УДК 519.61

Условия нормальности полулинейных матричных операторов типа Стейна

Х.Д. Икрамов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Икрамов Х.Д. Условия нормальности полулинейных матричных операторов типа Стейна // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 4. — С. 369–375.

Установлены условия нормальности для операторов, ассоциированных с полулинейными аналогами матричного уравнения Стейна, а именно с уравнениями $X - A\overline{X}B = C$ и $X - AX^*B = C$.

DOI: 10.15372/SJNM20150403

Ключевые слова: *матричное уравнение Стейна, полулинейный оператор, сопряженный оператор, самосопряженность, нормальность, одновременное сингулярное разложение, сопряженно-нормальная матрица.*

Ikramov Kh.D. Normality conditions for semilinear matrix operators of the Stein type // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 4. — P. 369–375.

Normality conditions are found for the operators associated with the semilinear analogs of the Stein matrix equation, namely, with the equations $X - A\overline{X}B = C$ and $X - AX^*B = C$.

Keywords: *Stein matrix equation, semilinear operator, adjoint operator, self-adjointness, normality, simultaneous singular value decomposition, conjugate-normal matrix.*

1. Введение

Дискретным уравнением Сильвестра, или уравнением Стейна, называется матричное уравнение

$$X - AXB = C.$$

По этой причине мы называем уравнения:

$$X - A\overline{X}B = C \tag{1}$$

и

$$X - AX^*B = C \tag{2}$$

уравнениями типа Стейна. Черта над символом матрицы означает взятие поэлементного комплексного сопряжения. В уравнении (1) A и B — квадратные матрицы, вообще говоря, различных порядков m и n, а X и C — матрицы размера $m \times n$. В уравнении (2) все четыре матрицы могут быть прямоугольными одного и того же размера $m \times n$.

Обозначим через $M_{m,n}(\mathbf{C})$ линейное пространство комплексных $(m \times n)$-матриц. Сопоставим уравнениям (1) и (2) операторы:

$$\hat{F}(A,B) : X \to X - A\overline{X}B \tag{3}$$

и

$$\hat{G}(A,B) : X \to X - AX^*B, \tag{4}$$

действующие в $M_{m,n}(\mathbf{C})$. Пространство $M_{m,n}(\mathbf{C})$ можно рассматривать как унитарное, полагая

$$(P,Q) = \mathrm{tr}(Q^*P) \quad \forall P,Q \in M_{m,n}(\mathbf{C}). \tag{5}$$

В контексте спектральных методов для решения уравнений типа Стейна нормальность уравнения означает наименьшую чувствительность к ошибкам округления. Поэтому вопрос об условиях нормальности уравнений (1) и (2) приобретает важное значение. Решение этого вопроса затруднено тем обстоятельством, что операторы (3) и (4) не являются линейными: они включают в себя операторы:

$$F(A,B) : X \to A\overline{X}B \tag{6}$$

и

$$G(A,B) : X \to AX^*B, \tag{7}$$

которые лишь полулинейны, а потому классические определения сопряженного и нормального операторов к ним не применимы. Мы обходим указанную трудность, интерпретируя $F(A,B)$ и $G(A,B)$ как *линейные* операторы, действующие в *вещественном* линейном пространстве матриц размера $2m \times n$. Это позволяет нам получить для F и G искомые условия нормальности (см. пункты 3 и 4). Поскольку операторы (3) и (4) получаются из F и G лишь изменением знака и сдвигом на тождественный оператор, те же условия нормальности применимы и к ним. В п. 2 собраны вспомогательные результаты.

Отметим, что менее общий вопрос об условиях самосопряженности операторов (3) и (4) был рассмотрен автором в [1]. Полученные там условия формулируются следующими предложениями:

Теорема 1. *Пусть A и B — ненулевые матрицы. Оператор* (3) *тогда и только тогда является самосопряженным, когда A и B одновременно симметричны либо кососимметричны.*

Теорема 2. *Пусть A и B — ненулевые матрицы. Оператор* (4) *тогда и только тогда является самосопряженным, когда*

$$B = r\overline{A}$$

для некоторого числа $r \in \mathbf{R}$.

Самосопряженность есть частный случай нормальности. Нетрудно видеть, что критерии нормальности из теорем 5 и 6 (см. пункт 4) содержат в себе условия теорем 1 и 2.

2. Вспомогательные результаты

В этом пункте приведены факты, необходимые для обоснования двух наших основных результатов — теорем 5 и 6. Доказательства этих фактов можно найти в [1–3].

Лемма 1. *Пусть K и L — ненулевые матрицы размера $m \times n$, а R и S — ненулевые матрицы размера $p \times q$. Если равенство*

$$KXR = LXS$$

является тождеством относительно матрицы $X \in M_{n,p}(\mathbf{C})$, *то*

$$L = \alpha K, \qquad S = \frac{1}{\alpha} R$$

для некоторого ненулевого числа $\alpha \in \mathbf{C}$.

Определим в $M_{m,n}(\mathbf{C})$ операторы одностороннего умножения на фиксированные матрицы формулами

$$L_A : X \to AX \quad \forall\, X \in M_{m,n}(\mathbf{C}) \tag{8}$$

и

$$R_B : X \to XB \quad \forall\, X \in M_{m,n}(\mathbf{C}). \tag{9}$$

Лемма 2. *В пространстве* $M_{m,n}(\mathbf{C})$ *со скалярным произведением* (5) *сопряженными к* L_A *и* R_B *являются операторы* L_{A^*} *и* R_{B^*} *соответственно.*

Наконец, нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. *Матрицы* C *и* D *размера* $m \times n$ *тогда и только тогда удовлетворяют соотношениям*

$$CC^* = DD^* \quad \text{и} \quad C^*C = D^*D,$$

когда матричный пучок

$$C^* + \lambda D^+$$

нормален. Это означает, что матрицы C *и* D *допускают одновременное почти сингулярное разложение, т. е. существуют унитарные матрицы* U *и* V *такие, что обе матрицы*

$$U^*CV \quad \text{и} \quad U^*DV \tag{10}$$

диагональны.

Называя прямоугольные (в общем случае) матрицы (10) диагональными, мы имеем в виду, что ненулевыми в них могут быть только элементы в позициях (i, i), где $i \le \min(m, n)$.

3. Сопряженные операторы

Будем рассматривать оператор (6) как композицию оператора

$$S : X \to \overline{X}, \tag{11}$$

осуществляющего поэлементное сопряжение, и операторов L_A и R_B левого и правого умножений:

$$F = R_B L_A S. \tag{12}$$

Это позволит нам воспользоваться хорошо известной формулой

$$F^* = (R_B L_A S)^* = S^*(L_A)^*(R_B)^* \tag{13}$$

и леммой 2, согласно которой

$$(L_A)^* = L_{A^*}, \qquad (R_B)^* = R_{B^*}. \tag{14}$$

Сохраняется, однако, трудность, отмеченная во введении статьи: оператор (11) не является линейным и разумное определение сопряженного оператора должно опираться на трактовку S как линейного оператора в подходящем линейном пространстве.

Нужное пространство получается так: каждая матрица $X \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ записывается в алгебраической форме

$$X = X_1 + iX_2,$$

где X_1 и X_2 — вещественные $m\times n$-матрицы. Затем X заменяется вещественной матрицей

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

размера $2m\times n$. Линейное пространство $M_{2m,n}(\mathbf{R})$ таких матриц становится евклидовым, если ввести в него скалярное произведение, индуцируемое правилом (5). Это значит, что если наряду с (15) мы имеем матрицу

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \in M_{2m,n}(\mathbf{R}),$$

то

$$\langle \hat{X}, \hat{Y} \rangle = \mathrm{tr}\big(\hat{Y}^\top \hat{X}\big) = \mathrm{tr}\big(Y_1^\top X_1\big) + \mathrm{tr}\big(Y_2^\top X_2\big).$$

Вместо (11) оператор поэлементного сопряжения задается теперь линейным правилом

$$S : \hat{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_2 \end{pmatrix},$$

что позволяет использовать стандартное определение сопряженного оператора

$$\langle S\hat{X}, \hat{Y} \rangle = \langle \hat{X}, S^*\hat{Y} \rangle \quad \forall\, \hat{X}, \hat{Y} \in M_{2m,n}(\mathbf{R}). \tag{16}$$

Применяя это определение, имеем

$$\langle S\hat{X}, \hat{Y} \rangle = \mathrm{tr}\big(Y_1^\top X_1\big) - \mathrm{tr}\big(Y_2^\top X_2\big) = \mathrm{tr}\big(Y_1^\top X_1\big) + \mathrm{tr}\big[\big(-Y_2^\top\big) X_2\big] = \langle \hat{X}, \hat{Z} \rangle,$$

где

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ -Y_2 \end{pmatrix} = S\hat{Y}.$$

Итак,

$$\langle S\hat{X}, \hat{Y} \rangle = \langle \hat{X}, S\hat{Y} \rangle \quad \forall\, \hat{X}, \hat{Y} \in M_{2m,n}(\mathbf{R}),$$

т. е. S оказывается самосопряженным оператором пространства $M_{2m,n}(\mathbf{R})$.

Возвращаясь к представлению (12) и используя соотношения (13) и (14), приходим к следующему утверждению:

Теорема 3. *В пространстве $M_{m,n}(\mathbf{C})$ со скалярным произведением (5) сопряженным к оператору $F(A,B)$ является оператор*

$$F^*(A,B) : X \to A^\top \overline{X} B^\top.$$

Действительно, переход от X к F^*X равносилен цепочке преобразований

$$X \to XB^* \to A^*XB^* \to A^\top \overline{X} B^\top.$$

Применим тот же прием к оператору $G(A,B)$. Рассматриваем этот оператор как композицию

$$G = R_B L_A T, \tag{17}$$

где T — оператор матричного сопряжения:

$$T : X \to X^*.$$

В терминах пространства $M_{2m,n}(\mathbf{R})$ оператор T задается линейным правилом

$$T : \hat{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X_1^\top \\ -X_2^\top \end{pmatrix}.$$

Определение (16) теперь дает

$$\begin{aligned}\langle T\hat{X}, \hat{Y}\rangle &= \operatorname{tr}\bigl(Y_1^\top X_1^\top\bigr) - \operatorname{tr}\bigl(Y_2^\top X_2^\top\bigr) = \operatorname{tr}\bigl(X_1 Y_1\bigr) - \operatorname{tr}\bigl(X_2 Y_2\bigr) \\ &= \operatorname{tr}\bigl(Y_1 X_1\bigr) + \operatorname{tr}\bigl[\bigl(-Y_2\bigr)X_2\bigr] = \operatorname{tr}\Bigl[\bigl(Y_1^\top\bigr)^\top X_1\Bigr] + \operatorname{tr}\Bigl[\bigl(-Y_2^\top\bigr)^\top X_2\Bigr] = \langle \hat{X}, \hat{W}\rangle,\end{aligned}$$

где

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} Y_1^\top \\ -Y_2^\top \end{pmatrix} = T\hat{Y}.$$

(Отметим, что в этих выкладках была использована инвариантность следа относительно транспонирования и перестановки сомножителей в парном произведении матриц.) Тем самым T также оказывается самосопряженным оператором пространства $M_{2m,n}(\mathbf{R})$.

Используя представление (17) и формулы (14), получаем следующий аналог теоремы 3:

Теорема 4. *В пространстве $M_{m,n}(\mathbf{C})$ со скалярным произведением* (5) *сопряженным к оператору $G(A,B)$ является оператор*

$$G^*(A,B) : X \to BX^*A.$$

Действительно, переход от X к G^*X равносилен цепочке преобразований

$$X \to XB^* \to A^*XB^* \to (A^*XB^*)^* = BX^*A.$$

Следствие. *Сопряженными к операторам типа Стейна* (см. (3) *и* (4)) *являются операторы*

$$F^*(A,B) : X \to X - A^\top \overline{X} B^\top$$

и

$$G^*(A,B) : X \to X - BX^*A.$$

4. Условия нормальности

Из теоремы 3 выводим:

$$(F^*F)X{=}F^*(FX){=}F^*\big(A\overline{X}B\big){=}A^\top\overline{\big(A\overline{X}B\big)}B^\top{=}A^\top\big(\overline{A}X\overline{B}\big)B^\top{=}\big(A^\top\overline{A}\big)X\big(\overline{B}B^\top\big)$$

и

$$(FF^*)X{=}F(F^*X){=}F\big(A^\top\overline{X}B^\top\big){=}A\overline{\big(A^\top\overline{X}B^\top\big)}B{=}A(A^*XB^*)B{=}(AA^*)X(B^*B).$$

Пусть A и B — ненулевые матрицы. Согласно лемме 1, тождество

$$(F^*F)X = (FF^*)X$$

относительно матрицы $X \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$AA^* = \alpha A^\top\overline{A}, \qquad B^*B = \frac{1}{\alpha}\overline{B}B^\top \tag{18}$$

для некоторого ненулевого числа $\alpha \in \mathbf{C}$. Поскольку ненулевые матрицы AA^* и $A^\top\overline{A}$ положительно полуопределены, равенства (18) возможны лишь при $\alpha = 1$, т. е.

$$AA^* = A^\top\overline{A} = \overline{A^*A}$$

и

$$B^*B = \overline{B}B^\top = \overline{BB^*}.$$

Таким образом, A и B должны быть сопряженно-нормальными матрицами.

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы:

Теорема 5. *Пусть A и B — ненулевые матрицы. Оператор* (3) *тогда и только тогда нормален, когда A и B являются сопряженно-нормальными матрицами.*

При сопоставлении этого результата с теоремой 1 нужно иметь в виду, что (комплексные) симметричные и кососимметричные матрицы суть подклассы множества сопряженно-нормальных матриц.

Обратимся теперь к оператору $G(A,B)$. Из теоремы 4 выводим:

$$(G^*G)X = G^*(GX) = G^*(AX^*B) = B(AX^*B)^*A = B(B^*XA^*)A = (BB^*)X(A^*A)$$

и

$$(GG^*)X = G(G^*X) = G(BX^*A) = A(BX^*A)^*B = A(A^*XB^*)B = (AA^*)X(B^*B).$$

По-прежнему считаем A и B ненулевыми матрицами. Снова ссылаясь на лемму 1, заключаем, что нормальность оператора G равносильна выполнению соотношений

$$AA^* = \alpha BB^*, \qquad B^*B = \frac{1}{\alpha}A^*A \tag{19}$$

для некоторого ненулевого числа $\alpha \in \mathbf{C}$. Поскольку ненулевые матрицы AA^* и BB^* положительно полуопределены, равенства (19) возможны лишь при $\alpha > 0$.

Полагая в лемме 3 $C = A$, $D = \sqrt{\alpha}B$, приходим к следующему утверждению:

Теорема 6. *Пусть A и B — ненулевые матрицы. Оператор* (4) *тогда и только тогда является нормальным, когда A и B допускают одновременное почти сингулярное разложение, т. е. существуют унитарные матрицы U и V такие, что обе матрицы*

$$U^*AV \quad \text{и} \quad U^*BV \tag{20}$$

диагональны.

Понятно, что это условие нормальности выполняется в случае $B = \pm A$ (см. теорему 2).

Литература

1. **Икрамов Х.Д.** Условия самосопряженности матричных уравнений типа Стейна // Докл. РАН. — 2013. — Т. 451, № 5. — С. 498–500.
2. **Икрамов Х.Д.** Условия самосопряженности полулинейных матричных уравнений // Докл. РАН. — 2013. — Т. 450, № 5. — С. 511–513.
3. **Икрамов Х.Д.** Условия нормальности линейных матричных операторов типа Стейна // Докл. РАН. — 2015. — Т. 460, № 3. — С. 269–271.

Поступила в редакцию 3 декабря 2014 г.

Литература в транслитерации

1. **Ikramov Kh.D.** Usloviya samosopryazhennosti matrichnykh uravnenij tipa Stejna // Dokl. RAN. — 2013. — T. 451, № 5. — S. 498–500.
2. **Ikramov Kh.D.** Usloviya samosopryazhennosti polulinejnykh matrichnykh uravnenij // Dokl. RAN. — 2013. — T. 450, № 5. — S. 511–513.
3. **Ikramov Kh.D.** Usloviya normal'nosti linejnykh matrichnykh operatorov tipa Stejna // Dokl. RAN. — 2015. — T. 460, № 3. — S. 269–271.