

УДК 621.1:50(07)

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА ПРИ ЗАКАЧКЕ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНЫЙ НЕОДНОРОДНЫЙ ПЛАСТ

А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, И. Ф. Кабиров

Институт прикладных исследований АН Республики Башкортостан, 453103 Стерлитамак
E-mail: ahoksana@yandex.ru

Рассмотрена задача о температурном поле, создаваемом источниками, положение которых не зависит от вертикальной координаты и которые сосредоточены в горизонтальном проницаемом слое, окруженном теплопроводящей средой, при стационарном движении жидкости в радиальном направлении. Для решения использован “в среднем точный” асимптотический метод. Получены аналитические выражения для нулевого приближения и первого коэффициента разложения. Определено условие, при котором осредненная задача для остаточного члена имеет тривиальное решение.

Ключевые слова: теплопроводящая среда, стационарный режим, фильтрация, температура, “в среднем точный” асимптотический метод.

Интерес к фильтрационным задачам обусловлен прежде всего их практической значимостью [1–3]. При этом большое значение имеет исследование теплофизических процессов, используемых в нефтегазовой технологии при изучении методов повышения нефтеотдачи пластов [4, 5], температурных полей, возникающих при закачке в нефтяной пласт химических реагентов — кислоты, полимеров, водных растворов поверхностно-активных веществ [6–8] и т. д. Источниками тепла Q_d являются, например, химические реакции, происходящие при воздействии химически активных веществ (например, кислоты), реакции радиоактивного распада, возникающие при фильтрации радиоактивных растворов, баротермический эффект и т. п. Температурные возмущения обусловлены также различием температуры закачиваемого флюида и естественной температуры пластов. Ниже предполагается, что движение жидкости (фильтрация в пористой среде) происходит радиально в направлении от скважины к периферии и задача обладает осевой симметрией. Для упрощения будем считать, что функция источников не зависит от вертикальной координаты z_d , т. е. $Q_d = Q_d(r_d, t)$.

В цилиндрической системе координат среда состоит из трех областей с плоскими границами раздела $z_d = \pm h$, перпендикулярными оси z_d (рис. 1). В области I среда имеет плотность ρ_1 , удельную теплоемкость c_1 , теплопроводности λ_{r1} , λ_{z1} , температуропроводности a_{r1} , a_{z1} , среда в области II характеризуется параметрами λ_{z2} , λ_{r2} , a_{r2} , a_{z2} , ρ_2 , c_2 , среда в области III (средняя область толщиной $2h$) имеет следующие параметры: λ_z , λ_r , a_r , a_z , ρ , c . Среда считается сильно анизотропной, поэтому $\lambda_r \ll \lambda_z$, $\lambda_{r1} \ll \lambda_{z1}$, $\lambda_{r2} \ll \lambda_{z2}$. Это позволяет при записи уравнения теплопроводности для всех областей пренебречь слагаемым, содержащим радиальную теплопроводность. В силу аксиальной симметрии задачи слагаемые, содержащие угловую координату φ , в уравнениях также опущены.

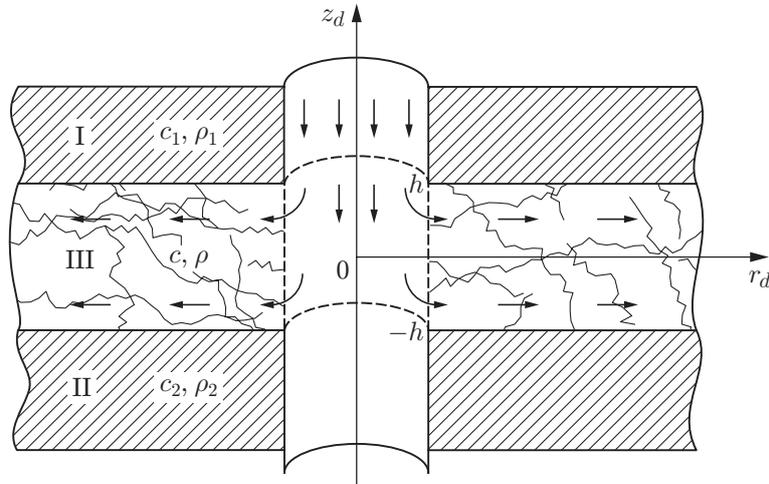


Рис. 1. Геометрия задачи:

I — настилающий пласт, II — подстилающий пласт, III — проницаемый пласт

Математическая постановка задачи для покрывающего и подстилающего массивов включает уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= a_{z1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^2}, & z_d > h, & \quad r_d > 0, \quad t > 0, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} &= a_{z2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z_d^2}, & z_d < -h, & \quad r_d > 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнение конвективной теплопроводности в пласте

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_d(r, t) \frac{\partial \theta}{\partial r_d} - a_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} = Q_d(r_d, t), \quad |z_d| < h, \quad r_d > 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

где θ , θ_1 , θ_2 — температура проницаемого, настилающего и подстилающего пластов соответственно, K ; $u(r)$ — функция скорости конвективного переноса тепла.

На границах раздела заданы условия равенства температур и тепловых потоков

$$\begin{aligned} \theta|_{z_d=h} &= \theta_1|_{z_d=h}, & \theta|_{z_d=-h} &= \theta_2|_{z_d=-h}, \\ \lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h} &= \lambda_{z1} \frac{\partial \theta_1}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h}, & \lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h} &= \lambda_{z2} \frac{\partial \theta_2}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h}. \end{aligned} \quad (3)$$

В начальный момент времени температура слоев равна естественной температуре Земли, которая определяется решением соответствующей стационарной задачи при отсутствии источников

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 - \Gamma z_d, \quad \theta_1|_{t=0} = \theta_0 - \Gamma h - \Gamma_1(z_d - h), \quad \theta_2|_{t=0} = \theta_0 + \Gamma h - \Gamma_2(z_d + h), \quad (4)$$

где $\Gamma = q_z/\lambda_z$; $\Gamma_1 = q_z/\lambda_{z1}$; $\Gamma_2 = q_z/\lambda_{z2}$; q_z — z -составляющая естественного теплового потока Земли; θ_0 — температура закачиваемой жидкости, К.

Предположим, что в скважине с нулевым радиусом температура закачиваемой жидкости изменяется по заданной зависимости

$$\theta|_{r=0} = \theta_0(t). \quad (5)$$

Решение предполагается ограниченным во всех точках $r_d > 0$, функция источников $Q(r_d, t)$ не зависит от температуры. В рассматриваемой задаче источники тепла $Q(r_d, t)$

локализованы в ограниченной области, поэтому начальное распределение температуры сохраняется в течение любого конечного промежутка времени в достаточно удаленных от источника областях:

$$\theta_0 - \Gamma h - \Gamma_1(z_d - h) - \theta_1|_{z_d \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \theta_0 + \Gamma h - \Gamma_2(z_d + h) - \theta_2|_{z_d \rightarrow -\infty} \rightarrow 0. \quad (6)$$

С использованием соотношений

$$r = \frac{r_d}{h}, \quad z = \frac{z_d}{h}, \quad \text{Fo} = \frac{ta_{z1}}{h^2}, \quad u = \frac{u_d h}{a_{z1}}, \quad Q(r, \text{Fo}) = \frac{h^2}{\theta_{11} a_{z1}} Q_d(r_d, t), \quad \Lambda = \frac{\lambda_{z1}}{\lambda_z},$$

$$\lambda = \frac{\lambda_{z2}}{\lambda_{z1}}, \quad \chi = \frac{c_1 \rho_1}{c \rho}, \quad \alpha^{-2} = \frac{a_{z2}}{a_{z1}}, \quad T_1 = \frac{\theta_1 - \theta_0 + \Gamma h + \Gamma_1(z_d - h)}{\theta_{11}},$$

$$T_2 = \frac{\theta_2 - \theta_0 - \Gamma h + \Gamma_1(z_d + h)}{\theta_{11}}, \quad T = \frac{\theta - \theta_0 + \Gamma z_d}{\theta_{11}}$$

($\alpha, \Lambda, \lambda, \chi$ — безразмерные параметры; θ_{11} — максимальный перепад температуры, К) задача (1)–(6) приводится к безразмерному виду

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q(r, \text{Fo}), \quad -1 < z < 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0; \quad (8)$$

$$T|_{z=1} = T_1|_{z=1}, \quad T|_{z=-1} = T_2|_{z=-1},$$

$$\varepsilon \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \lambda \Lambda \varepsilon \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-1},$$

$$T|_{\text{Fo}=0} = T_1|_{\text{Fo}=0} = T_2|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (9)$$

$$T_1|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0,$$

$$T|_{r=0} = T_0(\text{Fo}).$$

В общем случае скорость конвективного переноса тепла \mathbf{u} зависит от координат и времени. Предположим, что она имеет только одну отличную от нуля радиальную составляющую, не зависящую от вертикальной координаты z : $\mathbf{u} = (u_r, 0, 0)$, $u_r = u_d(r, t)$.

Рассмотрим случай $u_d > 0$, когда движение жидкости направлено от полярной оси в бесконечность, что соответствует, например, закачке в скважину раствора кислоты. При стационарном радиальном движении в направлении от полярной оси несжимаемой жидкости радиальная координата вектора скорости конвективного переноса тепла с помощью уравнения неразрывности выражается через модуль той же скорости u_0 в фиксированной точке r_0 : $u_d = u_0 r_0 / r_d$. В безразмерном виде скорость определяется выражением $u = J / (2r)$, где $J = 2u_0 r_0 / a_{z1}$.

В постановке (7)–(9) получение аналитического решения задачи существенно затруднено. При получении приближенных решений использован “в среднем точный” асимптотический метод [9, 10]. Для этого в задаче (7)–(9) формально введен параметр асимптотического разложения ε путем замены Λ на $\varepsilon \Lambda$. При $\varepsilon = 1$ задача сводится к исходной. Физический смысл введения формального параметра заключается в том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ вертикальная компонента теплопроводности возрастает до бесконечности ($\lambda_z \rightarrow \infty$). Это

приводит к тому, что нулевое приближение в пласте не зависит от вертикальной координаты (происходит мгновенное выравнивание температуры) и определяет осредненные по толщине пласта значения температуры.

Представим решение задачи в виде асимптотического разложения по параметру ε

$$T_j = T_j^{(0)} + \varepsilon T_j^{(1)} + \varepsilon^2 T_j^{(2)} + \dots + \varepsilon^n T_j^{(n)} + \Theta_j^{(n)}, \quad (10)$$

где нижние индексы у безразмерной температуры T соответствуют номеру области, а верхние — порядковому номеру приближения.

Процедуру определения коэффициентов асимптотического разложения можно повторять до тех пор, пока не будет получено требуемое количество слагаемых. Однако обычно приходится ограничиваться нулевым и первым слагаемыми в асимптотическом разложении. Подставляя (10) в (7)–(9), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0, \\ \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\chi}{\Lambda} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} - Q(r, \text{Fo}) \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial z^2} \right) + \dots = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$T^{(0)}|_{z=1} - T_1^{(0)}|_{z=1} + \varepsilon (T^{(1)}|_{z=1} - T_1^{(1)}|_{z=1}) + \dots = 0, \quad (13)$$

$$T^{(0)}|_{z=-1} - T_2^{(0)}|_{z=-1} + \varepsilon (T^{(1)}|_{z=-1} - T_2^{(1)}|_{z=-1}) + \dots = 0;$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) + \dots = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} + \varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} - \Lambda \lambda \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} - \Lambda \lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + \dots = 0;$$

$$T^{(i)}|_{\text{Fo}=0} = T_1^{(i)}|_{\text{Fo}=0} = T_2^{(i)}|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

$$T_1^{(i)}|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(i)}|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0;$$

$$(T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \dots)|_{r=0} = T_0(\text{Fo}). \quad (16)$$

Ниже с учетом полученных выражений для коэффициентов разложения формулируется задача для остаточного члена. Из (12) для нулевого приближения получаем $\partial^2 T^{(0)}/\partial z^2 = 0$. Следовательно, производная от нулевого приближения по z не зависит от координаты z , т. е. $\partial T^{(0)}/\partial z = \text{const}$. Так как для нулевого приближения из (14) следует, что $\partial T^{(0)}/\partial z|_{z=1} = 0$ и $\partial T^{(0)}/\partial z|_{z=-1} = 0$, то получаем $\partial T^{(0)}/\partial z = 0$. Последнее равенство означает, что $T^{(0)}$ не зависит от z и является функцией только r и Fo , т. е. $T^{(0)} = T^{(0)}(r, \text{Fo})$. Приравнявая к нулю выражение перед множителем первого порядка по ε в (12), получаем

$$\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} = A(r, \text{Fo}) = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - Q(r, \text{Fo}) \right). \quad (17)$$

Уравнение (17) является “сцепленным”, т. е. содержит коэффициенты разложения как нулевого $T^{(0)}$, так и первого $T^{(1)}$ порядка. Это затрудняет решение соответствующих задач. Ниже описаны преобразования, позволяющие “расцепить” уравнение (17), исключив из него $T^{(1)}$.

Так как $T^{(0)}$ не зависит от координаты z , то согласно (17) функция $A(r, Fo)$ также не зависит от z . Проинтегрировав дважды (17), получаем выражение для температуры в пласте в первом приближении

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = zA(r, Fo) + B(r, Fo), \quad T^{(1)} = \frac{z^2}{2} A(r, Fo) + zB(r, Fo) + E(r, Fo), \quad (18)$$

где функции $B(r, Fo)$ и $E(r, Fo)$ не зависят от z . Приравнявая к нулю выражения перед множителем первого порядка по ε в (14), находим

$$\left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=1} = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1}, \quad \left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=-1} = \Lambda \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1}. \quad (19)$$

Используя выражение (18) для градиента температуры $\partial T^{(1)}/\partial z$ при $z = 1$, $z = -1$ и условия (19), запишем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $A(r, Fo)$ и $B(r, Fo)$

$$A(r, Fo) + B(r, Fo) = \Lambda \left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1}, \quad -A(r, Fo) + B(r, Fo) = \Lambda \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1}. \quad (20)$$

Решая систему (20) относительно $A(r, Fo)$ и $B(r, Fo)$, имеем

$$\begin{aligned} A(r, Fo) &= \frac{\Lambda}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right), \\ B(r, Fo) &= \frac{\Lambda}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} + \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя выражение (21) для $A(r, Fo)$ в (17), получаем уравнение, содержащее коэффициенты разложения только нулевого порядка:

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) = Q(r, Fo). \quad (22)$$

Итак, реализованная выше последовательность преобразований позволила “расцепить” исходное уравнение (17), содержащее коэффициенты разложения нулевого и первого порядков $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$. Выписав из (11)–(16) слагаемые нулевого порядка по ε , с учетом (22) получаем задачу, содержащую только нулевые коэффициенты разложения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)}}{\partial z^2} &= 0, \quad z > 1, \quad r > 0, \quad Fo > 0, \\ \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial Fo} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(0)}}{\partial z^2} &= 0, \quad z < -1, \quad r > 0, \quad Fo > 0; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\left. \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=1} - \lambda \left. \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=-1} \right) &= Q(r, Fo), \\ |z| < 1, \quad r > 0, \quad Fo > 0; \\ T_1^{(0)} \Big|_{z=1} = T_2^{(0)} \Big|_{z=-1} &= T^{(0)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
T^{(0)}|_{Fo=0} &= T_1^{(0)}|_{Fo=0} = T_2^{(0)}|_{Fo=0} = 0, \\
T_1^{(0)}|_{z \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \quad T_2^{(0)}|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \\
T^{(0)}|_{r=0} &= T_0(Fo).
\end{aligned}
\tag{25}$$

Эффективность используемого метода обусловлена тем, что в исходной задаче вторая производная по вертикальной координате трансформировалась в следы производных из внешних областей для нулевого коэффициента. Этот метод аналогичен методу интегральных преобразований, в которых производные заменяются алгебраическими выражениями. Однако при построении конструктивных расчетных формул наиболее эффективным является использование обоих методов.

Осреднение исходной задачи. Поскольку получение аналитического решения исходной задачи (7)–(9) с использованием классических методов затруднено, обычно при решении подобных задач определяются значения функции, осредненной по некоторому параметру. В результате интегрального осреднения уравнения (8) по z с помощью формулы

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T dz \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial Fo} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} &= 0, \quad z > 1, \quad r > 0, \quad Fo > 0, \\
\frac{\partial T_2}{\partial Fo} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} &= 0, \quad z < -1, \quad r > 0, \quad Fo > 0, \\
\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial Fo} + u(r, Fo) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) &= Q(r, Fo), \\
|z| < 1, \quad r > 0, \quad Fo > 0, & \\
T_1|_{z=1} = T_2|_{z=-1} &= \langle T \rangle, \\
\langle T \rangle|_{Fo=0} = T_1|_{Fo=0} = T_2|_{Fo=0} &= 0, \\
\lim_{z \rightarrow \infty} T_1 = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} T_2 &= 0, \\
\langle T \rangle|_{r=0} &= T_0(Fo).
\end{aligned}
\tag{26}$$

При этом использовалось соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial z^2} dz = \frac{1}{2} \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=1} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right).$$

Нетрудно показать, что постановки задач (23)–(25) и (26) совпадают. Из единственности решения следует $T^{(0)} = \langle T \rangle$, т. е. решения задач для нулевого коэффициента и осредненных значений температуры совпадают. Таким образом, процедура определения нулевого коэффициента разложения соответствует процедуре построения решения осредненной задачи. Этот результат используется при построении решений уравнений с переменными коэффициентами или нелинейных уравнений, возникающих, например, при фазовых переходах в рассматриваемом слое. В этом случае применение классической процедуры интегрального осреднения не позволяет получить рациональное конечное выражение, в то время как нахождение среднего значения путем решения задачи в асимптотическом нулевом приближении во многих случаях дает аналитические решения, которые могут быть использованы на практике.

Решение задачи в нулевом приближении. Предположим, что скорость конвективного переноса тепла не зависит от времени, т. е. $u = u(r) = J/(2r) > 0$. Сформулируем задачу (23)–(25) в пространстве изображений Лапласа — Карсона:

$$\begin{aligned} pT_1^{(0)и} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)и}}{\partial z^2} &= 0, & z > 1, & r > 0, \\ pT_2^{(0)и} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(0)и}}{\partial z^2} &= 0, & z < -1, & r > 0; \end{aligned} \quad (27)$$

$$pT^{(0)и} + u(r) \frac{\partial T^{(0)и}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(0)и}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(0)и}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = Q^и(r, p); \quad (28)$$

$$T_1^{(0)и} \Big|_{z=1} = T_2^{(0)и} \Big|_{z=-1} = T^{(0)и}; \quad (29)$$

$$T_1^{(0)и} \Big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T_2^{(0)и} \Big|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0,$$

$$T^{(0)и} \Big|_{r=0} = T_0(p).$$

Решения уравнений (27) с учетом граничного условия (29) имеют вид

$$T_1^{(0)и} = T^{(0)и} \exp(-\sqrt{p}(z-1)), \quad T_2^{(0)и} = T^{(0)и} \exp(\alpha\sqrt{p}(z+1)). \quad (30)$$

С учетом (30) выражения (21) после нахождения в них частных производных в пространстве изображений для областей I, II (см. рис. 1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} A^и(r, p) &= \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(0)и}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(0)и}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = -\frac{\Lambda}{2} (1 + \alpha\lambda) \sqrt{p} T^{(0)и} = -\Lambda \text{Fi}_+ \sqrt{p} T^{(0)и}, \\ B^и(r, p) &= \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(0)и}}{\partial z} \Big|_{z=1} + \lambda \frac{\partial T_2^{(0)и}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = -\frac{\Lambda}{2} (1 - \alpha\lambda) \sqrt{p} T^{(0)и} = -\Lambda \text{Fi}_- \sqrt{p} T^{(0)и}, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\text{Fi}_+ = (1 + \lambda\sqrt{a_{z1}/a_{z2}})/2$, $\text{Fi}_- = (1 - \lambda\sqrt{a_{z1}/a_{z2}})/2$ — коэффициенты асимметрии. Уравнение (28) преобразуем к виду

$$(p + \chi\sqrt{p} \text{Fi}_+) T^{(0)и} + \frac{\partial T^{(0)и}}{\partial \tau} = Q^и(\tau, p), \quad (32)$$

где

$$\tau = \int_a^r \frac{dr''}{u(r'')}.$$

Величина a является произвольной. В результате получаем аналитическое решение уравнения (32) в изображениях для области III (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} T^{(0)и} &= T_0(p) \exp \left(- (p + \chi\sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right) + \\ &+ \int_0^r Q^и(r', p) \exp \left(- (p + \chi\sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_{r'}^r \frac{dr''}{u(r'')} \right) \frac{dr'}{u(r')}. \end{aligned} \quad (33)$$

С использованием (33) нетрудно найти решение в пространстве изображений для областей I, II (см. рис. 1):

$$T_1^{(0)u} = T_0(p) \exp \left(- (p + \chi\sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} - \sqrt{p}(z-1) \right) + \\ + \int_0^r Q^u(r', p) \exp \left(- (p + \chi\sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_{r'}^r \frac{dr''}{u(r'')} - \sqrt{p}(z-1) \right) \frac{dr'}{u(r')},$$

$$T_2^{(0)u} = T_0(p) \exp \left(- (p + \chi\sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} + \alpha\sqrt{p}(z+1) \right) + \\ + \int_0^r Q^u(r', p) \exp \left(- (p + \chi\sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_{r'}^r \frac{dr''}{u(r'')} + \alpha\sqrt{p}(z+1) \right) \frac{dr'}{u(r')}.$$

Выполнив переход в пространство оригиналов, в частном случае $u(r) = J/(2r)$ получаем

$$T^{(0)} = \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} T_0(\text{Fo}-t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \text{Fi}_+ r^2}{2\sqrt{J(Jt-r^2)}} \right) \Phi \left(t - \frac{r^2}{J} \right) dt + \\ + \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} Q(r', \text{Fo}-t) \int_0^r \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \text{Fi}_+(r^2-r'^2)}{2\sqrt{J(Jt-r^2+r'^2)}} \right) \Phi \left(t - \frac{r^2-r'^2}{J} \right) \frac{2r' dr' dt}{J},$$

$$T_1^{(0)} = \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} T_0(\text{Fo}-t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \text{Fi}_+ r^2 + J(z-1)}{2\sqrt{J(Jt-r^2+r'^2)}} \right) \Phi \left(t - \frac{r^2-r'^2}{J} \right) dt + \\ + \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} Q(r', \text{Fo}-t) \int_0^r \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \text{Fi}_+(r^2-r'^2) + J(z-1)}{2\sqrt{J(Jt-r^2+r'^2)}} \right) \Phi \left(t - \frac{r^2-r'^2}{J} \right) \frac{2r' dr' dt}{J},$$

$$T_2^{(0)} = \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} T_0(\text{Fo}-t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \text{Fi}_+(r^2-r'^2) - J\alpha(z+1)}{2\sqrt{J(Jt-r^2+r'^2)}} \right) \Phi \left(t - \frac{r^2-r'^2}{J} \right) dt + \\ + \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} Q(r', \text{Fo}-t) \int_0^r \operatorname{erfc} \left(\frac{\chi \text{Fi}_+(r^2-r'^2) - J\alpha(z+1)}{2\sqrt{J(Jt-r^2+r'^2)}} \right) \Phi \left(t - \frac{r^2-r'^2}{J} \right) \frac{2r' dr' dt}{J},$$

где $\Phi(x)$ — единичная функция Хевисайда.

Полученные выражения можно использовать при построении формул для расчетов средней температуры в пласте и температуры в окружающих его породах. Например, при $T_0(\text{Fo}) = T_0 = \text{const}$, $Q(r, \text{Fo}) = 0$ имеем

$$T^{(0)} = T_0 \operatorname{erfc} \left(\chi \text{Fi}_+ \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} / 2 \left(\text{Fo} - \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right)^{1/2} \right) \Phi \left(\text{Fo} - \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right),$$

$$T_1^{(0)} = T_0 \operatorname{erfc} \left(\left(\chi \operatorname{Fi}_+ \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} + z - 1 \right) / 2 \left(\operatorname{Fo} - \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right)^{1/2} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right), \quad (34)$$

$$T_2^{(0)} = T_0 \operatorname{erfc} \left(\left(\chi \operatorname{Fi}_+ \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} - \alpha(z + 1) \right) / 2 \left(\operatorname{Fo} - \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right)^{1/2} \right) \Phi \left(\operatorname{Fo} - \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right).$$

Аналогично задаче определения нулевого приближения с использованием (11)–(16) формулируется задача для первого коэффициента разложения. С учетом условия, следующего из (16), эта задача имеет только тривиальное решение. Ниже показано, что для получения единственного нетривиального решения задачи для $T^{(1)}$ условие при $r = 0$ следует ослабить и заменить нелокальным среднеинтегральным. Такое условие получено в случае, когда задача для осредненного по толщине пласта остаточного члена имеет нулевое решение.

Задача для остаточного члена. Представим искомое решение в виде $T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \Theta$ и сформулируем задачу определения остаточного члена Θ :

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \operatorname{Fo}} - \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_2}{\partial \operatorname{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial z^2} = 0; \quad (35)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \operatorname{Fo}} + u(r) \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\chi}{\varepsilon \Lambda} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\varepsilon \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \operatorname{Fo}} + u(r) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right); \quad (36)$$

$$\Theta|_{z=1} = \Theta_1|_{z=1}, \quad \Theta|_{z=-1} = \Theta_2|_{z=-1}; \quad (37)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=1} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial (\Theta_1 + \varepsilon T_1^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \varepsilon \Lambda \lambda \frac{\partial (\Theta_2 + \varepsilon T_2^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=-1}; \quad (38)$$

$$\Theta|_{\operatorname{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_1|_{\operatorname{Fo}=0} = \Theta_2|_{\operatorname{Fo}=0} = 0,$$

$$\Theta_1|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta_2|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad (39)$$

$$\Theta|_{r=0} = -\varepsilon T^{(1)}|_{r=0}.$$

Осредним задачу (35)–(39) по z с помощью формулы $\langle \Theta \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Theta dz$. Для осреднения

уравнения (36) использовано следующее из (38) соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} dz &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \\ &= \frac{\Lambda \varepsilon}{2} \left(\frac{\partial (\Theta_1 + \varepsilon T_1^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial (\Theta_2 + \varepsilon T_2^{(1)})}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right). \end{aligned}$$

Осредненная задача для остаточного члена имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \operatorname{Fo}} - \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_2}{\partial \operatorname{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial z^2} = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \text{Fo}} + u(r) \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = \\
& = -\varepsilon \left(\frac{\partial \langle T \rangle^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + u(r) \frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) \right); \quad (40) \\
& \langle \Theta \rangle \Big|_{z=1} = \Theta_1 \Big|_{z=1}, \quad \langle \Theta \rangle \Big|_{z=-1} = \Theta_2 \Big|_{z=-1}, \\
& \langle \Theta \rangle \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_1 \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad \Theta_2 \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \\
& \Theta_1 \Big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta_2 \Big|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0; \\
& \langle \Theta \rangle \Big|_{r=0} = -\varepsilon \langle T^{(1)} \rangle \Big|_{r=0}. \quad (41)
\end{aligned}$$

Осредняя аналогично уравнение для первого коэффициента разложения в (12), с учетом условий сопряжения (14) получаем

$$\frac{\partial \langle T \rangle^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + u(r) \frac{\partial \langle T^{(1)} \rangle}{\partial r} = \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right).$$

Это означает, что правая часть уравнения (40) тождественно равна нулю. Следовательно, осредненный остаточный член $\langle \Theta \rangle$ и осредненный первый коэффициент $\langle T^{(1)} \rangle$ удовлетворяют одному и тому же уравнению, в котором дифференциальная часть оператора дополняется следами производных из внешних областей. Такой же оператор со следами производных содержит уравнение для нулевого коэффициента (24).

Из (41) при условии $\langle T^{(1)} \rangle \Big|_{r=0} = 0$ следует, что осредненная задача для остаточного члена имеет только тривиальное решение. Ниже это дополнительное условие использовано в задаче для первого коэффициента. Показано, что задача для первого коэффициента с таким условием имеет ненулевое решение, а осредненная задача для остаточного члена — только тривиальное решение.

Найденное асимптотическое разложение обладает важным свойством, заключающимся в том, что решение осредненной задачи для остаточного члена является тривиальным при любых значениях формального параметра ε . Это позволяет оценить близость точного и найденного асимптотического решений. Поэтому целесообразно выделить соответствующий класс асимптотических решений, для которых нулевой коэффициент является решением осредненной задачи. Асимптотическое решение параметризованной задачи (7)–(9), построенное при условии, что решение осредненной задачи для остаточного члена является тривиальным, называется “в среднем точным” асимптотическим решением.

Постановка задачи для первого коэффициента. Из условия равенства нулю вторых слагаемых порядка ε в (11)–(13), (15) и третьего слагаемого порядка ε^2 в уравнении (14) выведем уравнения для определения первого коэффициента:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \\
& \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad z < -1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0; \\
& \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} - \frac{\chi}{\Lambda} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad |z| < 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0; \quad (42) \\
& T_1^{(1)} \Big|_{z=1} = T^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad T_2^{(1)} \Big|_{z=-1} = T^{(1)} \Big|_{z=-1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} &= \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=1}, & \lambda \Lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} &= \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=-1}; \\ T^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} &= 0, & T_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} &= T_2^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \\ T_1^{(1)} \Big|_{z \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, & T_2^{(1)} \Big|_{z \rightarrow -\infty} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (43)$$

При построении “в среднем точного” решения добавим к этим уравнениям среднеинтегральное условие

$$\langle T^{(1)} \rangle \Big|_{r=0} = 0.$$

Выполним “расщепление” уравнения теплопроводности для пронизываемого пласта, содержащего коэффициенты разложения первого и второго порядков. Уравнение (42) представим в виде

$$\hat{L}T^{(1)} = \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial z^2}, \quad (44)$$

где \hat{L} — оператор:

$$\hat{L} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(\frac{\partial}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Воздействуя оператором \hat{L} на выражение (18) согласно (44), получаем

$$\hat{L}T^{(1)} = \frac{z^2}{2} \hat{L}A(r, \text{Fo}) + z\hat{L}B(r, \text{Fo}) + \hat{L}E(r, \text{Fo}) = \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial z^2}. \quad (45)$$

Уравнение (45) эквивалентно уравнению (42). В (45) функции $A(r, \text{Fo})$ и $B(r, \text{Fo})$ находятся из (21), а функция $E(r, \text{Fo})$ неизвестна. Для определения функции $\hat{L}E(r, \text{Fo})$ проинтегрируем по z выражение (45). В результате имеем

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} = \frac{z^3}{6} \hat{L}A(r, \text{Fo}) + \frac{z^2}{2} \hat{L}B(r, \text{Fo}) + z\hat{L}E(r, \text{Fo}) + M(r, \text{Fo}). \quad (46)$$

Из (46), (43) на границах $z = 1$ и $z = -1$ получаем систему двух уравнений для определения $\hat{L}E(r, \text{Fo})$, из которой следует выражение

$$\hat{L}E(r, \text{Fo}) = \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) - \frac{1}{6} \hat{L}A(r, \text{Fo}). \quad (47)$$

Подставляя в (45) выражения для $A(r, \text{Fo})$ и $B(r, \text{Fo})$ (21), а также выражение для $\hat{L}E(r, \text{Fo})$ (47), сформулируем задачу для первых коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, & z > 1, & \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \\ \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial \text{Fo}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, & z < -1, & \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \text{Fo}} + u(r, \text{Fo}) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) &= \chi \left(\frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} - \frac{1}{12} \right) \hat{L} \left(\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) - \\ &- \chi \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z}{2} - \frac{1}{12} \right) \hat{L} \left(\lambda \frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right), \quad |z| < 1, \quad r > 0, \quad \text{Fo} > 0, \\ T_1^{(1)} \Big|_{z=1} &= T^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad T_2^{(1)} \Big|_{z=-1} = T^{(1)} \Big|_{z=-1}, \\ T^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} &= 0, \quad T_1^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = T_2^{(1)} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \\ T_1^{(1)} \Big|_{z \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \quad T_2^{(1)} \Big|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \\ \langle T^{(1)} \rangle \Big|_{r=0} &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в отличие от задачи для нулевого коэффициента задача для первого коэффициента не содержит в явном виде функции источников $Q(r, \text{Fo})$. Тем не менее решение зависит от этой функции через нулевое приближение.

Применяя преобразование Лапласа — Карсона по времени для случая $u(r, \text{Fo}) = u(r)$, перейдем в пространство изображений. Очевидно, что действие оператора \hat{L} в пространстве изображений на некоторую функцию G определяется формулой

$$(\hat{L}G)^{\text{и}} = \frac{\Lambda}{\chi} \left(pG^{\text{и}} - pG \Big|_{\text{Fo}=0} + u(r) \frac{\partial}{\partial r} G^{\text{и}} \right),$$

где $G \Big|_{\text{Fo}=0}$ — значение функции G в начальный момент времени ($\text{Fo} = 0$). Для первого приближения задача в пространстве изображений принимает вид

$$\begin{aligned} pT_1^{(1)\text{и}} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)\text{и}}}{\partial z^2} &= 0, \quad z > 1, \\ pT_2^{(1)\text{и}} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2 T_2^{(1)\text{и}}}{\partial z^2} &= 0, \quad z < -1; \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} pT^{(1)\text{и}} + u(r) \frac{\partial T^{(1)\text{и}}}{\partial r} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(1)\text{и}}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)\text{и}}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) &= \\ &= \chi \left(\frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} - \frac{1}{12} \right) \hat{L}^{\text{и}} \left(\frac{\partial T_1^{(0)\text{и}}}{\partial z} \Big|_{z=1} \right) - \chi \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z}{2} - \frac{1}{12} \right) \hat{L}^{\text{и}} \left(\lambda \frac{\partial T_2^{(0)\text{и}}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right), \\ &|z| < 1, \quad r > 0, \\ T_1^{(1)\text{и}} \Big|_{z=1} &= T^{(1)\text{и}} \Big|_{z=1}, \quad T_2^{(1)\text{и}} \Big|_{z=-1} = T^{(1)\text{и}} \Big|_{z=-1}, \\ T_1^{(1)\text{и}} \Big|_{z \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \quad T_2^{(1)\text{и}} \Big|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0; \\ \langle T^{(1)\text{и}} \rangle \Big|_{r=0} &= 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Выражение (47) в пространстве изображений записывается в виде

$$(\hat{L}E)^{\text{и}} = \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{\partial T_1^{(1)\text{и}}}{\partial z} \Big|_{z=1} - \lambda \frac{\partial T_2^{(1)\text{и}}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) - \frac{1}{6} \hat{L}^{\text{и}} A^{\text{и}}(r, p). \tag{50}$$

Решение уравнений (48) находится аналогично решению в нулевом приближении:

$$T_1^{(1)\text{и}} = T^{(1)\text{и}} \Big|_{z=1} \exp(-\sqrt{p}(z-1)), \quad T_2^{(1)\text{и}} = T^{(1)\text{и}} \Big|_{z=-1} \exp(\alpha\sqrt{p}(z+1)). \tag{51}$$

Вид решения $T^{(1)u}$ определяется из соотношения (18):

$$T^{(1)u} = \frac{z^2}{2} A^u(r, p) + zB^u(r, p) + E^u(r, p) = -\Lambda \left(\frac{z^2}{2} \text{Fi}_+ + z \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + E^u(r, p). \quad (52)$$

Здесь учтено, что согласно (31) $A^u(r, p) = -\Lambda \text{Fi}_+ \sqrt{p} T^{(0)u}$, $B^u(r, p) = -\Lambda \text{Fi}_- \sqrt{p} T^{(0)u}$. Для определения решения в виде (52) необходимо определить вид функции $E^u(r, p)$. Используя (51), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} &= -\sqrt{p} T^{(1)u} \Big|_{z=1} = -\sqrt{p} \left(\frac{1}{2} A^u(r, p) + B^u(r, p) + E^u(r, p) \right), \\ \frac{\partial T_2^{(1)u}}{\partial z} \Big|_{z=-1} &= \alpha \sqrt{p} T^{(1)u} \Big|_{z=-1} = \alpha \sqrt{p} \left(\frac{1}{2} A^u(r, p) - B^u(r, p) + E^u(r, p) \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Подставляя (52), (53) в (50), получаем уравнение для $E^u(r, p)$

$$u(r) \frac{\partial E^u}{\partial r} + (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) E^u = pE(r, 0) + \frac{\Lambda \chi}{3} \text{Fi}_+^2 p T^{(0)u} + \frac{\Lambda}{6} \text{Fi}_+ \sqrt{p} Q^u \equiv F^u(r, p),$$

где $\text{Fi}^2 = \text{Fi}_+^2 + 3\text{Fi}_-^2$. Решение этого уравнения для случая $u(r) > 0$ с условием $E^u|_{r=0} = (\Lambda/6) \text{Fi}_+ \sqrt{p} T_0(p)$, следующим из (49), (52), можно представить в виде

$$\begin{aligned} E^u &= \int_0^r F^u(r', p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_{r'}^r \frac{dr''}{u(r'')} \right) \frac{dr'}{u(r')} + \\ &+ \frac{1}{6} \Lambda \sqrt{p} \text{Fi}_+ T_0(p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right). \end{aligned}$$

Вследствие наличия экспоненциальных множителей, содержащих параметр p , оба слагаемых в выражении для E^u обращаются в нуль при $p \rightarrow \infty$. Поэтому из теоремы о соответствии следует, что $E(r, 0) = 0$ при $r > 0$.

С помощью (52) нетрудно найти решения в пространстве изображений для всех областей, показанных на рис. 1:

$$\begin{aligned} T^{(1)u} &= -\Lambda \left(\frac{z^2}{2} \text{Fi}_+ + z \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + \\ &+ \frac{1}{6} \Lambda \sqrt{p} \text{Fi}_+ T_0(p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right) + \\ &+ \int_0^r F^u(r', p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_{r'}^r \frac{dr''}{u(r'')} \right) \frac{dr'}{u(r')}, \\ T_1^{(1)u} &= \left[-\Lambda \left(\frac{1}{2} \text{Fi}_+ + \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + \right. \\ &+ \frac{1}{6} \Lambda \sqrt{p} \text{Fi}_+ T_0(p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right) + \\ &+ \left. \int_0^r F^u(r', p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_{r'}^r \frac{dr''}{u(r'')} \right) \frac{dr'}{u(r')} \right] \exp [-\sqrt{p}(z-1)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2^{(1)u} = & \left[-\Lambda \left(\frac{1}{2} \text{Fi}_+ - \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + \right. \\
& + \frac{1}{6} \Lambda \sqrt{p} \text{Fi}_+ T_0(p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_0^r \frac{dr''}{u(r'')} \right) + \\
& \left. + \int_0^r F^u(r', p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \int_{r'}^r \frac{dr''}{u(r'')} \right) \frac{dr'}{u(r')} \right] \exp [\alpha \sqrt{p} (z + 1)].
\end{aligned}$$

Коэффициенты $A(r, p)$, $B(r, p)$, входящие в выражение для $T^{(1)u}$, содержат $T^{(0)u}$ в качестве множителя. Поскольку согласно теореме о соответствиях предел $p \rightarrow \infty$ соответствует пределу $\text{Fo} \rightarrow 0$ в пространстве оригиналов, используя выражения для $T^{(0)}$ (33), можно показать, что при $\text{Fo} = 0$ коэффициенты $A(r, \text{Fo})$ и $B(r, \text{Fo})$ обращаются в нуль вследствие наличия экспоненциального множителя в выражении для $T^{(0)u}$. Следовательно, в решении рассматриваемой задачи в окрестности значения $\text{Fo} = 0$ отсутствует погранслои.

Аналогично можно показать, что при $r = 0$ коэффициенты $A(r, \text{Fo})$, $B(r, \text{Fo})$ не обращаются в нуль вследствие наличия первого слагаемого в (33). Следовательно, решение задачи содержит погранслои в окрестности $r = 0$, причем это обусловлено не наличием источников, а отличием от нуля заданного значения температуры $T_0(\text{Fo})$ при $r = 0$.

Итак, в окрестности $\text{Fo} = 0$ погранслои отсутствуют, однако он неизбежно возникает в окрестности $r = 0$, поскольку при $r = 0$ коэффициенты A^u , B^u , E^u отличны от нуля. (Выражения для погранслоевых функций и процедура их построения в настоящей работе не приводятся.)

В частном случае $u(r) = J/(2r)$ получаем

$$\begin{aligned}
T^{(1)u} = & -\Lambda \left(\frac{z^2}{2} \text{Fi}_+ + z \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + \frac{1}{6} \Lambda \sqrt{p} \text{Fi}_+ T_0(p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \frac{r^2}{J} \right) + \\
& + \frac{2}{J} \int_0^r F^u(r', p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \frac{r^2 - r'^2}{J} \right) r' dr',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1^{(1)u} = & \left[-\Lambda \left(\frac{1}{2} \text{Fi}_+ + \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + \frac{1}{6} \Lambda \sqrt{p} \text{Fi}_+ T_0(p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \frac{r^2}{J} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{2}{J} \int_0^r F^u(r', p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \frac{r^2 - r'^2}{J} \right) r' dr' \right] \exp [-\sqrt{p} (z - 1)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2^{(1)u} = & \left[-\Lambda \left(\frac{1}{2} \text{Fi}_+ - \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u} + \frac{1}{6} \Lambda \sqrt{p} \text{Fi}_+ T_0(p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \frac{r^2}{J} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{2}{J} \int_0^r F^u(r', p) \exp \left(- (p + \chi \sqrt{p} \text{Fi}_+) \frac{r^2 - r'^2}{J} \right) r' dr' \right] \exp [\alpha \sqrt{p} (z + 1)].
\end{aligned}$$

Вычисление оригиналов полученных выражений не вызывает затруднений. В качестве примера приведем выражения для температурного профиля в центральном пласте при наличии источника, расположенного на цилиндрической поверхности радиусом R , при $T_0(t) = 0$ в пространствах изображений и оригиналов соответственно:

$$T^{(1)u} - T^{(1)u}|_{z=1} = -\Lambda \left(\frac{z^2 - 1}{2} \text{Fi}_+ + (z - 1) \text{Fi}_- \right) \sqrt{p} T^{(0)u};$$

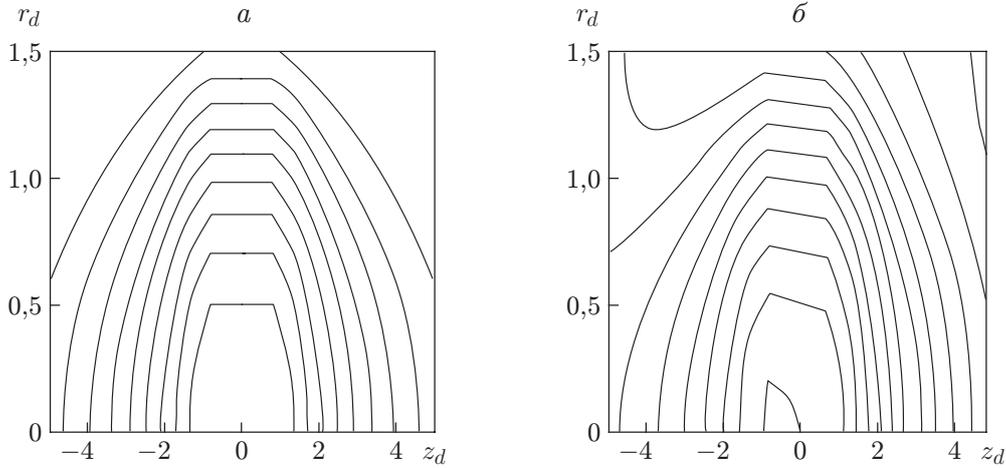


Рис. 2. Изотермы поля, возникающего вследствие различия температур закачиваемой жидкости и пласта, в нулевом приближении без учета (а) и с учетом (б) наличия естественного температурного поля Земли

$$T^{(1)} - T^{(1)}|_{z=1} = -\frac{\Lambda}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z^2 - 1}{2} \text{Fi}_+ + (z - 1) \text{Fi}_- \right) \sqrt{\frac{J}{J \text{Fo} + R^2 - r^2}} \times \exp \left(-\frac{\chi^2 \text{Fi}_+^2 (R^2 - r^2)^2}{4J(J \text{Fo} + R^2 - r^2)} \right) \Phi(J \text{Fo} + R^2 - r^2) \Phi(r - R). \quad (54)$$

Окончательно решения в пространстве оригиналов в первом приближении записываются в виде

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)}, \quad T_1 = T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)}, \quad T_2 = T_2^{(0)} + \varepsilon T_2^{(1)}.$$

Также можно показать, что полученные выражения для первого приближения совпадают с разложением точного решения в ряд Маклорена. Тем не менее приведенные выше выражения для первого коэффициента разложения соответствуют реальным профилям температуры только в случае достаточно больших времен.

В отличие от первого приближения нулевое приближение всегда соответствует решению осредненной температурной задачи и применимо при любых значениях времени.

На рис. 2 представлены изотермы поля, возникающего вследствие различия температур закачиваемой жидкости и пласта. Расчеты выполнены с использованием формул (34) с учетом наличия естественного температурного поля Земли и без его учета. В расчетах приняты следующие теплофизические параметры нефтенасыщенного пласта и окружающей среды: $c = 870$ Дж/(кг·К), $\rho = 2033$ кг/м³, $c_1 = 900$ Дж/(кг·К), $\rho_1 = 2626$ кг/м³, $a_{z1} = 10^{-6}$ м²/с. Другие расчетные параметры имеют следующие значения: $h = 1$, $T_0 = 1$.

Результаты сравнения рис. 2, а, б показывают, что наличие естественного температурного поля обуславливает асимметрию изотерм относительно центра пласта $z_d = 0$. Линейная зависимость между координатами r_d и z_d в интервале пласта также обусловлена влиянием поля Земли.

Известно, что с увеличением градиента температуры плотность расположения изотерм увеличивается. Это позволяет выявить зоны с максимальными градиентами температурного поля. Из анализа рис. 2 следует, что зоны с относительно малыми градиентами соответствуют изотермам для высоких и низких температур, в то время как зоны с большими градиентами соответствуют изотермам для средних температур.

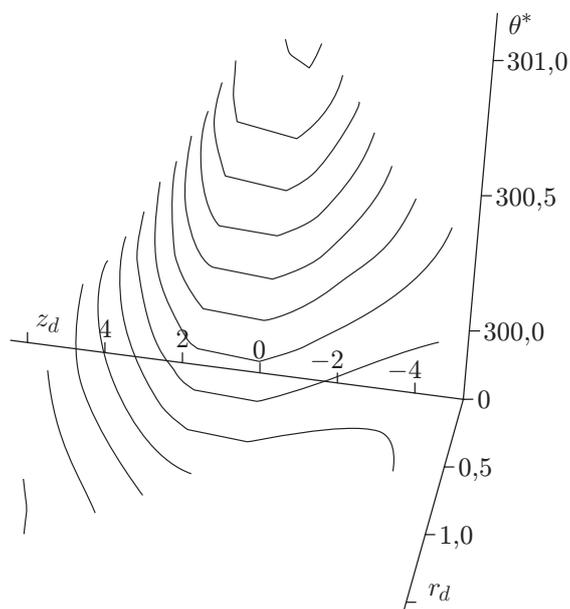


Рис. 3. Пространственные изотермы поля температур пласта и окружающей среды

Более полное представление о зонах с минимальными и максимальными градиентами температуры можно получить при анализе пространственных изотерм, представленных на рис. 3 (θ^* — абсолютные значения температуры).

Таким образом, применение “в среднем точного” асимптотического метода при решении задачи о температурном поле, создаваемом источниками при закачке жидкости в пласт, позволяет построить достаточно простые аналитические выражения для нулевого и первого коэффициентов разложения. С использованием этих выражений можно вычислить осредненные значения температуры и детально исследовать соответствующее распределение температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воронич И. В., Гайдуков Л. А., Михайлов Н. Н.** Фильтрация флюида к горизонтальной скважине при изменении параметров зоны загрязнения // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 4. С. 127–135.
2. **Хужаеров Б. Х., Махмудов Ж. М., Зикиряев Ш. Х.** Перенос загрязняющих веществ в водоносных пластах с учетом двухместной адсорбции // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 127–139.
3. **Афанасьев А. А.** Математическая модель неизотермической многофазной фильтрации бинарной смеси // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 1. С. 104–115.
4. **Казакова Т. Г.** Моделирование вытеснения нефти в многопластовой неоднородной по проницаемости системе коллекторов в условиях неизотермической фильтрации // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефт. пром-сти. 2010. № 7. С. 38–41.
5. **Филиппов А. И., Михайлов П. Н., Филиппов К. А. и др.** Использование баротермического эффекта для нагрева нефтяного пласта // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47, № 5. С. 752–764.
6. **Филиппов А. И.** Термодинамика фильтрационных нефтегазовых потоков / А. И. Филиппов, С. А. Филиппов. Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 2002.

7. **Богомолов В. А., Булгакова О. Р., Тарасов В. А.** Осредненные модели двухфазной трехкомпонентной фильтрации при закачке в нефтяной пласт химических реагентов — полимеров, водных растворов ПАВ // Вестн. Казан. технол. ун-та. 2010. № 10. С. 336–341.
8. **Филиппов А. И.** Скважинная термометрия переходных процессов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989.
9. **Филиппов А. И., Михайлов П. Н., Ахметова О. В., Горюнова М. А.** Анализ температурного поля цилиндрического потока на основе “в среднем точного” решения // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 3. С. 84–93.
10. **Филиппов А. И., Михайлов П. Н., Иванов Д. В.** Температурное поле радиоактивных изотопов в пористой среде // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48, № 1. С. 96–104.

*Поступила в редакцию 27/VIII 2012 г.,
в окончательном варианте — 25/IV 2013 г.*
