

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТРУКТУРИРОВАННЫХ СРЕД И НЕКОТОРЫЕ СЦЕНАРИИ РАЗВИТИЯ КАТАСТРОФ

**Б.П. Сибиряков, М.Ю. Подбережный**

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия*

Работа посвящена построению сплошных образов пористых и трещиноватых сред, содержащих жидкости или газы. Обычная механика сплошной среды предполагает, что близость точек влечет за собой близость всех свойств среды. Пористые среды с чрезвычайно высокой контрастностью свойств матрицы и флюида гипотезе сплошности явно не удовлетворяют. Введенные в работе операторы сплошности ставят в соответствие реальному микронеоднородному телу некий сплошной образ последнего. Основные же законы сохранения применяются не к реальной среде, а к ее сплошному образу.

Уравнения движения для сплошного образа среды стандартны, а для реальной среды оказываются уравнениями бесконечного порядка. Они содержат как обычные скорости упругих волн, так и неограниченно малые скорости возмущений, что связано с огромным числом степеней свободы микронеоднородных сред, состоящих из отдельных элементарных блоков.

*Удельная поверхность, оператор сплошности, параметрические резонансы, катастрофы.*

### INSTABILITY OF POROUS AND CRACKED SOLIDS AND CATASTROPHE SCENARIOS

**B.P. Sibiryakov and M.Yu. Podberzhnyi**

The paper presents an approach implying constructing continuum images of liquid- or gas-saturated porous and cracked solids. The hypothesis of classical continuum mechanics that closely positioned points of a solid occur in similar physical conditions breaks down in the case of porous media, in which fluid and matrix material have strongly different properties. We suggest to represent a real microheterogeneous body by its continuum image using continuum operators, whereby the conservation laws are applied rather to the image than to its prototype.

The continuum image is described by the standard equation of motion and the respective real solid by infinite-order equations. The latter include velocities of elastic waves as well as infinitely low velocities of anomalies due to a great number of the degrees of freedom in microheterogeneous media consisting of separate elementary blocks.

*Specific surface, continuum operator, parametric resonance, catastrophe*

### ВВЕДЕНИЕ

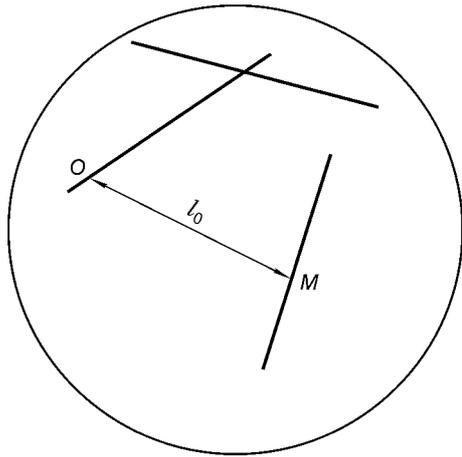
Наличие характерных линейных размеров микро- и мезоструктур остро ставит вопрос об элементарном представительном объеме структурированного тела. В самом деле, лишь некоторое множество элементарных блоков с линейными размерами, определяемыми удельной поверхностью, может представлять минимальный объем, к которому мы можем применять основные законы сохранения, в частности, закон сохранения импульса. Удельная поверхность и среднее расстояние между трещиной и ее ближайшей соседкой связаны известной формулой интегральной геометрии [1]:

$$\sigma_0 l_0 = 4(1 - f), \quad (1)$$

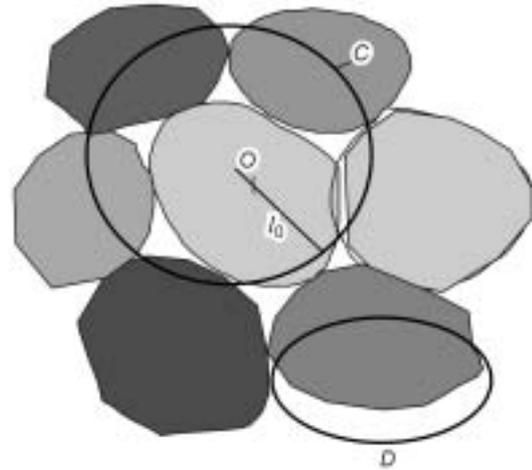
где  $\sigma_0$  — удельная поверхность,  $l_0$  — среднее расстояние между трещинами (порами),  $f$  — пористость среды. В качестве элементарного объема выберем объем  $V$ , заключающий в себе центр тяжести одной из блоковых структур, а также части соседних с ней блоков (рис. 1).

В классической механике сплошной среды существует молчаливое предположение о том, что близость точек влечет за собой близость всех физических свойств без исключения, например, напряжений, деформаций, температур и т. д. Это предположение может быть выражено операторным соотношением  $P = E$ , где  $P$  есть оператор распространения поля на весь элементарный объем, а  $E$  — единичный оператор. Это операторное равенство означает, что всякая физическая характеристика некоторого поля в какой-то точке есть среднее значение этого поля в малом объеме, окружающем эту точку.

Реальные горные породы, содержащие поры, трещины и полости, не обладают такими свойствами. Контакты между зернами скелета и поровым пространством — это области соприкосновения тел с очень большим перепадом физических свойств, особенно, если поры содержат жидкости или газы. Таким образом, близость точек для таких сред не влечет за собой близость физических свойств. Кроме того, мы не имеем возможности выбора для мысленного опыта любого из возможных объемов среды. Например,



**Рис. 1.** Элементарный объем трещиноватого тела со средней длиной от трещины до ее ближайшей соседки  $OM = l_0$ .



**Рис. 2.** Мезоструктура, ограниченная контуром  $C$  с центром в точке  $O$ .

Она определяет некоторую модель деформируемого сплошного тела, так как на этом контуре выполняется уравнение равновесия. Для объема внутри контура  $D$  уравнение равновесия не выполняется, так как на части контура напряжения отсутствуют. Разные оттенки — различные по составу зерна.

в реальном пористом образце возможно выбрать замкнутый объем, составленный из частей свободной поверхности, где нагрузки просто обращаются в нуль, и поэтому применение законов сохранения к таким объемам теряет смысл. С другой стороны, имеется также возможность выбрать объем, ограниченный частью поверхности, на которой сосредоточены некоторые нагрузки, и другой частью, где какие-либо нагрузки отсутствуют. Это означает, что в выделенном нами микрообъеме не выполняется уравнение равновесия в статике. Таким образом, мы должны признать, что для представительности любого объема структурированного тела необходимо, чтобы этот объем содержал некоторое минимальное количество мезоструктур. Однако линейные размеры мезоструктур определены конкретной удельной поверхностью пористого тела (с помощью формулы (1)), и для многих задач никак не могут считаться произвольно малыми. Другими словами, мы должны признать неэквивалентность разностных и дифференциальных операторов при описании микро-неоднородных сред. Это означает, что отсутствует возможность автоматической замены разностных отношений дифференциальными связями.

Как видно из рис. 2, не всякая мезоструктура деформируется по законам механики сплошной среды. Конечно, для контура, содержащего достаточное число частиц, уравнение равновесия выполняется всегда. Тем не менее наличие запрещенных достаточно малых объемов ставит вопрос о неэквивалентности разностных и дифференциальных операторов. Это обстоятельство возникает потому, что нет возможности применять законы сохранения к весьма малым объемам среды, и, что не менее важно, имеет место несовпадение точек приложения поверхностных сил, созданных внутренними напряжениями, которые сосредоточены на контуре, содержащем некоторое число частиц, и объемных сил инерции, приложенных к центру тяжести структуры. В операторе  $P$  величина  $l_0$  как раз и есть линейный минимальный размер мезоструктуры, для которого уравнение равновесия выполнимо.

### ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА СПЛОШНОСТИ

Представляется необходимым указать явную связь между разностными и дифференциальными операторами. Если бы удалось создать из реального поля сил, действующего в среде с мезоструктурой, некоторое подобие поля, действующего в сплошной среде, то такое сглаженное поле удовлетворяло бы всем аксиомам сплошного тела. Этого можно добиться, если некоторым непрерывным образом продолжать поле, заданное в центре тяжести некоторого объема (блока), на всю область, содержащую множество точек — центров тяжести в качестве опорных.

И здесь возникает серьезная разница в описании сил, созданных внутренними напряжениями, и сил инерции. Действительно, силы инерции отнесены к центру тяжести выделенной структуры, и поле сил инерции в среде может быть представлено интерполяцией полей перемещений между точками центров тяжести мезоструктур. Таким образом, интерполированное поле перемещений является непрерывным, и есть возможность использовать технику связи между разностными и дифференциальными операторами. Что касается сил, действующих на поверхности элементарного объема, то эти силы необходимо пред-

варительно усреднить, ибо не всегда можно определить вектор нагрузок на произвольно сложной поверхности. После усреднения закон сохранения импульса применяется к структурированной среде обычным образом. Разное положение точек центра элементарного объема и его поверхности вызывает асимметрию по отношению к оператору распространения поля на весь объем среды. Проблема состоит в том, что в теле со структурой никогда не могут совпадать точки приложения поверхностных сил и сил инерции. Модель сплошной среды устраняет эту трудность введением произвольно малого объема элемента среды, где поле поверхностных сил неограниченно приближается к центру тяжести микроструктуры. Это означает, что возникает необходимость перенести поле поверхностных сил в центр тяжести элементарного блока. Вместе с тем поле сил инерции по определению отнесено к центрам тяжести элементарных объемов. Оно непрерывно на любых границах и его усреднять не следует.

Таким образом, основная идея описания сред с микроструктурой состоит в том, чтобы с помощью операций типа продолжения поля предварительно сконструировать из реальной среды некий образ непрерывного континуума, а затем к нему, а не к реальной среде, применить основные законы сохранения. В классической механике важная операция создания сплошного образа среды считается уже каким-то образом выполненной самой природой. Поэтому там нет необходимости обсуждать вопрос об эквивалентности построенного континуума и реальной среды. Если же такая необходимость есть, то необходимо извлечь из этого обстоятельства возможные следствия.

Для того чтобы использовать закон сохранения энергии, следует учитывать, что в отношении кинетической энергии все выглядит обычным образом. Потенциальная же энергия содержит квадрат колеблющейся величины (произведение напряжения на деформацию), т. е. она содержит потенциальную энергию как среднего поля, так и энергию флуктуаций. Это обстоятельство означает, что закон сохранения энергии в таких средах достаточно не прост в том смысле, что энергия среднего поля может возрасти за счет снижения энергии флуктуаций, и это не должно вызывать неприятия появления растущих по средней энергии решений.

Следуя В.П. Маслову [2], мы можем представить оператор переноса поля  $u(x)$  из точки  $x$  в точку  $x+h$  в виде

$$u(x \pm h) = u(x) \exp(\pm h D_x), \quad (2)$$

где  $D_x = \partial/\partial x$  есть дифференциальный оператор. Разностный оператор первого порядка может быть представлен как разность двух операторов переноса, т. е.

$$\Delta_1 = \frac{u(x+h/2) - u(x-h/2)}{h} = u(x) \frac{1}{h} \left[ \exp(h/2 D_x) - \exp(-h/2 D_x) \right] = u(x) \frac{\text{sh}(h/2 D_x)}{h/2}, \quad (3)$$

причем знак  $\text{sh}$  означает гиперболический синус. Что касается разностного оператора второго порядка, то он может быть выражен формально как квадрат выражения (3), именно:

$$\Delta_2 = u(x) \frac{1}{(h/2)^2} \text{sh}^2(h/2 D_x). \quad (4)$$

Формальное разложение выражения (3) в ряд Тэйлора дает в первом члене обычную первую производную. Остальные члены содержат высшие производные, в чем и выражается неэквивалентность разностных и дифференциальных операторов. В формуле (4) первый член разложения представляет собой обычную вторую производную. Оператор осреднения в простейшей форме может быть записан как среднее арифметическое по всем трем координатам, если пространство трехмерное, а точка  $x$  находится в начале координат (рис. 3):

$$P[u(x)] = \frac{1}{6} u(x) \left[ \exp(h/2 D_x) + \exp(-h/2 D_x) + \exp(h/2 D_y) + \exp(-h/2 D_y) + \exp(h/2 D_z) + \exp(-h/2 D_z) \right]. \quad (5)$$

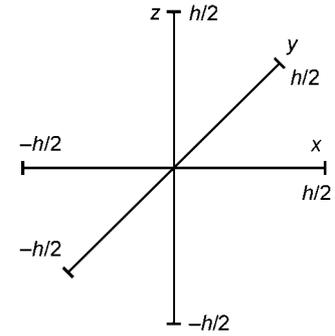
Более строгое представление оператора осреднения дается интегралом [3]:

$$P[u(x)] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \exp[h(\sin\theta \cos\varphi D_x + \sin\theta \sin\varphi D_y + \cos\theta D_z)] \sin\theta d\theta = \frac{\text{sh}(h\sqrt{\Delta})}{h\sqrt{\Delta}} = E + \frac{h^2 \Delta}{3!} + \frac{h^4 \Delta^2}{5!} + \dots \quad (6)$$

В формуле (6)  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\theta$  и  $\varphi$  — сферические углы. Для микронеоднородных сред, содержащих большие перепады физико-механических свойств между матрицей и флюидом, мы не имеем

**Рис. 3. Схема действия оператора сплошности на элементарном блоке.**

Ближайшие соседи расположены на расстояниях  $h = l_0$  по всем трем координатам.



операторного равенства  $P = E$ . Другими словами, формула (6) выражает неэквивалентность разностных и дифференциальных операторов в явном виде. Убедиться в справедливости формулы (6) можно, если воспользоваться известным представлением Пуассона для двойного интеграла, однако с использованием символических переменных  $D_x, D_y, D_z$ . Имеет место формула [4]

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \cos \varphi + \gamma \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} f(R \cos p) \sin p \, dp =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 f(Rt) \, dt, \quad R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad (7)$$

где  $f$  — произвольная функция, величина  $R$  дается выражением

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} = \sqrt{\Delta},$$

оператор продолжения поля, который, для краткости, будем называть оператором сплошности, принимает вид [6]

$$P(D_x, D_y, D_z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp(l_0 \sqrt{\Delta} t) \, dt = \int_0^1 \operatorname{ch}(l_0 \sqrt{\Delta} t) \, dt = \frac{\operatorname{sh}(l_0 \sqrt{\Delta})}{l_0 \sqrt{\Delta}}. \quad (8)$$

При  $h \rightarrow 0$  оператор сплошности  $P \rightarrow E$ , что означает классическую модель сплошной среды, где размеры структур исчезающе малы.

В дальнейшем предполагается, что среднее расстояние между порами или между трещинами  $l_0$  равно расстоянию  $h$  в предыдущих выражениях для разностных операторов.

### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения движения есть результат применения закона сохранения импульса к произвольно малому объему среды. В модели сплошной среды это связано с равенством интеграла поверхностных сил  $P_i = \sigma_{ik} n_k$  и сил инерции. При этом поверхность предполагается как угодно гладкой. В микронеоднородной среде положение иное. Напряжения меняются очень быстро внутри объема, а поверхность может пересекаться трещинами и порами, так что трудно определить нормаль к ней и, соответственно, поверхностные силы. Это обстоятельство наводит на мысль об использовании закона сохранения импульса не для истинных, весьма сложных напряжений, а для напряжений, предварительно подвергнутых действию оператора сплошности, т. е. для сплошного образа реальной среды. Это предположение может быть выражено уравнением

$$\frac{\partial P \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \ddot{u}_i. \quad (9)$$

Иначе, в развернутом виде, уравнение движения может быть переписано в форме

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\operatorname{sh}(l_0 \sqrt{\Delta})}{l_0 \sqrt{\Delta}} \sigma_{ik} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( E + \frac{l_0^2 \Delta}{3!} + \frac{l_0^4 \Delta \Delta}{5!} + \dots \right) \sigma_{ik} \right] = \rho \ddot{u}_i. \quad (10)$$

Наличие любых степеней оператора Лапласа означает, что порядок уравнения движения неограничен.

На первый взгляд кажется, что в длинноволновом приближении высшие производные дают малый вклад в волновые процессы, оператор сплошности практически равен единичному оператору, и обычное описание волновых явлений не нуждается в модернизации. Однако следует обратить внимание на то, что даже в статике, при средних постоянных напряжениях, решения уравнений равновесия, соответствующих уравнениям (10), содержат колеблющиеся по координатам члены, что вполне разумно, так как на трещинах нагрузки равны либо нулю, либо гораздо меньше средних.

Очевидно, что в случае  $l_0 \rightarrow 0$  уравнение (9) принимает обычный вид. В правой части оператор сплошности приводит поле сил, заданных на сфере конечного диаметра, к полю напряжений в центре тяжести частиц, в то время как силы инерции приложены по определению в центре тяжести этих частиц, так что для сил инерции нет необходимости применять оператор сплошности.

### ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

В соответствии с законом Гука и используя преобразование Фурье по трем координатам, мы можем перейти в пространство изображений, согласно формуле:

$$u_i(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\infty} \exp [i(n_x x + n_y y + n_z z)] U_i(n_x, n_y, n_z) dn, \quad (11)$$

где  $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ , а  $dn = dn_1 dn_2 dn_3$ . Действие оператора  $P$  приводит к равенству

$$Pu_i(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\infty} \frac{\text{sh}(nl_0)}{nl_0} \exp [i(n_x x + n_y y + n_z z)] U_i(n_x, n_y, n_z) dn. \quad (12)$$

Это дает возможность вычислить преобразование Фурье для фундаментального решения системы уравнений (9), именно:

$$G_{ij} = \frac{1}{\mu n^2 - \rho \omega^2 \frac{l_0 n}{\sin(l_0 n)}} \left[ \delta_{ij} - \frac{(\lambda + \mu) n_i n_j}{(\lambda + 2\mu) n^2 - \rho \omega^2 \frac{l_0 n}{\sin(l_0 n)}} \right] \frac{l_0 n}{\sin(l_0 n)}. \quad (13)$$

В случае весьма малых значений произведения  $l_0 n$  отношение синуса и аргумента близко к единице, и преобразование Фурье становится обычным выражением для тензора Грина в упругой сплошной среде. Переход к обратному преобразованию Фурье связан с интегрированием выражения (13). Оно содержит простые полюсы, соответствующие продольным и поперечным волнам, а также множество простых полюсов, где обращается в нуль синус в знаменателе выражения (13). Вычеты находятся в простых полюсах  $n^2 = k_s^2 \frac{l_0 n}{\sin(l_0 n)}$ . Здесь  $k_s$  есть волновое число как продольных, так и поперечных волн. Для очень

малых размеров  $l_0$  равенство  $n^2 = k_s^2 \frac{l_0 n}{\sin(l_0 n)}$  обращается в классическое выражение, определяющее полюсы,

соответствующие скоростям продольных и поперечных волн. Полагая  $\frac{n}{k_s} = m$ ,  $k_s l_0 = \varepsilon$ , мы можем получить уравнение для определения комплексных, вообще говоря, корней, которые описывают волны от сосредоточенного источника в средах со структурой, в форме

$$m \sin(\varepsilon m) = \varepsilon. \quad (14)$$

Если считать  $m = x + iy$  комплексным числом, то для вещественной и мнимой частей возникают трансцендентные уравнения.

$$x \sin \varepsilon x \operatorname{ch} \varepsilon y - y \operatorname{sh} \varepsilon y \cos \varepsilon x = \varepsilon, \quad (15)$$

$$y \sin \varepsilon x \operatorname{ch} \varepsilon y + x \operatorname{sh} \varepsilon y \cos \varepsilon x = 0.$$

Уравнения (15) можно переписать в несколько иной форме, полагая в качестве новых переменных  $x^* = \varepsilon x$ ,  $y^* = \varepsilon y$ , а в дальнейшем верхний индекс можно опустить

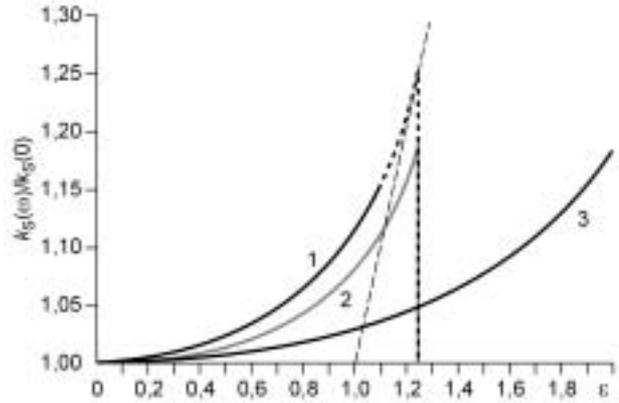
$$\frac{x}{y} = -\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{th} y},$$

$$\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \frac{\varepsilon^4}{x^2 + y^2}. \quad (16)$$

Очевидно, что уравнения (16) имеют множество вещественных корней, соответствующих значению  $y = 0$ . Действительно, при малых значениях  $\varepsilon$  уравнение (14) дает решение  $m = 1$ , что соответствует обычной скорости продольной или поперечной волны (рис. 4). При больших значениях  $m$  уравнение (14) удовлетворяется лишь в случае близости величины  $\varepsilon m$  к числу, кратному  $\pi$ , т. е. при достаточной близости к нулю синуса, определяющего характеристическую скорость возмущения. Неограниченность волнового числа означает существование как угодно малых скоростей продольных и поперечных возмущений, наряду с обычными продольными и поперечными волнами. Существование как угодно малых скоростей

**Рис. 4. По оси абсцисс отложено безразмерное отношение  $\varepsilon = 2\pi l_0 / \lambda_s$ .**

Кривые: 1 — для отношения волновых чисел  $k_s(\omega)/k_s(0)$ , т. е. при убывании скорости поперечных волн с ростом частоты, 2 — для отношения  $\gamma = V_s/V_p$ , характеризующего его увеличение с частотой, 3 — для  $k_s(\omega)/k_s(0)$  продольных волн.



в микронеоднородной среде имеет свое физическое объяснение. Здесь энергия запасается не только в деформациях (первых производных перемещений), но также в кривизнах и более высоких производных. Это значит, что появляются скорости, соответствующие изгибным волнам, волнам поворота, а также множеству волн, связанных с колебаниями групп частиц (блоков).

Вместе с тем система уравнений (15) или (16) имеет также и комплексные корни. Из первого уравнения системы (16) видно, что комплексные корни возникают лишь при некоторых значениях параметра  $\varepsilon$ . Эти значения, вообще говоря, немалые, именно это имеет место при таких значениях  $\varepsilon$ , которые удовлетворяют соотношению  $\varepsilon x > \pi/2$ . В таблице приведены значения комплексных корней, соответствующих некоторым, сравнительно небольшим, значениям  $\varepsilon$ . Заметим, что параметр  $\varepsilon$  может быть выражен через отношение линейного размера структуры  $l_0$  к длине распространяющейся волны  $\lambda_s$ .

Комплексные корни могут означать как затухание, так и неограниченный рост амплитуды колебаний, если, разумеется, есть неограниченный по энергии источник периодических колебаний. Из таблицы видно, что минимальное затухание (или рост) соответствует  $1/2,0288$  скорости распространения волны, примерно в 2 раза меньшей, чем обычная скорость волн. По-видимому, в структурированных средах одни и те же процессы могут вызывать как возбуждение, так и затухание среды в зависимости от фазы стационарных колебаний.

**Зависимость скорости упругих волн от соотношения длины волны и периода мезоструктуры  $\varepsilon$**

$\varepsilon = l_0/\lambda_s$	$x$	$y$
0,2147	2,0288	0,0548
0,2507	2,0645	0,5838
0,2771	2,1064	0,8880
0,3253	2,1560	1,1838
0,3918	2,2157	1,5122

**ОДНОМЕРНАЯ СИТУАЦИЯ. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ**

В одномерном случае уравнение движения упрощается и принимает форму

$$P(u_{xx}) = \left( E + \frac{l_0^2}{3!} \Delta + \frac{l_0^4}{5!} \Delta\Delta + \dots \right) u_{xx} = \frac{1}{c_0^2} u_{tt}, \tag{17}$$

где  $c_0$  — обычная скорость продольных или поперечных волн. Решение уравнения (17) будем искать в виде  $u(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right)$ , причем  $c \neq c_0$ . Подставляя выбранную форму решения в уравнение (17), получим обыкновенное дифференциальное уравнение бесконечного порядка в форме

$$\left( 1 - \frac{c^2}{c_0^2} \right) F'' + \frac{l_0^2}{c^2 3!} F^{(4)} + \left( \frac{l_0}{c} \right)^4 \frac{1}{5!} F^{(6)} + \dots = 0. \tag{18}$$

В качестве функции  $F$  удобно выбрать экспоненту с чисто мнимым множителем  $F = e^{i\omega t}$ . В этом случае возникает дисперсионное уравнение для неизвестной скорости  $c$ , в зависимости от частоты  $\omega$ , т. е.

$$\frac{\sin \frac{l_0 \omega}{c}}{\frac{l_0 \omega}{c}} = \frac{c^2}{c_0^2}. \tag{19}$$

Поле перемещений может быть представлено в форме плоской волны, скорость которой уменьшается с ростом частоты

$$u(x, t) = A \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x}{c_0 \zeta} \right) \right], \quad (20)$$

причем  $\zeta \left( \frac{l_0 \omega}{c_0} \right) = \frac{c}{c_0}$ . Очевидно, вещественные значения скорости распространения волн возможны лишь в случае положительных значений синуса в левой части уравнения (19).

Дисперсионное уравнение (19) означает, что скорости плоских продольных и поперечных волн  $c$  зависят от частоты, вернее, от безразмерного отношения длины волны к периоду мезоструктуры. При этом асимптотически большие длины волн в сравнении с линейными размерами структур соответствуют скоростям  $P$  и  $S$  волн. Решение таково, что при сравнительно малых значениях величины  $l_0$  в сравнении с длиной волны скорости волн плавно убывают с ростом частоты, так что со временем первые вступления волн становятся все более и более плавными. На рис. 4 представлено отношение волновых чисел  $k_s(\omega)/k_s(0) = c/c_0$  в зависимости от безразмерного отношения  $\varepsilon = 2\pi l_0/\lambda$ . Так как величина  $c_0$  для поперечных волн меньше, чем для продольных, то решение (19) приводит к возрастанию отношения  $\gamma = v_s/v_p$ . Это явление обычно объясняют поглощением более высоких частот. В данной работе представлено альтернативное объяснение этому хорошо известному явлению. Видно, что упомянутое отношение растет с ростом частоты, что может привести к кажущемуся выводу о наличии отрицательного коэффициента Пуассона в микронеоднородных средах, если этот коэффициент определяется по отношению скоростей поперечных и продольных волн. При длинах волн порядка размеров структуры  $l_0$  и меньше дисперсионные явления столь значительны, что во многих случаях кинематика продольных и поперечных волн становится весьма сложной, так что распознать в опыте продольные и поперечные волны лишь по их скоростям не всегда возможно. В частности, существуют области резкого (в несколько раз) снижения скоростей поперечных волн в сравнении с продольными. Асимптотически высокие частоты также дают повышенное значение отношения  $\gamma$  по сравнению с низкими частотами, т. е. такими, что длина волны во много раз превышает линейные размеры структуры, определяемые удельной поверхностью порового пространства.

Комплексные корни дисперсионного уравнения (19) возникают лишь при достаточно коротких волнах, таких, что отношение линейного размера структуры к длине волны достигает примерно одной пятой и более. Эти корни означают, что при определенных условиях даже произвольно малые амплитуды при периодическом возмущении приводят к непериодическим, экспоненциально растущим либо столь же резко затухающим процессам. Обычно полагают, что возбуждение среды обязано одним процессам, а восстановление первоначального состояния совершенно иным. Вполне возможно, что оба эти процесса одной и той же природы. В физике хорошо известно явление параметрического резонанса при колебаниях маятника с движущейся точкой подвеса. Это явление описывается уравнением Матье [5], которое, как известно, может представлять, с одной стороны, более или менее сложные колебательные процессы, а с другой — параметрические резонансы [6, 7].

#### СВЯЗЬ С УРАВНЕНИЕМ МАТЬЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ РЕЗОНАНСАМИ

Можно показать, что решения уравнения Матье содержатся во множестве решений дисперсионных уравнений (15). Для этого достаточно разложить решения вида  $u(x) = \sum_0^{\infty} C_n e^{ik_n x}$ , которые содержат бесконечную последовательность корней дисперсионного уравнения, в обычный ряд Фурье по кратным частотам с периодом  $\pi$  или  $2\pi$ .

Разложение по кратным частотам имеет вид  $u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_n \frac{(-1)^m \sin \pi k_n}{m + k_n} e^{imx}$ . Здесь величина  $m$

пробегает только кратные числу  $\pi$  значения. Двойная сумма содержит счетное множество произвольных постоянных  $C_n$ . Теперь достаточно положить  $m = n$ , т. е. заменить двойное суммирование однократным,

чтобы получить ряд вида  $u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{(-1)^n \sin \pi k_n}{n + k_n} e^{inx}$ . Если теперь считать  $A_n = C_n \frac{(-1)^n \sin \pi k_n}{n + k_n}$  и подчинить

новые постоянные условиям типа  $aA_0 - qA_1 = 0$ ;  $(a - 4)A_2 - q(2A_0 + A_4) = 0$ ;  $(a^2 - m^2)A_m - q(A_{m-2} + A_{m+2}) = 0$ , то вышеприведенный ряд Фурье в точности удовлетворяет уравнению Матье вида

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (a - 2q \cos 2x)u = 0. \quad (21)$$

### ОПЕРАТОРЫ СПЛОШНОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ СТРУКТУР

Оператор сплошности для периодических структур, который определен в виде

$$P(D_x, D_y, D_z; l_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[l_0(D_x n_x + D_y n_y + D_z n_z)] \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad (22)$$

был представлен формулами (6), (8). Оператор, определенный формулой (22), действуя на какое-либо напряжение  $\sigma_{ik}$ , переводит его в  $\sigma_{ik} = P(\sigma_{ik})$ , т. е. реальное напряжение  $\sigma_{ik}$  в его сплошной образ, отмеченный чертой сверху. Основные законы природы применяются, естественно, к сплошному образу реальных напряжений.

Перейдем к случайным структурам, полагая, что  $l(x, y, z) = l_0 + \xi$ , где  $\xi$  — случайная величина с распределением Гаусса и нулевым математическим ожиданием. Тем самым оператор (22) приобретает вид

$$P(D_x, D_y, D_z; l_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[l_0(D_i n_i) + \xi(D_i n_i)] \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (23)$$

Используя результат В.И. Кляцкина [7]

$$\langle \exp(\omega \xi) \rangle = \exp\left(\frac{1}{2} \sigma^2 \omega^2\right), \quad (24)$$

получаем другую форму оператора сплошности, содержащую дисперсию случайной величины  $l(x, y, z)$ , т. е.

$$P(D_x, D_y, D_z; l_0, \sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[l_0(D_i n_i) + \frac{l_0^2 \sigma^2}{2} (D_i n_i)^2\right] \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (25)$$

В выражениях (24), (25)  $\sigma^2$  означает квадрат дисперсии, а роль величины  $\omega$  играет символическая сумма  $D_i n_i$ . Существует известный результат Пуассона относительно двойных интегралов по угловым переменным в сферических координатах, который позволяет упростить выражение (25). Имеет место формула (7), которая позволяет упростить символический интеграл (25), именно

$$\begin{aligned} P(D_x, D_y, D_z; \sigma) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp\left(l_0 \sqrt{\Delta} \, t + \frac{l_0^2 \sigma^2}{2} \Delta t^2\right) dt = \\ &= \int_0^1 \operatorname{ch}(l_0 \sqrt{\Delta} \, t) \exp\left(\frac{l_0^2 \sigma^2}{2} \Delta t^2\right) dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, оператор сплошности и в случае случайных структур выражается через бесконечную цепочку операторов Лапласа. При нулевой дисперсии вид оператора сплошности совпадает с ранее выведенным оператором

$$P(D_x, D_y, D_z; l_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp(l_0 \sqrt{\Delta} \, t) dt = \frac{\operatorname{sh}(l_0 \sqrt{\Delta})}{l_0 \sqrt{\Delta}} = E + \frac{l_0^2 \Delta}{3!} + \frac{l_0^4 \Delta^2}{5!} + \dots, \quad (27)$$

$$\int_0^1 \operatorname{ch}(l_0 \sqrt{\Delta} \, t) \exp\left(\frac{l_0^2 \sigma^2}{2} \Delta t^2\right) dt = \int_0^1 \operatorname{ch}(xt) \left[1 + \frac{\sigma^2 x^2 t^2}{2} \frac{1}{1!} + \left(\frac{\sigma^2 x^2 t^2}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} + \dots\right] dt. \quad (28)$$

$$\frac{1}{kl_0} \int_0^{kl_0} \cos(x) \exp[-x^2 \sigma^2 / 2] dx = \frac{k^2}{k^2}. \quad (29)$$

Уравнение (29) и есть дисперсионное уравнение относительно величины  $k$ .

Формулу (28) можно переписать в несколько ином виде

$$\int_0^1 \operatorname{ch}(l_0 \sqrt{\Delta}) \exp\left(\frac{l_0^2 \sigma^2}{2} \Delta t^2\right) dt = \int_0^1 \operatorname{ch}(xt) dt + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{1}{1!} \int_0^1 t^2 \operatorname{ch}(xt) dt + \left(\frac{\sigma^2 x^2}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} \int_0^1 t^4 \operatorname{ch}(xt) dt + \dots +, \quad (30)$$

где буквой  $x$  обозначено символическое выражение  $x = l_0 \sqrt{\Delta}$ . Естественно, что при  $\sigma = 0$  оператор для случайной структуры  $P_\sigma$  совпадает с оператором  $P_0$  для периодической структуры. Далее, замечая, что интегралы, содержащие гиперболический косинус, выражаются через производные оператора  $P_0$  по переменной  $x$ , т. е.

$$\int_0^1 t^{2n} \operatorname{ch}(xt) dt = \frac{\partial^{2n} P_0}{\partial x^{2n}}, \quad (31)$$

получаем разложение оператора  $P_\sigma$  в виде двойного ряда:

$$P_\sigma = P_0 + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_0^{2n} \Delta^n}{(2n-2)!(2n+1)} + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{l_0^{2n} \Delta^n}{(2n-4)!(2n+1)} + \dots +. \quad (32)$$

Можно представить разложение (13) в несколько более компактной форме

$$P_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_0^{2n} \Delta^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^k \frac{2n!}{(2n-2k)!}. \quad (33)$$

Меняя переменную под знаком суммы, согласно выражению  $2n - 2k = 2p$ , получаем окончательный вид оператора в форме двойной суммы, т. е.

$$P_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_0^{2n} \Delta^n 2n!}{(2n+1)!} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{2n} \sum_{p=0}^n \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{-p} \frac{1}{2p!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_0^{2n} \Delta^n}{2n+1} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{2n} \sum_{p=0}^n \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{-p} \frac{1}{2p!}. \quad (34)$$

Было бы интересно рассмотреть случай большой дисперсии, что соответствует первому члену внутреннего ряда со значком  $p = 0$ . Если искать решение уравнения движения в форме колебательного процесса  $u = \exp[ikx]$ , так что  $\Delta^n = (-1)^n k^{2n}$ , то дисперсионное уравнение при больших значениях величины  $\sigma$  принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kl_0 \sigma / \sqrt{2})^{2n}}{(2n+1) (kl_0 \sigma / \sqrt{2})^2} = \frac{\operatorname{arctg} (kl_0 \sigma / \sqrt{2})^2}{(kl_0 \sigma / \sqrt{2})^2} = \frac{k_s^2}{k^2}. \quad (35)$$

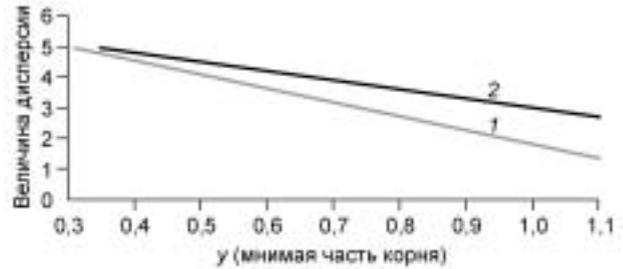
Таким образом, возникает простое дисперсионное уравнение для определения  $k$ , т. е.

$$\operatorname{arctg} [(kl_0 \sigma / \sqrt{2})^2] = (k_s l_0 \sigma / \sqrt{2})^2. \quad (36)$$

В случае исключительно малых аргументов, т. е. очень малых значений  $l_0$ , несмотря на большие значения дисперсии  $\sigma$ , волновое число  $k \rightarrow k_s$ , так что скорость волн в этом случае совпадает с обычной скоростью сейсмических волн. Комплексных корней дисперсионного уравнения не возникает в случае  $k_s l_0 \sigma < \sqrt{\pi}$ . В противоположном случае  $k_s l_0 \sigma > \sqrt{\pi}$  возникают комплексные корни в уравнении (36), которые могут трактоваться как параметрические резонансы. Таким образом, отсутствие дисперсии порождает параметрические резонансы в диапазоне волновых чисел, отмеченном в предыдущих работах [3]. Слабая и умеренная дисперсия стабилизирует среду, и параметрические резонансы исчезают. Очень большие значения дисперсии снова порождают параметрические резонансы и катастрофические ситуации (рис. 5), где показано убывание мнимой части первого и третьего корней дисперсионного уравнения с ростом дисперсии. Видно, в области слабых и умеренных дисперсий мнимая часть корня убывает почти

**Рис. 5. Зависимость мнимой части (показателя неустойчивости состояния среды) от дисперсии среднего линейного размера микроструктуры.**

С увеличением дисперсии мнимая часть комплексных корней дисперсионного уравнения убывает почти линейно. 1 — первый корень, 2 — третий корень.



линейно. Это обстоятельство стабилизирует микронеоднородную среду, препятствуя появлению параметрических резонансов.

**ОДИН ИЗ СЦЕНАРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ**

Дисперсионное уравнение для стационарных колебаний структурированной среды в одномерном случае можно записать в виде

$$\frac{\sin kl_0}{kl_0} = \frac{k_s^2}{k^2} \tag{37}$$

Разделяя в уравнении (37) вещественную и мнимую части, будем иметь

$$\begin{aligned} x \sin x \operatorname{ch} y - y \cos x \operatorname{sh} y &= x_0^2, \\ y \sin x \operatorname{ch} y + x \cos x \operatorname{sh} y &= 0, \quad x = \operatorname{Re} kl_0, \quad y = \operatorname{Im} kl_0, \quad x_0 = k_s l_0. \end{aligned} \tag{38}$$

Отсюда следуют соотношения

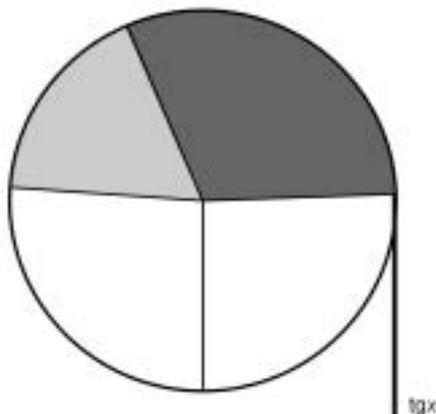
$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{th} y} = -\frac{x}{y}, \quad (x^2 + y^2) (\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y) = x_0^4. \tag{39}$$

Значения  $y = 0$  соответствуют вещественным корням дисперсионного уравнения и не вызывают неограниченно растущих колебаний (параметрических резонансов). В отношении возникновения катастроф особое значение имеют комплексные корни уравнений (38). Они, очевидно, могут возникнуть лишь тогда, когда тангенс вещественной величины  $x$  становится отрицательным, т. е. при  $x > \pi/2$ . Эта ситуация изображена на рис. 6. В секторе, где  $\operatorname{tg} x > 0$ , мнимая часть волнового числа отсутствует, и параметрические резонансы невозможны (темная заливка). Напротив, в секторе, где  $\operatorname{tg} x < 0$ , возможны (светлая заливка) параметрические резонансы и катастрофические явления.

Отрицательные значения тангенса означают, что  $kl_0 \geq \pi/2$ , т. е. среднее расстояние между соседними трещинами более четверти длины волны.

**НЕЛИНЕЙНЫЙ УЧАСТОК ДИАГРАММЫ НАПРЯЖЕНИЕ—ДЕФОРМАЦИЯ**

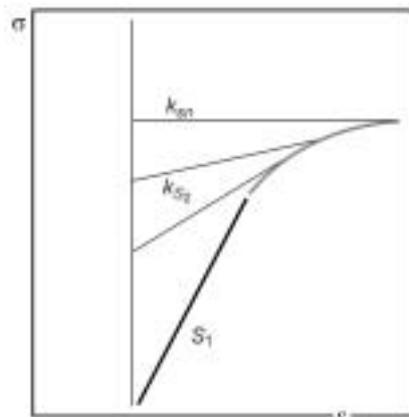
Дисперсионные уравнения  $\frac{\sin kl_0}{kl_0} = \frac{k_{sn}^2}{k^2}$ , соответствующие каждому из прямолинейных участков  $N$  диаграммы напряжение—деформация, имеют различные волновые числа  $k_{sn}$  (рис. 7). При этом  $k_{sn} \rightarrow \infty$ ,



если  $v_s^2 = \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \rightarrow 0$ . Следует сказать, что  $v_s$  может означать как скорость продольной, так и поперечной волны. Тем самым резко возрастает мнимая часть корней дисперсионного уравнения и все более низкие частоты включаются в процесс разрушения. На рис. 7 видно, что скорости нелинейных волн (наклон касательной к диаграмме напряжение—деформация) падают с ростом амплитуды, т. е. кривизна нелинейного участка диаграммы положительна. Это обстоятельство типично для горных пород и для многих металлов.

**Рис. 6. Существование параметрических резонансов.**

Пояснения см. в тексте.



**Рис. 7. Диаграмма напряжение—деформация для горной породы.**

Скорость звука падает с увеличением давления. Прямолинейный участок диаграммы соответствует упругому нагружению.

Отрицательная кривизна диаграммы, характерная для воды и некоторых металлов, наоборот, снижает вероятность появления параметрических резонансов и, следовательно, катастрофических сценариев.

#### ВЫВОДЫ

1. Учет удельной поверхности пористых либо трещиноватых сред приводит к неэквивалентности разностных и дифференциальных операторов. Тем самым представительный минимальный объем тела, к которому следует применять основные законы сохранения, должен содержать некоторое количество элементарных структур, так что разностные отношения не переходят в дифференциальные автоматически. Поэтому дифференциальные уравнения движения являются уравнениями бесконечного порядка. Лишь в случае бесконечно малых размеров структуры они переходят в обычные уравнения движения сплошных сред.

2. Структурированные среды обладают тем свойством, что в них, наряду с обычными продольными и поперечными волнами, распространяются также волны с очень низкими скоростями, вплоть до неограниченно малых скоростей. С ростом частоты отношение скоростей поперечных и продольных волн растет, что может вызвать кажущийся эффект отрицательного коэффициента Пуассона при петрофизических измерениях с помощью ультразвуковых волн.

3. Упомянутые среды под действием периодических колебаний даже малой амплитуды могут подвергаться параметрическим резонансам, при которых амплитуда колебаний неограниченно растет, либо быстро затухает в зависимости от того, подвергается ли данная трещина дальнейшему растяжению или сжатию.

4. Один из возможных сценариев возникновения катастроф связан с тем обстоятельством, что почти у всех горных пород диаграмма напряжение—деформация имеет положительную кривизну, т. е. скорость нелинейных волн падает с ростом нагрузки. Первыми начинают выходить в область параметрических резонансов сравнительно высокие частоты, если они содержатся в спектре внешних нагрузок. Параметрические резонансы вызывают увеличение амплитуды колебаний, что вызывает снижение скорости волн, т. е. увеличение волновых чисел, и в область параметрических резонансов входят все более низкие частоты, вплоть до частот, отвечающих глобальным колебаниям Земли. Малый или средний хаос (дисперсия основных геометрических характеристик мезоструктур) стабилизирует колебательные процессы (уменьшает мнимую часть корней дисперсионного уравнения). Очень большие дисперсии, наоборот, дестабилизируют среды с мезоструктурой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Усманов Ф.А.** Основы математического анализа геологических структур. Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1977, 202 с.
2. **Маслов В.П.** Теория операторов. М., Наука, 1973, 544 с.
3. **Sibiriakov В.Р.** Implication of wave velocities for porous medium mesostructure // Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2000, v. 34, p. 109—115.
4. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1964, 1100 с.
5. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.** Курс современного анализа. М., Физматгиз, 1963, 516 с.
6. **Сибиряков В.П.** Геометрия трещиноватых сред и параметрические резонансы // Геология и геофизика, 2002, т. 43, с. 882—887.
7. **Кляцкин В.И.** Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М., Наука, 1980, 336 с.

*Поступила в редакцию  
4 октября 2005 г.*