

ОПТИМИЗАЦИЯ ВНУТРЕННЕГО ИСТОЧНИКА В ЗАДАЧЕ МГД-ОБТЕКАНИЯ ШАРА

В связи с созданием магнитогидродинамических движителей для подводных и надводных морских судов (см., например, [1, 2] и библиографию к ним) интерес приобретают исследования по влиянию электромагнитных объемных сил (ЭОС) на гидродинамическую картину обтекания тел, приводимых в движение за счет внутренних источников электромагнитных полей. На примере шара подобные исследования начаты в [3—5] для фиксированных источников, выбранных из качественных соображений и не являющихся оптимальными.

Очевидно, что должны существовать оптимальные распределения электрического и магнитного потенциалов на поверхности шара, обеспечивающие минимум потребляемой электрической мощности для движения с заданной скоростью. Формулировка полной вариационной задачи для определения оптимальных потенциалов, построение решений некоторых упрощенных (вариационных) задач и их анализ составляют предмет данной работы.

1. Рассматривается шар радиуса a с внутренним источником полей, описанный в [3]. Электромагнитные поля в жидкости характеризуются скалярными потенциалами

$$(1.1) \quad \mathbf{E} = -\nabla[\varphi(r, \theta) \sin m\alpha], \quad \mathbf{B} = -\nabla[\chi(r, \theta) \cos m\alpha].$$

Поле скоростей предполагается осесимметричным

$$(1.2) \quad \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right)$$

и описывается функцией тока $\psi(r, \theta)$ (смысл предположения об осесимметричности и некоторые соображения по его применимости приведены в [3]). Функции $\varphi(r, \theta)$, $\chi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$, $w(r, \theta)$ (завихренность $\text{rot } \mathbf{v} = w(r, \theta) \mathbf{e}_\alpha$) определяются из задачи

$$(1.3) \quad L\varphi = \frac{m\kappa^2}{r \sin \theta} w, \quad L\chi = 0$$

$$(1.4) \quad \left(L - \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right);$$

$$- \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{w}{r \sin \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{w}{r \sin \theta} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r \sin \theta} E^2 (r \sin \theta w) + N \langle \text{rot}_\alpha \mathbf{f} \rangle = 0;$$

$$(1.5) \quad E^2 \psi - r w \sin \theta = 0 \quad \left(E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right);$$

$$(1.6) \quad \chi(1, \theta) = \chi_0(\theta), \quad \varphi(1, \theta) = \varphi_0(\theta), \quad \psi(1, \theta) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r}(1, \theta) = 0,$$

$$\chi|_{r=\infty} = \varphi|_{r=\infty} = 0, \quad \psi|_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta, \quad w|_{r=\infty} = 0.$$

Неопределенные функции $\chi_0(\theta)$, $\varphi_0(\theta)$, входящие в граничные условия (1.6), должны быть найдены в результате решения вариационной задачи минимизации функционала, представляющего собой потребляемую электрическую мощность $f_0 \mu_0 a^3 \iiint (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dv$ (интеграл по пространству вне шара). Задача упрощается, если $Q = \iiint (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dv$ записать в виде интеграла по поверхности шара. В общем случае (когда \mathbf{j} выражается через $\text{rot } \mathbf{H}$) этот переход осуществляется использованием вектора Пойнтинга; в рассматриваемом безындукционном приближении соответствующее пред-

ставление также возможно, поскольку из-за $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\operatorname{div}(\varphi \mathbf{j}) = -\operatorname{div} \varphi[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Отсюда

$$(1.7) \quad Q = \int_0^\pi \varphi(1, \theta) \left[-\frac{\partial \varphi(1, \theta)}{\partial r} + \frac{m\chi(1, \theta)}{\sin \theta} v_\theta(1, \theta) \right] \sin \theta d\theta.$$

(Чтобы данным видом функционала Q можно было воспользоваться и для идеальной жидкости, условие прилипания на шаре здесь еще не учтено.)

Рассматриваемый шар самодвижущийся. Это означает, что электромагнитная сила тяги, действующая на шар, равна нулю. Данное условие можно записать в виде

$$(1.8) \quad 8N \int_0^\pi \int_1^\infty \{ \langle f_r(r, \theta) \rangle \cos \theta - \langle f_\theta(r, \theta) \rangle \sin \theta \} r^2 \sin \theta d\theta dr + \\ + \int_0^\pi \left\{ \frac{4}{\operatorname{Re}} \left[w(1, \theta) - \frac{\partial w(1, \theta)}{\partial r} \right] - 4N \langle f_\theta(1, \theta) \rangle \right\} \sin^2 \theta d\theta = 0.$$

Входящие в (1.8) силы $\langle f_r \rangle$, $\langle f_\theta \rangle$ (угловые скобки означают усреднение по углу α) выражаются через функции φ , χ , ψ и их производные по формулам, приведенным в [6].

Таким образом, исследуемая вариационная задача является задачей на условный экстремум и заключается в выборе функций φ , χ , ψ , w , обеспечивающих минимум функционала Q (1.7) при дополнительных условиях (1.3)–(1.6), самоходности (1.8) и условии, задающем ограничение на масштаб магнитного поля. Физически наиболее целесообразно последнее условие сформулировать в виде требования, чтобы максимальное значение безразмерной магнитной индукции на поверхности шара равнялось единице

$$(1.9a) \quad |B|_{\max}|_{r=1} = 1$$

(используемый при обезразмеривании масштаб B_0 представляет собой максимальное значение магнитной индукции на поверхности). Имеет смысл и более простое ограничение

$$(1.9b) \quad (B_\alpha)_{\max}|_{r=1} = \left(\frac{m\chi(1, \theta)}{\sin \theta} \right)_{\max} = 1$$

(B_0 — максимальное значение B_α). Однако подобные ограничения не легко напрямую реализовать в вариационной задаче. Характеру вариационной задачи более адекватно наложение ограничения на функционал от $\chi(1, \theta)$. Здесь рассмотрены ограничения типа

$$(1.10a) \quad \int_0^\pi h_1(\theta) \chi(1, \theta) d\theta = \text{const}$$

либо

$$(1.10b) \quad \int_0^\pi h_2(\theta) \chi^2(1, \theta) d\theta = \text{const}$$

с некоторыми заданными функциями $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$, причем константы в (1.10a), (1.10b) подбираются так, чтобы полученные решения обеспечивали выполнение (1.9b).

2. Сформулированная вариационная задача с помощью неопределенных множителей Лагранжа сводится к нелинейной системе из восьми уравнений в частных производных (для переменных φ , χ , ψ , w и четырех множителей Лагранжа) с соответствующими нелинейными граничными условиями [6]. Решение задачи представляет большие трудности.

В качестве первого шага рассмотрим более простые задачи, которые возникают, если поле скоростей вокруг шара заменить подходящим при-

ближением, например полем скоростей потенциального обтекания с функцией тока

$$(2.1) \quad \psi = (1/2)(r^2 - 1/r) \sin^2 \theta,$$

и исключить гидродинамические переменные из списка искомых функций. Первая из двух упрощенных задач (назовем ее задачей А) формулируется следующим образом: считая поле скоростей известным, определяемым из (2.1), найти оптимальные распределения $\chi_0(\theta)$, $\varphi_0(\theta)$, при которых функционал

$$(2.2) \quad F = -2\pi \int_0^{\pi} \int_1^{\infty} [\langle f_r(r, \theta) \rangle \cos \theta - \langle f_\theta(r, \theta) \rangle \sin \theta] r^2 \sin \theta dr d\theta$$

(безразмерная сила тяги) принимает фиксированное значение, а потребляемая электрическая мощность Q из (1.7) обращается в минимум.

В данной постановке вопрос о влиянии ЭОС на поле скоростей и на гидродинамическое сопротивление не может ставиться, и поэтому вместо требования самоходности (1.8) в задаче используется условие обеспечения заданной величины F как параметра вариационной задачи. Эта замена приводит к тому, что оптимальный внутренний источник, построенный в результате решения упрощенной задачи, дает минимум потребляемой электрической мощности не для обеспечения заданной скорости движения, а для создания заданной силы тяги. А поскольку величина потребной силы тяги заранее неизвестна (так как гидродинамическое сопротивление всецело зависит от работы источника), то на первый взгляд рассматриваемая задача не имеет смысла. Такой вывод будет справедлив, если структура оптимального источника зависит от F и каждому значению F соответствуют свои оптимальные функции $\chi_0(\theta)$, $\varphi_0(\theta)$. Если же упрощенная вариационная задача приводит к универсальному оптимальному источнику, не зависящему от F , решение такой задачи представляет несомненный интерес и построенный таким образом внутренний источник можно использовать для минимизации потребной мощности для обеспечения заданной скорости. Подчеркнем, что такое «универсальное» решение еще не дает решения полной вариационной задачи, сформулированной в п. 1, так как для упрощенных задач возможность минимизации Q за счет целенаправленного управления величиной гидродинамического сопротивления не предусматривается. Еще одно замечание по поводу постановки упрощенных вариационных задач. В связи с тем, что как Q , так и F в общем случае зависят от поля скоростей, естественно возникает вопрос о правомерности использования (2.1) при вычислении рассматриваемых интегральных величин. Приведем некоторые соображения в пользу сделанного предположения, ниже они будут подкреплены численными результатами. Поскольку в самодвижущемся режиме течение около шара, как показали предыдущие исследования, безотрывно, то завихренность потока, оказывающая влияние на распределение электрического поля в жидкости (см. (1.3)) сосредоточена в основном в пределах пограничного слоя [3]. Так как при больших Re толщина последнего может быть существенно меньше толщины области, занятой полем ЭОС, названные интегральные величины определяются главным образом электромагнитными полями в области вне пограничного слоя, где завихренность потока и ее влияние на распределение поля можно принять равными нулю, а за поле скоростей — то, которое вытекает из предположения (2.2). При этом распределения потенциалов удовлетворяют однородным уравнениям

$$(2.3) \quad L\varphi = 0, L\chi = 0.$$

В [6] показано, что для данной вариационной задачи потенциалы на поверхности шара связаны соотношением

$$(2.4) \quad \partial\varphi/\partial r|_{r=1} = k_1\chi(1, \theta), k_1 = \text{const.}$$

Так как произведение $r\partial\varphi/\partial r$ удовлетворяет уравнению (2.3), то из (2.4) имеем

$$(2.5) \quad r\partial\varphi(r, \theta)/\partial r = k_1\chi(r, \theta),$$

и, следовательно, в оптимизированной системе только одно из двух иско- мых распределений $\varphi_0(\theta)$, $\chi_0(\theta)$ остается независимым (например, задание $\varphi_0(\theta)$ с точностью до постоянного множителя из (2.5) определяет $\chi_0(\theta)$ и наоборот). Показано также, что для существования решения задачи А необходимо, чтобы ограничение на масштаб поля B имело одну из форм (1.10), а непосредственное использование (1.9а) или (1.9б) невозможно. Форма оптимальной функции $\chi_0(\theta)$ зависит от $h_{1,2}$ из (1.10), при этом каж- дому значению F отвечает свое оптимальное распределение, и, таким об- разом, задача А не приводит к универсальной оптимальной функ- ции $\chi_0(\theta)$.

3. Для перехода к постановке новой задачи заметим, что полученное условие (2.4) не зависит от (1.10) и представляет собой необходимый для минимизации Q результат. Фактически (2.4) означает, что в оптимальной системе радиальные компоненты полей \mathbf{E} и $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$, входящие в закон Ома, должны быть пропорциональны между собой на всей поверхности сферы, т. е.

$$(3.1) \quad \{E_r\}|_{r=1} = -k\{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_r\}|_{r=1}.$$

Для пластины конечной ширины аналог условия (3.1) получен в [7].

Видоизмененную вариационную задачу (назовем ее задачей В) сфор- мулируем следующим образом: при заданном значении k найти оптималь- ное распределение $\chi_0(\theta)$ (либо $\varphi_0(\theta)$), обеспечивающее максимальный КПД $\eta = F/Q$. Важность этой задачи обусловлена тем, что искомая функция $\chi_0(\theta)$ оказывается универсальной, не зависящей от k . Кроме того, условие нормировки (1.9б) здесь удовлетворяется непосредственно, без привлечения дополнительных ограничений (1.10), необходимых для существования решения задачи А. Вследствие этого полученное оптимальное распре- деление $\chi_0(\theta)$ обеспечивает большие значения η при всех F , чем те, кото- рые находятся в результате решения задачи А.

Для решения задачи заметим, что рассматриваемые функционалы F и Q при использовании (2.5) выражаются через потенциал $\varphi(r, \theta)$. При этом

$$(3.2) \quad Q = \pi \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \int_0^\pi \varphi(1, \theta) \frac{\partial \varphi(1, \theta)}{\partial r_1} \sin \theta d\theta,$$

а в выражении для F также можно выделить часть, представляемую по- верхностным интегралом. Действительно, поскольку первое слагаемое в выражении $f_z = [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_z + [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]_z$ приводится к дивер- гентному виду $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_z = \text{div} [\mathbf{e}_z \times \varphi \sin \theta \alpha \mathbf{B}]$, выражение $F = - \int \int \int f_z dv$ сводится к

$$F = - \pi m \int_0^\pi \varphi(1, \theta) \chi(1, \theta) \sin \theta d\theta - 2\pi \int_0^\pi \int_1^\infty \langle [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]_z \rangle r^2 \sin \theta dr d\theta$$

или с учетом (2.5) — к окончательному виду

$$(3.3) \quad F = - \frac{2\pi}{3k} \int_0^\pi \varphi(1, \theta) \frac{\partial \varphi(1, \theta)}{\partial r} \sin \theta d\theta - \pi \left(\frac{2}{3mk} \right)^2 \int_0^\pi \int_1^\infty \{ \dots \} dr d\theta,$$

где $\{ \dots \} = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \left(\frac{m}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right)^2 \cos \theta + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right]^2 \sin \theta \right\}$. Значит, исследуе-

мое отношение

$$(3.4) \quad \eta = \frac{F}{Q} = \frac{\frac{2}{3}k + \beta}{k(k-1)}, \quad \beta = \left(\frac{2}{3m}\right)^2 \frac{\int_0^\pi \int_1^\infty \{...\} dr d\theta}{\int_0^\pi \varphi(1, \theta) \frac{\partial \varphi(1, \theta)}{\partial r} \sin \theta d\theta}$$

при заданном k зависит от коэффициента β , являющегося функционалом $\beta[\varphi_0(\theta)]$. Видно, что максимальное значение η при всех k достигается на той функции $\varphi_0(\theta)$, которая обеспечивает максимум β .

Предположим, что функция $\varphi_0(\theta)$, обеспечивающая максимум β , существует. Легко видеть, что она, как и $\chi_0(\theta)$, получающаяся из $\varphi_0(\theta)$ согласно (2.5), определяется с точностью до произвольного множителя. Следовательно, выбором нормирующего множителя условие (1.9б) может быть выполнено без привлечения ограничений типа (1.10). Отметим также, что оптимальное распределение $\chi_0(\theta)$ не зависит от k .

Для нахождения искомых распределений используем решения уравнений (2.3) в виде разложений по присоединенным функциям Лежандра:

$$(3.5) \quad \chi(r, \theta) = \sum_{l=m}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l^m(\cos \theta), \quad \varphi(r, \theta) = -\frac{3km}{2} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{A_l}{l+1} \frac{1}{r^{l+1}} P_l^m(\cos \theta).$$

При этом поиск экстремума β сводится к поиску оптимального набора коэффициентов A_l ($l = m, m+1, \dots$), что выполнено численно. Для всех рассмотренных здесь значений числа пар полюсов удержание 30–40 членов ряда оказалось достаточным, и дальнейшее увеличение этого числа к заметному изменению результатов не приводило.

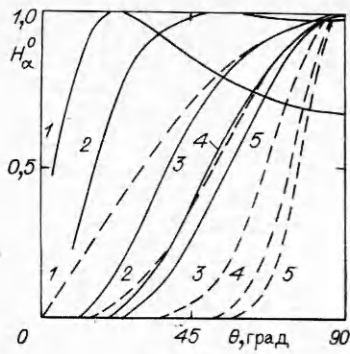
На рис. 1 изображены зависимости $B_\alpha^0(\theta) = m\chi_0(\theta)/\sin \theta$ для $m = 2, 4, 10, 20, 30$ (кривые 1–5), характеризующие оптимальное распределение $B_\alpha(1, \theta, \alpha) = [m\chi(1, \theta)/\sin \theta] \sin m\alpha$ по поверхности шара. Полученные для оптимальных $\varphi_0(\theta)$ максимальные значения β приведены в табл. 1.

Естественно, что эти величины удовлетворяют условию $\beta_{\max} < -2/3$, вытекающему из рассмотрения предельного значения $k = 1$, при котором потребляемая электрическая мощность, как видно из (3.2), равна нулю. Понятно, что при этом электромагнитная сила тяги и КПД (3.4) не могут быть положительными. Отсюда следует ограничение на β_{\max} . Величины F и η переходят через нуль при значении k_0 , превышающем единицу, поэтому лишь при $k > k_0$ имеет место движительный режим, а отрезку $1 < k < k_0$ соответствует режим электромагнитного тормоза. Так как этот режим интереса не представляет, значения k_0 здесь не вычисляются (для плоской пластины аналогичная ситуация была исследована более подробно).

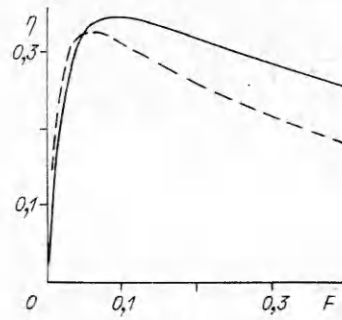
Профили $B_\alpha^0(\theta)$ симметричны относительно угла $\theta = 90^\circ$, поэтому на рис. 1 они приведены в пределах $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. Здесь же штриховыми линиями изображены B_α^0 для мультиполя $A_{l=m} \neq 0, A_{l>m} = 0$. Оптимальные профили существенно более «наполнены», чем профили мультиполя. Обратим внимание, что для $m \geq 10$ максимум B_α^0 достигается при $\theta = 90^\circ$, а при $m = 2$ и 4 профили имеют два максимума, симмет-

Т а б л и ц а 1

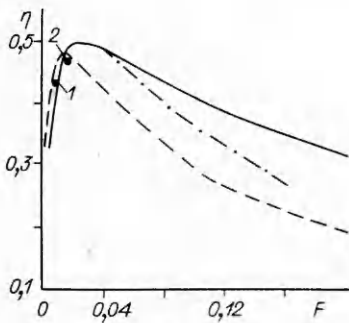
m	β_{\max}	m	β_{\max}
2	-0,939	20	-0,680
4	-0,770	30	-0,675
10	-0,697		



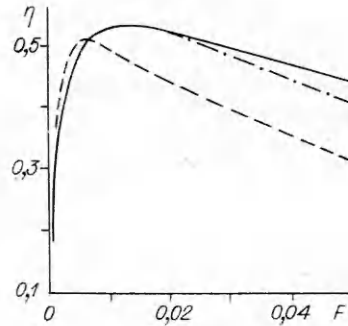
Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

рично расположенных относительно $\theta = 90^\circ$. Такое качественное различие связано, очевидно, со следующими особенностями. При больших $m \gg 1$ электромагнитные поля быстро убывают при удалении от поверхности шара и сосредоточены в тонком приповерхностном слое с толщиной порядка $1/m$, где поле скоростей слабо меняется по радиусу. При меньших $m \sim 1$ электромагнитные поля занимают область пространства вне шара с характерным размером порядка 1, в котором распределение $v(r, \theta)$ существенно изменяется как по углу θ , так и по радиусу. Естественно, что этим предельным случаям отвечают качественно различные оптимальные распределения полей \mathbf{E} , \mathbf{V} .

Найденные β_{\max} (см. табл. 1) фактически дают решение рассматриваемой вариационной задачи В в виде зависимости $\eta(k)$ (3.4), при этом F как функция k определяется выражением (3.3). Результаты вычислений на рис. 2–4 приведены в виде зависимостей $\eta(F)$, полученных исключением k из функций $\eta(k)$, $F(k)$ (сплошные линии) для $m = 10, 20$ и 30 . Соответствующие значения k для каждой точки представленных кривых легко восстанавливаются из (3.4) для η с учетом β_{\max} (см. табл. 1). Видно, что, как и в случае пластины конечной ширины [7], зависимости $\eta(F)$ немонотонны; для каждого m существует максимальное значение η_{\max} , достигаемое при определенной силе тяги F . Каждому $\eta < \eta_{\max}$ отвечают два значения F , большее из которых представляет практический интерес. На рис. 2–4 для сравнения штриховыми линиями нанесены зависимости $\eta(F)$ для мультиполя. Видно, что максимальные η_{\max} для оптимального распределения лишь незначительно больше соответствующих значений для мультиполя, в то же время при больших F выигрыш в η существен. На рис. 3, 4 штрихпунктирные линии — зависимости $\eta(F)$, полученные в результате решения задачи А при использовании условия (1.106) с $h_2(\theta) = \sin(\theta)$. Эти данные иллюстрируют высказанное утверждение, что задача А приводит к меньшим η по сравнению с результатами оптимизации в постановке В.

Таблица 2

l	A_l	l	A_l	l	A_l
20	$4,021 \cdot 10^{-2}$	30	$2,496 \cdot 10^{-3}$	36	$7,313 \cdot 10^{-4}$
22	$1,827 \cdot 10^{-2}$	32	$1,633 \cdot 10^{-3}$	38	$4,982 \cdot 10^{-4}$
24	$1,032 \cdot 10^{-2}$	34	$1,085 \cdot 10^{-3}$	40	$3,432 \cdot 10^{-4}$
26	$6,233 \cdot 10^{-3}$				
28	$3,893 \cdot 10^{-3}$				

Следует обратить внимание, что во всех приведенных случаях η_{\max} меньше или лишь незначительно превышает 0,5 даже при больших m , когда электромагнитные поля сосредоточены в тонком приповерхностном слое, где поле скоростей слабо зависит от радиуса (пограничный слой не учитывается). При этом ситуация близка к плоской пластине [7] и, казалось бы, должна обеспечить значения η_{\max} , близкие к единице. Для шара этого не происходит, так как локальная скорость в месте расположения основных объемных сил в 1,5 раза превышает скорость движения шара и пропульсивный КПД имеет значение $\approx 1/1,5$. Вследствие этого при увеличении m η_{\max} будет приближаться к 2/3, а не к 1, как для плоской пластины.

4. Приведем некоторые начальные результаты численных исследований МГД-обтекания самодвижущегося шара, снабженного найденным оптимальным источником. Они подтверждают правомерность тех предположений, на основе которых сформулированы упрощенные вариационные задачи, а также демонстрируют возможность дальнейшего снижения энергетических затрат на движение шара по сравнению с полученным ранее [5].

Как и в [5], расчеты проведены для $Re = 10^5$ при числе пар полюсов $m = 20$. Оптимальный источник характеризуется функцией $\chi_0(\theta)$, задаваемой своими коэффициентами разложения (табл. 2):

$$\chi_0(\theta) = \sum_{l=m}^{m+40} A_l P_l^m(\cos \theta), \quad P_l^m = \sum_{s=0}^{[(l-m)/2]} (-1)^s \frac{(2l-2s-1)!!}{2^s s! (l-2s-m)!} \cos^{l-2s-m} \theta \cdot \sin^m \theta.$$

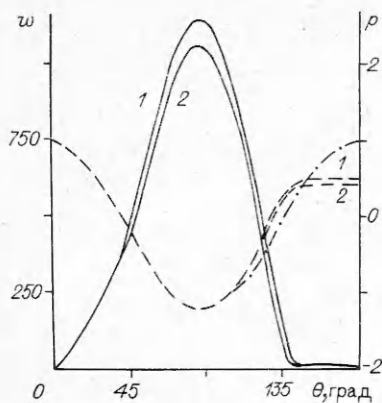
Отвечающее этой функции распределение B_α^0 приведено на рис. 1. Электрический потенциал на поверхности шара задается функцией, которая на основании (3.5) имеет вид

$$\varphi_0(\theta) = -\frac{3m}{2} k \sum_{l=m}^{m+40} \frac{A_l}{l+1} P_l^m(\cos \theta)$$

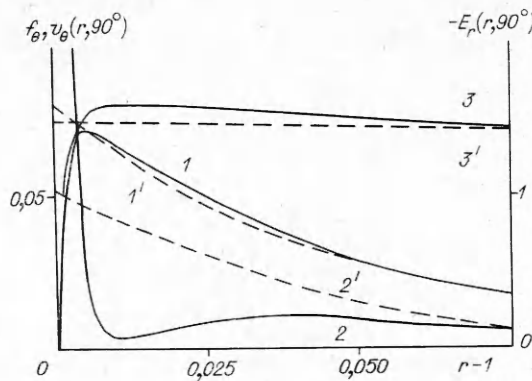
и зависит от параметра нагрузки k .

При заданных Re , m безотрывное течение вокруг шара имеет сложную многомасштабную структуру (при характерном масштабе задачи ~ 1 , определяемом геометрией, пограничный слой имеет толщину $\sim Re^{-1/2}$, а область силового поля характеризуется толщиной $\sim m^{-1}$, причем $Re^{-1/2} \ll m^{-1} \ll 1$), поэтому для исключения ошибок расчеты проводились на семействе вложенных сеток [4]. Это требует много машинного времени, в связи с чем расчеты пока выполнены лишь для двух значений k (1,066 и 1,161), первое из которых выбрано достаточно случайно, а второе соответствует наивысшей точке на кривой $\eta(F)$ (см. рис. 4) с $\eta = 0,505$ для оптимальной системы.

На рис. 5 приведены распределения завихренности (сплошные линии) и давления (штриховые) по поверхности шара (кривые 1, 2 для $k = 1,066$; 1,161). Видно, что распределения w и p близки для этих значений k . Завихренность w больше нуля на всей поверхности, т. е. обтекание безотрывно. Однако в кормовой области w не превышает единицу, в то время как $w_{\max} \sim 10^3$, это обстоятельство осложнило получение численно-



Р и с. 5



Р и с. 6

го решения. Распределение p близко к распределению давления для невязкого обтекания (штрихпунктирная линия), что и обеспечивает малость коэффициента сопротивления давления c_p . В кормовой области имеется область «плато», где давление примерно постоянно. В табл. 3 приведены результирующие интегральные параметры, характеризующие самодвижущийся режим.

Полученные для каждого k значения F и КПД η из табл. 3 нанесены на рис. 3 (точки 1 и 2). Видно, что эти точки лежат близко к кривой $\eta(F)$, полученной в качестве решения вариационной задачи В.

На рис. 6 линии 1, 1'—3, 3' дают распределения соответственно $E_r(r, \theta)$ (взятой со знаком минус), f_θ и v_θ (штриховые линии отвечают невязкому случаю). Видно, что распределения $E_r(r, \theta = 90^\circ)$ и $v_\theta(r, \theta = 90^\circ)$ близки к распределениям для невязкого течения везде, за исключением области погранслоя. Распределения же $f_\theta(r, \theta = 90^\circ)$ больше отличаются друг от друга, что обусловлено сильным изменением v_θ , \mathbf{E} , \mathbf{B} в рассматриваемой области и тем, что слагаемые в выражении $f_\theta = \{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]\}_\theta$ имеют разные знаки.

Из проведенного анализа следует, что использование приближения (2.1) для оценки интегральных энергетических величин допустимо. Однако, поскольку c_d для самодвижущегося режима довольно сильно зависит от k , было бы желательно получить решение полной вариационной задачи без упрощающего предположения (2.1).

Предпоследний столбец табл. 3 содержит параметр q [5], который представляет собой отношение потребляемой электрической мощности и механической мощности при буксировке с той же скоростью и описывает эффективность МГД-способа движения тела. Полученное при $k = 1,066$ значение $q = 0,54$ показывает, что энергетические затраты на движение шара с данным МГД-источником составляют всего 54 % от затрат на буксировку, и демонстрирует принципиальную возможность дальнейшего снижения энергетических затрат на движение шара по сравнению с [5] (в [5] $q = 0,58$), подтверждая тем самым перспективность дальнейших исследований.

Т а б л и ц а 3

k	c_p	c_f	c_d	F	η	q	N_*
1,066	0,018	0,0938	0,112	0,0090	0,432	0,541	9,8
1,161	0,063	0,0862	0,149	0,0174	0,466	0,667	6,75

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилерович Ю. М., Смирнова Н. Н. Сверхпроводящие установки с прямым преобразованием энергии // Судостроение за рубежом.— 1987.— № 5.
2. Iwata A., Tada E., Saji Y. Experimental and theoretical study of superconducting electromagnetic ship propulsion // 5th Lips Propeller Sympos., Drunen, Netherlands, May 1983.
3. Шатров В. И., Яковлев В. И. О гидродинамическом сопротивлении шара, содержащего источник электромагнитных полей кондукционного типа // ПМТФ.— 1985.— № 1.
4. Шатров В. И. Метод расчета безотрывного МГД-обтекания шара несжимаемой жидкостью при числах Рейнольдса $Re \leq 10^5$.— Новосибирск, 1984.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 24—84).
5. Шатров В. И., Яковлев В. И. О возможности снижения гидродинамического сопротивления при МГД-обтекании шара // Магнит. гидродинамика.— 1990.— № 1.
6. Шатров В. И., Яковлев В. И. Оптимизация внутреннего источника в задаче МГД-обтекания самодвижущегося шара.— Новосибирск, 1989.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 19—89).
7. Хоничев В. И., Яковлев В. И. К теории кондукционного МГД-двигателя со свободным полем // ПМТФ.— 1980.— № 5.

г. Новосибирск

Поступила 19/III 1991 г.

УДК 536.533

Т. А. Боднарь

ТЕПЛОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СПЛОШНЫХ СРЕД С ПЕРЕМЕННЫМИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Сплошная среда с распределенными источниками тепла и переменными теплофизическими характеристиками может находиться во множестве тепловых состояний, представляющих стационарные точки равновесия или колебательные процессы. Для некоторых конфигураций области, занимаемой средой, проведен анализ устойчивости тепловых состояний среды в зависимости от интенсивности источников, теплофизических свойств среды, граничных условий и размеров области. Метод анализа устойчивости основан на редукции размерности бесконечномерной задачи за счет использования проекций ее решений на пространство собственных функций. Приведены результаты расчета тепловых состояний цилиндра конечной длины и их устойчивости.

1. Постановка задачи и метод решения. Сплошная среда с распределенными источниками тепла занимает в пространстве одну из областей: ограниченную параллелепипедом, находящуюся между двумя концентрическими сферами, расположенную между двумя коаксиальными круглыми цилиндрами, закрытыми с торцов плоскостями, перпендикулярными оси цилиндров, — и взаимодействует с окружающей средой. Радиусы внутренних сферы и цилиндра могут быть равны нулю. Предполагается, что в областях, представляющих тела вращения, температура зависит только от линейных координат. Ставится задача определения тепловой устойчивости среды в зависимости от интенсивности источников, теплофизических свойств среды, граничных условий, формы и размеров области, занимаемой средой. Тепловое состояние среды описывается уравнением теплопроводности с соответствующими граничными и начальными условиями [1]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \prod_{n=1}^3 h_n^{-1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h_i^{-2} \prod_{k=1}^3 h_k \bar{\kappa}(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right) + \varphi(\Theta) + \varphi_1(x);$$

$$(1.2) \quad H_{ij}(\Theta, \partial \Theta / \partial x_i) = 0, \quad i = 1-3, \quad j = 1, 2;$$

$$(1.3) \quad \Theta(x, 0) = 0.$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$; Θ, x_i, τ — безразмерные температура, i -я координата, время; h_i — метрические коэффициенты; $\varphi(\Theta)$ — функция источни-