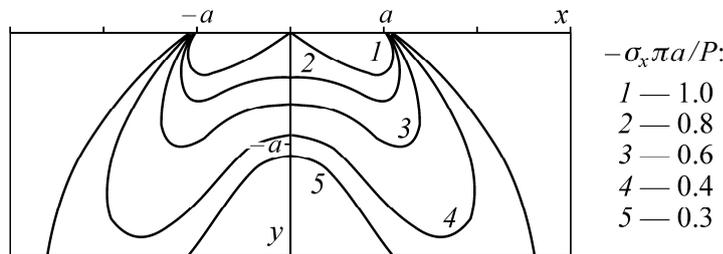


Рис. 6. Линии уровня горизонтального напряжения

Рассмотрим горизонтальные смещения точек полуплоскости. На рис. 7 изображены эпюры безразмерных горизонтальных смещений $x + 2\pi G u_x(x, y)/P$ вертикальных линий: $x = a/5, \dots, x = 9a/5$ в случае $\nu = 0.2, D = 2.5$.

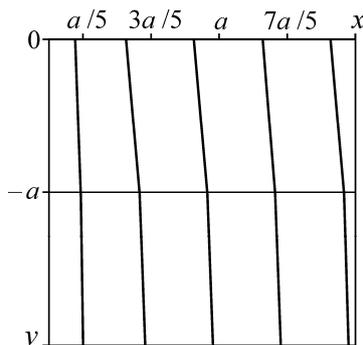


Рис. 7. Горизонтальные смещения вертикальных линий

В отличие от случая с равномерной нагрузкой смещения во всех точках направлены к оси ординат (см. рис. 3), на которой смещения отсутствуют. Абсолютная величина смещений возрастает по мере удаления от этой оси. Это связано с неравномерным сжатием в точках нагруженного участка границы, согласно выражениям (6):

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$$

и симметрией смещений относительно оси ординат.

Рассмотрим вертикальные смещения точек полуплоскости. На рис. 8 изображены эпюры безразмерных смещений $y + 2\pi G u_y(x, y) / P$ горизонтальных линий: $y = 0, \dots, y = -a$ в случае $\nu = 0.2, D = 2.5$.

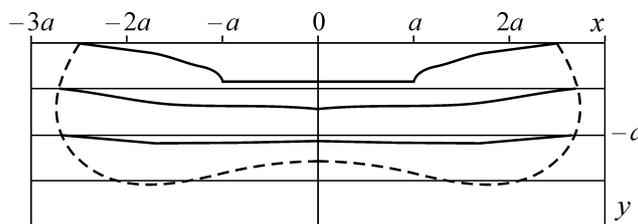


Рис. 8. Вертикальные смещения горизонтальных линий

Штриховой линией отмечена вертикально неподвижная граница ограниченного “амортизатора” для действующей нагрузки, размеры и форма которого зависят от параметра D и коэффициента Пуассона. На границе $y = 0$ эпюра вертикального смещения определяется зависимостью

$$\frac{\pi G}{P} u_y = \begin{cases} -\pi G V / P, & |x| \leq a, \\ (1 - \nu) \ln \left(\frac{|x|}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right) - \pi G V / P, & |x| > a. \end{cases}$$

Размеры амортизатора b, h определяются условиями $u_y(b, 0) = u_y(0, -h) = 0$. Ширина находится точно с помощью соотношений (6), а глубина приближенно с погрешностью, не превышающей 5%, при изменении переменных $0 \leq \nu \leq 0.3$ и $2 \leq D \leq 6$:

$$b = ach \left(\frac{D}{2(1 - \nu)} \right), \quad h \approx a(0.29 - 0.11\nu) \exp((0.5 + 0.66\nu)D). \tag{7}$$

ЛИНИИ ТОКА ЭНЕРГИИ

Рассмотрим линии тока энергии в декартовых координатах x, y для исследуемых задач. Пусть известны напряжения и смещения. В каждой точке среды (x, y) с вектором смещений $\vec{u} = (u_x, u_y)$ можно найти такую площадку с нормалью $\vec{n} = (n_x, n_y)$ и вектором напряжений $\vec{\sigma}_n$, который ортогонален вектору смещений. Действительно, согласно формуле Коши,

$$\vec{\sigma}_n \vec{u} = (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) u_x + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) u_y = (\sigma_x u_x + \tau_{xy} u_y) n_x + (\tau_{xy} u_x + \sigma_y u_y) n_y = 0.$$

Искомый вектор \vec{n} ортогонален вектору [1]

$$\vec{E} = -(\sigma_x u_x + \tau_{xy} u_y, \tau_{xy} u_x + \sigma_y u_y), \quad (8)$$

касательному линии тока энергии, которая называется так потому, что напряжение $\vec{\sigma}_n$ на этой линии не совершает работы. Таким образом, через эту линию энергия не протекает. Вектор \vec{E} называется вектором наибольшей плотности тока энергии потому, что исполняет роль градиента потенциала энергетического поля и указывает направление тока энергии. Знак $(-)$ в правой части выражения (8) связан с тем, что вектор \vec{E} направлен внутрь области, если работа напряжения $\vec{\sigma}_n$ на границе этой области положительна, и наружу, если работа отрицательна.

Если (3), (4) подставить в (8), то векторное поле \vec{E} будет полностью определено. Задача нахождения линии тока энергии сводится к построению интегральных кривых дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sigma_x u_x + \tau_{xy} u_y}{\tau_{xy} u_x + \sigma_y u_y}. \quad (9)$$

Рассмотрим линии тока энергии в задаче о равномерной вертикальной нагрузке на участке полуплоскости. На рис. 9 приведен “энергетический портрет” задачи в случае $c = 10, \nu = 0.2$. Стрелками отмечено направление вектора \vec{E} .

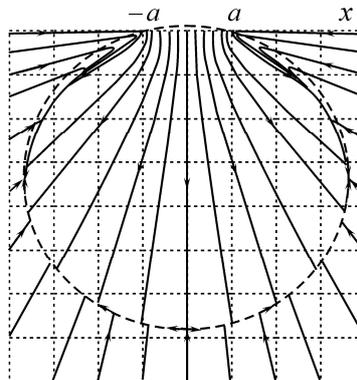


Рис. 9. Линии тока энергии при равномерной нагрузке

Следует отметить два энергетических потока: поток, который течет с нагруженного участка границы полуплоскости, и противопоток — с остальной части полуплоскости. Эти потоки встречают энергетический барьер и резко сворачивают в узкий коридор вдоль барьера к особым точкам типа узел с входящими траекториями. Ширина коридора соответствует доле текущей в нем энергии. В результате образуется ограниченная область влияния внешней нагрузки. Согласно теореме Клапейрона, первый поток переносит на глубину $h = 6.8a$ всю работу, совершаемую на участке нагружения.

От чего же зависят размеры энергетического барьера? Дело в том, что линии тока энергии определяются численно. Однако глубина барьера h определяется длиной участка отрицательных вертикальных смещений на оси ординат. Действительно, в точках этой оси горизонтальные смещения и касательные напряжения отсутствуют в силу симметрии нагружения. Поэтому при отрицательном вертикальном смещении вектор \vec{E} направлен вниз, согласно (6), а при положительном — вверх. Следовательно, величина h является решением уравнения $u_y(0, -h) = 0$, которое с использованием (4) сводится к виду

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \ln \frac{c^2}{1+t^{-2}} - \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 0, \quad t = \frac{a}{h}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что глубина энергетического барьера пропорциональна длине a участка нагружения, а при постоянных значениях параметров c , ν не зависит от давления q и соответствующего смещения u_c . Зависимость от параметра c мало отличается от пропорциональной, поскольку при $a \ll h$ решение (10) довольно точно описывается формулой

$$h = a \sqrt{c^2 e^{(2\nu-1)/(1-\nu)} - 1}. \quad (11)$$

Зависимость (11) отличается от точного решения не более 2% при $c \geq 5$.

Рассмотрим форму энергетического барьера. Его верхняя часть образована линиями тока энергии, идущими с краев участка нагружения, и зависит от коэффициента Пуассона и распределения внешней нагрузки. На рис. 8 эти линии составляют с вертикалью угол 45° , который уменьшается до 40° при $\nu \rightarrow 0$. Нижняя часть практически совпадает с окружностью (штриховая линия), проходящей через концы нагруженного участка и нижнюю точку барьера. Ее уравнение имеет вид $x^2 + y^2 + 2y_0 y - a^2 = 0$, а $(-y_0) = (a^2 - h^2)/2h$ — ордината центра этой окружности. Ширина барьера пропорциональна глубине с коэффициентом 1.084.

На рис. 10 приведен “энергетический портрет” задачи о гладком штампе. Поток энергии штампа натывается на три сепаратрисы (жирные линии), которые делят полуплоскость на четыре части с разными типами линий тока энергии. Они формируют более узкий энергетический барьер по сравнению со случаем равномерной нагрузки. В результате образуется ограниченная сужающаяся область, в которую поток переносит всю работу штампа.

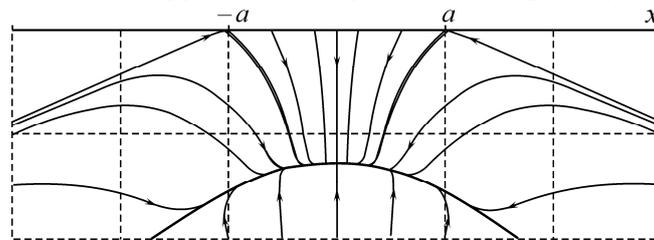


Рис. 10. Линии тока энергии в задаче о штампе

Глубина этой области совпадает с глубиной амортизатора (7) в основании штампа, который касается сепаратрисы в точке пересечения оси ординат. Вдоль барьера расположены следующие особые точки уравнения (9): на концах нагруженного участка две особые точки типа седло, около которых линии тока энергии, приходящие с бесконечности, резко поворачивают и приближаются к единственной точке типа узел с входящими траекториями, расположенной на оси ординат. Это связано с единственной неподвижной точкой полуплоскости.

Энергетический барьер формирует зону уплотнения грунта. Например, при динамическом уплотнении гравия трамбовками [7] массой 7.5 т, площадью плоского основания 2.25 м^2 , свободно падающими с заданной высоты H , грунт напоминает упругую среду с нулевым коэффициентом Пуассона. На рис. 11 приведены зависимости давления в основании трамбовки от величины вдавливания для разных H .

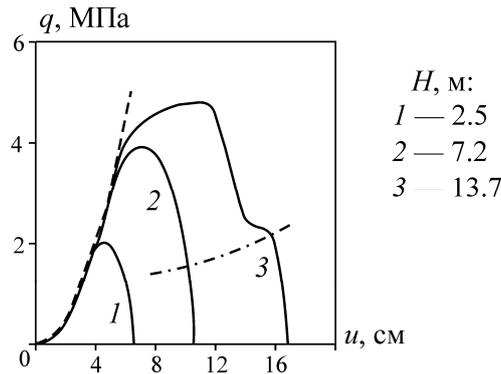


Рис. 11. Зависимость вертикального напряжения от вдавливания трамбовки

Штриховой линией отмечена расчетная зависимость вертикального напряжения от вдавливания штампа согласно теории Герца для упругого полупространства, а штрихпунктирной линией — для жесткопластического полупространства.

При падении трамбовки с высоты, не превышающей 7.2 м, грунт деформируется согласно теории Герца. Зона уплотнения грунта ограничена сбоку линиями, образующими с вертикалью угол примерно 33°, а глубина зоны не превосходит 6.8 м даже после десяти ударов трамбовки. При возрастании высоты падения до 13.7 м возникает область пластического деформирования, производящая противоположный эффект разрыхления и выдавливания грунта по бокам трамбовки.

ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ ШТАМПЕ

Рассмотрим задачу о пластическом течении при вдавливании твердого штампа с плоским основанием. В предельном состоянии штамп движется вниз со скоростью V . Деформации предполагаются малыми, так что изменения очертаний свободной границы можно пренебречь. Таким образом получается смешанная краевая задача для полуплоскости.

Решение Прандтля относится к ранним работам о плоской задаче. Пусть в предельном состоянии распределение давления под штампом равномерное. Тогда поле скольжения (рис. 12) строится так [8]: под штампом и по сторонам от него будут треугольные области равномерного напряженного состояния; в частности, треугольники BDE и AFG будут испытывать простое сжатие, параллельное границе.

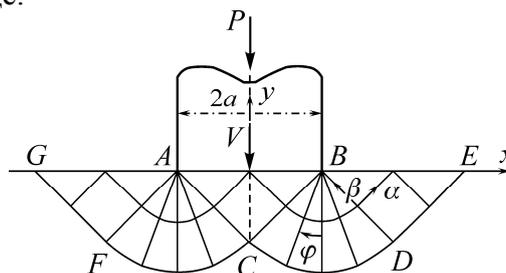


Рис. 12. Линии скольжения в решении Прандтля

В треугольнике ABC давление σ неизвестно, а

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \xi = \text{const} = \frac{\sigma}{2k} + \varphi \equiv \xi_1,$$

в треугольнике BDE

$$\sigma = -k, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4},$$

где угол φ откладывается от вертикали по часовой стрелке.

Треугольные области соединены сектором BCD с центрированными полями. Вдоль α -линии параметр ξ постоянен, следовательно, $\xi_1 = \xi_2$, откуда среднее напряжение $\sigma = -k(1 + \pi)$. По формулам преобразования напряжений получим напряжения в треугольнике ABC :

$$\sigma_x = -k\pi, \quad \sigma_y = -k(2 + \pi).$$

Предельная нагрузка

$$P_* = 2ak(2 + \pi). \tag{12}$$

Найдем распределение скоростей: $\triangle ABC$ движется вниз как твердое тело со скоростью штампа V . Вдоль BC разрывна касательная составляющая скорости, нормальная составляющая равна $V/\sqrt{2}$. Вдоль CD касательная составляющая скорости разрывна, а нормальная составляющая равна нулю. Тогда, согласно [8], в центрированном поле $v = 0$, а $u = V/\sqrt{2}$. Наконец, область BDE скользит как твердое тело в направлении DE со скоростью $V/\sqrt{2}$. Аналогичное поле строится в левой части рис. 11.

Другое решение предложено позднее Хиллом [8] и показано на рис. 13.

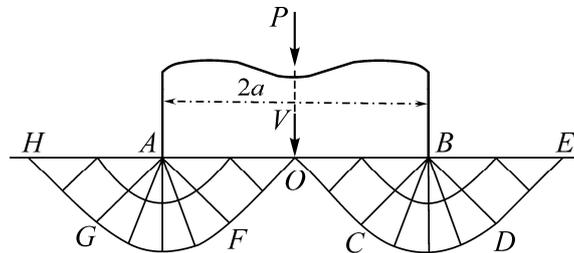


Рис. 13. Линии скольжения в решении Хилла

Здесь также принимается, что по линии контакта AB действует равномерное давление. Тогда в области $OCDEB$ будет такое же поле напряжений, как в области $ACDEB$ решения Прандтля (рис. 12). В области $OFGHA$ (рис. 13) поле напряжений такое же, как и в области $BCFGA$ (рис. 12). Очевидно, что по линии AOB будет действовать то же равномерное давление $\sigma_y = -k(2 + \pi)$. Предельная нагрузка P_* имеет прежнее значение (12).

Однако поле скольжения и кинематическая картина будут иными. Здесь треугольник OCB скользит как твердое тело вдоль OC со скоростью $\sqrt{2}V$, скорость на BC непрерывна, в центрированном поле BCD $v = 0$, $u = \sqrt{2}V$, треугольная область BDE движется в направлении DE со скоростью $\sqrt{2}V$.

В отличие от решения Прандтля, поле скоростей в пластических зонах непрерывно. Как заметил Прагер, можно построить решение, являющееся комбинацией решений Прандтля и Хилла и содержащее произвольный параметр, характеризующий налегание областей OBC и OAF друг на друга.

Рассмотренная задача иллюстрирует неоднозначность решений по схеме жесткопластического тела. Поэтому при построении возможных полей скольжения и скоростей необходимо привлекать различные дополнительные соображения и использовать экспериментальные наблюдения. В частности, полезно попытаться представить на основании решений теории упругости или каких-либо иных соображений характер возникновения и развития пластических зон. С этой точки зрения решение Хилла дает более правильную картину, так как пластические зоны, если исходить из решения соответствующей задачи о давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость, возникают в окрестности углов A, B и в дальнейшем распространяются к середине. Иная картина складывается с энергетической точки зрения.

ЛИНИИ ТОКА ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧЕ О ПЛОСКОМ ШТАМПЕ

Исследуем линии тока энергии в жесткопластических решениях задачи о штампе. Работа внешних напряжений рассматривается на скоростях смещений. В этом случае справедлива теорема Клапейрона, в которой роль смещений и деформаций играют скорости смещений и деформаций.

Определим выражения напряжений и скоростей смещений в решении Прандтля, а также направления линий тока энергии в декартовой системе координат по уравнению (9). В треугольнике *ABC* (см. рис. 12)

$$\begin{cases} \sigma_x = -k\pi, \\ \sigma_y = -k(2 + \pi), \\ \tau_{xy} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = 0, \\ u_y = -V, \end{cases} \quad \frac{dx}{dy} = 0.$$

В треугольнике *BDE*

$$\begin{cases} \sigma_x = -2k, \\ \sigma_y = 0, \\ \tau_{xy} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = \frac{V}{2}, \\ u_y = \frac{V}{2}, \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

В секторе *BCD*

$$\begin{cases} \sigma_x = -k \left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\varphi - \sin 2\varphi \right), \\ \sigma_y = -k \left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\varphi + \sin 2\varphi \right), \\ \tau_{xy} = k \cos 2\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = \frac{V}{\sqrt{2}} \cos \varphi, \\ u_y = -\frac{V}{\sqrt{2}} \sin \varphi, \\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\varphi \right) \cos \varphi - \sin 3\varphi}{\cos 3\varphi - \left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\varphi \right) \sin \varphi},$$

здесь угол φ откладывается от вертикали по часовой стрелке (см. рис. 11).

На рис. 14 построены интегральные кривые уравнения (9) во всей пластической области. Стрелками отмечен вектор \vec{E} . Разрыв скоростей смещений вдоль линий *AC*, *BC* приводит к угловым точкам на линиях тока энергии.

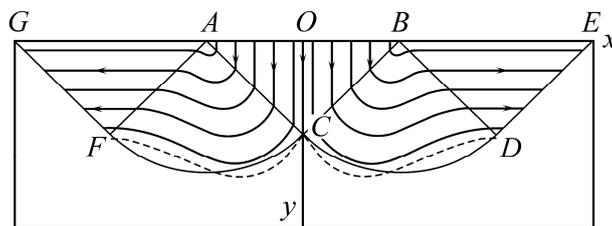


Рис. 14. Линии тока энергии в решении Прандтля

Штриховой линией показаны граничные линии тока энергии: работа давления штампа, совершаемая на скоростях вертикальных смещений, передается от треугольника *ABC* в горизонтальных направлениях. Следует отметить, что волнообразные линии скольжения в решении Прандтля практически соответствуют этому процессу. Другими словами, энергия вдавливания штампа резко разворачивается в пластической области и переходит в энергию выдавливания треугольников *BDE* и *AGH* в поперечных направлениях.

Рассмотрим энергетический баланс в решении Прандтля с помощью вектора наибольшей плотности тока энергии. Согласно выражению (8) и решению Прандтля, в треугольнике ABC вектор наибольшей плотности тока энергии направлен сверху вниз:

$$\vec{E} = (0, -kV(2 + \pi)).$$

Однако эта энергия вдавливания лишь частично переходит в работу сдвига, локализованного вдоль отрезка BC , $\tau_{r\varphi}v(\beta) = kV/\sqrt{2}$ (13.7%), и работу напряжений на скорости смещений на этом отрезке $\vec{\sigma}_n \vec{u} = kV(1 + \pi)$ (80.6%). Действительно, тензор напряжений и вектор внешней нормали в точках отрезка BC имеют вид

$$\begin{pmatrix} -k\pi & 0 \\ 0 & -k(2 + \pi) \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

а вектор напряжений, согласно формуле Коши и скорости смещений, на этом отрезке:

$$\vec{\sigma}_n = \begin{pmatrix} k\pi/\sqrt{2} \\ -k(2 + \pi)/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} V/\sqrt{2} \\ -V/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем указанное выше выражение работы напряжений на скорости смещений. Сумма этой работы и работы сдвига, локализованного вдоль отрезка BC , равна $kV(1/\sqrt{2} + 1 + \pi)$ и составляет 94.3% от \vec{E} в треугольнике ABC . Остальные 5.7% энергии теряются вследствие разрыва касательной составляющей скорости смещения на линии скольжения. Потеря энергии пропорциональна произведению этой составляющей и давления на линии скольжения. Таким образом, суммарная работа пластического скольжения приблизительно равняется работе вдавливания штампа.

Работа напряжений вдоль отрезка BC , в свою очередь, переходит в работу касательных напряжений на скоростях сдвига $\eta_{r\varphi}$ вдоль α -линий сектора BCD (см. рис. 12):

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tau_{r\varphi} \eta_{r\varphi} r d\varphi = kV\pi / 2\sqrt{2}$$

и работу напряжений на отрезке BD , равную kV .

Таким образом, при жесткопластическом деформировании полуплоскости происходит резкое изменение на 90° направления потока энергии вдавливания штампа.

Определим выражения напряжений и скоростей смещений в решении Хилла и подставим их в правую часть уравнения (9). Согласно рис. 12, в треугольнике OBC

$$\begin{cases} \sigma_x = -k\pi, \\ \sigma_y = -k(2 + \pi), \\ \tau_{xy} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = V, \\ u_y = -V, \end{cases} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\pi}{2 + \rho}.$$

В треугольнике BDE

$$\begin{cases} \sigma_x = -2k, \\ \sigma_y = 0, \\ \tau_{xy} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = V, \\ u_y = V, \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

В секторе BCD

$$\begin{cases} \sigma_x = -k\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\varphi - \sin 2\varphi\right), \\ \sigma_y = -k\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\varphi + \sin 2\varphi\right), \\ \tau_{xy} = k \cos 2\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = V\sqrt{2} \cos \varphi, \\ u_y = -V\sqrt{2} \sin \varphi, \\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\varphi\right) \cos \varphi - \sin 3\varphi}{\cos 3\varphi - \left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\varphi\right) \sin \varphi}.$$

На рис. 15 построены интегральные кривые уравнения (9) во всей пластической области решения Хилла.

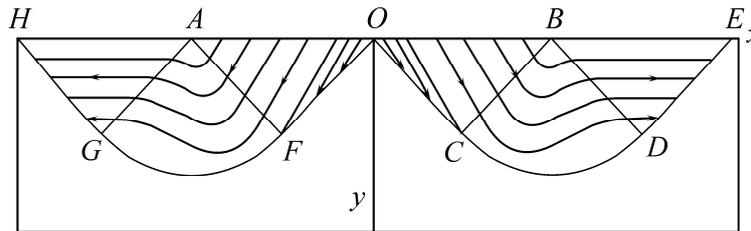


Рис. 15. Линии тока энергии в решении Хилла

Следует отметить, что линии скольжения в решении Хилла не соответствуют процессу жесткопластического течения из-за линий тока энергии, выходящих на участки OF и OC границы жесткопластической области. Энергия треугольников OBC и OAF лишь частично переходит в работу пластического течения.

Рассмотрим энергетический баланс в решении задачи с помощью вектора наибольшей плотности тока энергии. Согласно выражению (8) и решению Хилла, этот вектор в треугольнике BCO имеет вид

$$\vec{E} = (kV\pi, -kV(2 + \pi)).$$

В этом решении скорости смещений непрерывны на отрезке BC , а работа касательных напряжений вдоль данного отрезка равна нулю. Работа напряжений на отрезок BC пропорциональна длине этого отрезка $a/\sqrt{2}$. Работа вдавливания треугольника OBC больше работы напряжений на отрезке BC в $(2 + \pi)/(1 + \pi)$ раз из-за того, что на отрезке OC линии тока энергии выходят на границу жесткопластической области. Таким образом, суммарная работа пластического скольжения составляет лишь 80.6% от работы вдавливания треугольника OBC . Остальные 19.4% энергии теряются на отрезке OC . Такая же потеря работы происходит с треугольником OAF .

Работа напряжений на отрезке BC переходит в работу касательных напряжений на скоростях сдвига $\eta_{r\varphi}$ вдоль α -линий сектора BCD $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tau_{r\varphi} \eta_{r\varphi} r d\varphi = kV\pi/\sqrt{2}$ и работу напряжений на отрезке BD , равную модулю вектора \vec{E} :

$$\vec{E} = (2kV, 0).$$

Суммарная работа пластического скольжения составляет лишь 80.6% от работы вдавливания штампа, а значит, решение Прандтля с энергетической точки зрения более точно соответствует реальному процессу пластического течения.

Следует отметить, что переход от упругого к жесткопластическому деформированию полуплоскости происходит, например, при динамическом нагружении полупространства свободно падающей на него жесткой плоской трамбовки. Если кинетическая энергия трамбовки меньше критического значения, то она вызывает уплотнение грунта в месте падения. В противном случае стадия уплотнения переходит в стадию пластического сдвига, который резко меняет направление тока энергии трамбовки, вызывая противоположный эффект разрыхления и выдавливания грунта [7].

ВЫВОДЫ

В упругой полуплоскости под действием вертикального нагружения участка свободной поверхности образуется ограниченный энергетический барьер, размеры которого пропорциональны длине участка нагружения, не зависят от действующего давления и практически пропорциональны безразмерному смещению середины нагруженного участка.

В задаче о вдавливании гладкого штампа в упругую полуплоскость образуется более узкий энергетический барьер, размеры которого зависят от безразмерного вдавливания штампа и коэффициента Пуассона.

Нагружение полуплоскости формирует зону уплотнения, которая не выходит за границы барьера. При динамическом уплотнении грунта возрастание высоты падения или массы трамбовки приводит к пластическому деформированию грунта, сопровождающемуся разрыхлением и выдавливанием грунта по бокам трамбовки.

Работа внешней нагрузки на скоростях смещений в задаче о плоском штампе позволяет построить линии тока энергии и выбрать жесткопластическое решение Прандтля, которое более точно соответствует процессу пластического течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ревуженко А. Ф., Клишин С. В. Линии тока энергии в деформируемом горном массиве, ослабленном эллиптическими отверстиями // ФТПРПИ. — 2009. — № 3.
2. Умов Н. А. Избранные сочинения. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1959.
4. Крамаренко В. И., Ревуженко А. Ф. Поток энергии в деформируемой среде // ФТПРПИ. — 1988. — № 6.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1978.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
7. Beine R. A. Verdichtungswirkung der fallmasse und lastausbreitung in nichtbindigen boden bei der dynamischen intensivverdichtung, Schriftenreihe des Institutes für Grundbau Wasserwesen und Verkehrswesen, 1986, No. 11.
8. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.

Поступила 12/VI 2014