

УДК 532.526.2

ОПИСАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

Ю. В. Пивоваров

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: pivov@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача о плоскопараллельном стационарном движении маловязкой несжимаемой жидкости внутри эллиптической полости с движущейся вдоль ее контура стенкой. На границе полости ставится условие проскальзывания с постоянной или кусочно-постоянной функцией проскальзывания. Для решения задачи используется метод сращивания асимптотических разложений. При значении числа Рейнольдса порядка $Re = 1500$ и в отсутствие угловых точек в области течения время расчета уменьшается в сотни раз по сравнению со случаем, когда используется метод конечных разностей. Область течения делится на невязкое ядро, в котором завихренность постоянна, и “слабый” пограничный слой. Уравнение “слабого” пограничного слоя путем замены переменных сводится к уравнению теплопроводности, решение которого строится в виде ряда.

Ключевые слова: условие проскальзывания, пограничный слой, уравнение теплопроводности, завихренность, функция тока.

DOI: 10.15372/PMTF20200103

Введение. В работе [1] с использованием конечно-разностного метода решалась стационарная плоская задача о движении вязкой жидкости в горизонтальном вращающемся цилиндре, заполненном наполовину, так что областью течения являлся полукруг. На свободной границе, являющейся диаметром круга, ставилось условие отсутствия касательных напряжений, на твердой границе (полуокружности) — условие проскальзывания Навье. Расчеты проводились для различных значений числа Рейнольдса, максимальное из которых равно $Re = 3300$. Как известно, при использовании конечно-разностного метода наличие схемной вязкости, пропорциональной числу Рейнольдса и максимальному по всей области течения шагу сетки в безразмерных декартовых координатах, приводит к искажению решения таких задач. При этом в окрестности границы области течения возникают большие градиенты завихренности, которые увеличиваются с увеличением числа Рейнольдса. Это приводит к необходимости измельчать сетку в окрестности границы и увеличивать число узлов в ней. Решение строилось на последовательности сеток, начиная с сетки, имеющей размерность 32×8 , и заканчивая сеткой размерностью 2048×512 . Время решения задачи значительно увеличивалось с увеличением числа Рейнольдса. Поскольку используемая конечно-разностная схема имела первый порядок аппроксимации, точность решения можно рассматривать как близость снизу к единице порядков его схо-

димости “в себе” при измельчении расчетной сетки. Установлено, что с увеличением числа Рейнольдса от 80 до 3300 порядки сходимости “в себе” для функции тока монотонно уменьшаются от 0,974 до 0,752, для завихренности — от 0,956 до 0,753. Следовательно, в данном расчете чем больше число Рейнольдса, тем ниже точность решения, полученного методом конечных разностей. Точность разностного решения уменьшается вследствие наличия схемной вязкости, линейно возрастающей с увеличением числа Рейнольдса.

В настоящей работе при решении аналогичной задачи применялся метод пограничного слоя (ПС), который имеет обратное свойство: чем больше число Рейнольдса, тем более точным является полученное решение, что обосновывает его эффективность. При использовании этого метода время расчета одинаково при любых числах Рейнольдса и в несколько сотен раз меньше времени расчета при построении решения конечно-разностным методом. При использовании метода ПС для задачи для полукруга возникает проблема построения угловых ПС, которая в настоящее время не решена. Поэтому в качестве примера решается задача о движении жидкости в эллиптической области с движущейся вдоль ее контура границей. Рассматривается два вида граничных условий: 1) на всей границе области ставится условие проскальзывания Навье; 2) на нижней части границы ставится условие проскальзывания Навье, а на верхней — условие отсутствия касательных напряжений, как в задаче для полукруга. В работе [2] показано, что внутри области течения с замкнутыми линиями тока при увеличении числа Рейнольдса завихренность стремится к постоянному значению, а на ее границе формируется пограничный слой.

Существуют “сильные” и “слабые” ПС [3]. В “сильных” ПС при стремлении толщины слоя к нулю касательные напряжения, а значит, и завихренность стремятся к бесконечности. Уравнения для определения вектора скорости в таких ПС являются существенно нелинейными. В “слабых” ПС касательные напряжения и завихренность на границе области при стремлении толщины слоя к нулю остаются ограниченными, а их производные по нормали к границе стремятся к бесконечности. В этом случае уравнения для искомых функций являются линейными.

Пример построения решения задачи с угловыми точками приведен в работе [4], в которой исследовалось осесимметричное течение маловязкой жидкости в цилиндрической полости, поэтому двумерная область течения являлась прямоугольником. На двух сторонах этого прямоугольника, соответствующих твердым стенкам, определяющим основания цилиндра, строились ПС Прандтля, а на стороне, соответствующей свободной боковой поверхности, — ПС Марангони. Все ПС сопрягались с течением в невязком ядре, в котором завихренность пропорциональна радиальной переменной [2]. В угловых точках стыковка пограничных слоев не проводилась и угловые пограничные слои не рассматривались.

Цель настоящей работы — на примере решения задачи для эллиптической полости разработать метод решения задач с условием проскальзывания на границе, не содержащей угловых точек, более эффективный по сравнению с конечно-разностным методом. Это метод ПС, являющегося в данном случае “слабым”. Примерами “сильных” ПС являются ПС Прандтля и Марангони, которые используются во многих работах, работ, посвященных изучению “слабых” ПС, значительно меньше [5–8]. Данные работы посвящены исследованию таких проблем, как асимптотика слабых разрывов течений жидкости, диффузия сферического вихря Хилла, диффузия плоского вихря, влияние малой вязкости на потенциальное течение жидкости со свободной границей в форме эллипса и др. Задача, рассматриваемая в настоящей работе, является новой.

1. Постановка задачи. Пусть xOy — декартова система координат (рис. 1), в которой задана область D , являющаяся эллипсом с полуосями 1 и $b < 1$ по осям Ox и Oy соответственно и границей Γ . Эта область наполнена вязкой несжимаемой жидкостью. Граница движется вдоль контура области по часовой стрелке, увлекая за собой жидкость.

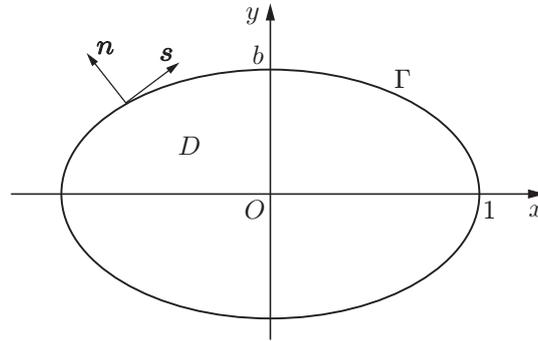


Рис. 1. Схема задачи

Введем эллиптические координаты ξ, η [9]:

$$x = \rho \sin \xi \operatorname{ch} \eta, \quad y = \rho \cos \xi \operatorname{sh} \eta, \quad \xi \in [0, 2\pi], \quad \eta \in [0, \eta_0], \quad (1)$$

где величина η_0 связана с малой полуосью b эллипса формулой

$$\eta_0 = \ln((1+b)/\rho),$$

причем $\rho = \sqrt{1-b^2}$. Тогда $b = \operatorname{th} \eta_0$, $\rho = 1/\operatorname{ch} \eta_0$.

Система координат (ξ, η) является правой и ортогональной. На границе Γ направления ортов ξ и η совпадают соответственно с направлениями касательной \mathbf{s} и внешней нормали \mathbf{n} к границе Γ (см. рис. 1). Кроме того, преобразование (1) является конформным. Поэтому его коэффициенты Ламе одинаковы по переменным ξ, η и равны

$$H = \sqrt{(\partial x/\partial \xi)^2 + (\partial y/\partial \xi)^2} = \sqrt{(\partial x/\partial \eta)^2 + (\partial y/\partial \eta)^2} = \rho \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \sin^2 \xi}.$$

Пусть V_0 — скорость движения стенки эллипса по касательной к его контуру, U_0 — характерная скорость движения жидкости, $R = 0,01$ м — характерный размер (при этом длины полуосей эллипса в размерных переменных по направлениям Ox и Oy соответственно равны R и bR), $\rho_0 = 5570$ кг/м³ — плотность, $\nu = 1,35 \cdot 10^{-7}$ м²/с — кинематическая вязкость жидкости [1], причем параметры ρ_0, ν соответствуют расплаву германия; $\alpha(\xi)$ — размерная функция проскальзывания, $K_0(\xi)$ — размерная кривизна границы эллипса (считается положительной, если эта граница является выпуклой по отношению к жидкости); U, V — компоненты вектора скорости частиц жидкости в направлениях ξ, η ; x, y — размерные декартовы координаты.

Положим

$$U = U_0 \tilde{U}, \quad V = U_0 \tilde{V}, \quad x = R\tilde{x}, \quad y = R\tilde{y} \quad (2)$$

(знак “ \sim ”, соответствующий безразмерным переменным, далее опускается). Введем также безразмерные функции $\tilde{\alpha}(\xi), \tilde{K}_0(\xi)$:

$$\alpha(\xi) = \rho_0 \nu \tilde{\alpha}(\xi)/R, \quad K_0(\xi) = \tilde{K}_0(\xi)/R.$$

Задача содержит два безразмерных критерия подобия

$$\operatorname{Re} = U_0 R/\nu, \quad q = U_0/V_0, \quad (3)$$

где Re — число Рейнольдса; q — отношение скоростей движения частиц жидкости и стенки эллипса.

В расчетах будем задавать число Рейнольдса, а величины U_0, V_0 определяем из соотношений

$$U_0 = \nu \operatorname{Re}/R, \quad V_0 = U_0/q. \quad (4)$$

Введем безразмерные функцию тока Ψ и завихренность ω по формулам

$$U = \frac{1}{H} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad V = -\frac{1}{H} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad \omega = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial (HV)}{\partial \xi} - \frac{\partial (HU)}{\partial \eta} \right). \quad (5)$$

Для удобства перейдем от компонент вектора скорости U, V к модифицированным компонентам u, v :

$$u = HU = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad v = HV = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}. \quad (6)$$

Гидродинамическая стационарная задача определения функций Ψ, ω, u, v ставится следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = -H^2 \omega; \quad (7)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) = u \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + v \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \quad \xi \in [0, 2\pi], \quad \eta \in [0, \eta_0]; \quad (8)$$

$$\Psi(\xi, \eta_0) = 0; \quad (9)$$

$$\omega(\xi, \eta_0) + (2K_0(\xi) - \alpha(\xi)) \frac{u(\xi, \eta_0)}{H(\xi, \eta_0)} = -\frac{\alpha(\xi)}{q}. \quad (10)$$

Выражение (7) является следствием (5). Докажем справедливость уравнения импульса (8). Это уравнение в векторном виде является обобщением уравнения Гельмгольца для вязких течений и согласно [10] имеет вид

$$\frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{\Omega} = (\mathbf{W} \cdot \nabla) \mathbf{\Omega}^T - (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{W}^T, \quad (11)$$

где $\Delta = H^{-2}(\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2)$ — оператор Лапласа [10]; $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \omega)$ — вектор завихренности; $\nabla = (H^{-1} \partial/\partial \xi, H^{-1} \partial/\partial \eta, \partial/\partial z)^T$ — градиент [10]; z — третья декартова координата; $\mathbf{W} = (U, V, 0)$ — скорость частиц жидкости. Поскольку параметры течения не зависят от координаты z , проекции уравнения (11) на оси ξ, η выполняются тождественно ($0 \equiv 0$). Второй член в правой части (11) в проекции на ось z также равен нулю. Учитывая (6) и сокращая обе части проекции уравнения (11) на ось z на H^2 , получаем выражение (8). Соотношение (9) представляет собой условие непротекания (ввиду того, что нормальная относительно стенки компонента вектора скорости жидкости равна нулю, функция тока на границе области является константой, которую без ограничения общности можно положить равной нулю), (10) — условие проскальзывания, задающее пропорциональность касательных напряжений разности скоростей частиц жидкости и твердой стенки с коэффициентом пропорциональности $-\alpha(\xi) < 0$. В размерных переменных это условие имеет вид

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} - V_0), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (12)$$

где \mathbf{P} — тензор напряжений; \mathbf{u} — двумерный вектор скорости частиц жидкости. Можно показать, что левая часть выражения (12) равна [11, 12]

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -\rho_0 \nu \left(\omega + 2K_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right). \quad (13)$$

Переходя в (12), (13) к безразмерным переменным и вводя эллиптические координаты ξ, η с учетом (5), (6), получаем выражение (10). В (12), (13) α, K_0 — размерные функции, в (10) — безразмерные функции.)

Безразмерную кривизну границы области течения определим по формуле

$$K_0(\xi) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \quad x = \sin \xi, \quad y = b \cos \xi.$$

Тогда

$$K_0(\xi) = b/(1 - \rho^2 \sin^2 \xi)^{3/2}. \quad (14)$$

Малым параметром задачи является величина $\varepsilon = 1/\sqrt{\text{Re}}$.

2. Решение задачи. Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда с использованием метода сращивания асимптотических разложений течение можно разбить на невязкое ядро и ПС, компенсирующий невязку в граничном условии (10) для ω . Известно, что при стремлении вязкости к нулю в случае плоскопараллельного течения с замкнутыми линиями тока завихренность ω вне ПС стремится к постоянному значению, которое в случае движения по часовой стрелке меньше нуля [2]:

$$\omega \rightarrow \omega_0 = -\gamma^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Эта константа определена ниже.

Для функции тока получаем задачу в переменных x, y :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \gamma^2, \quad \Psi|_{\Gamma} = 0,$$

решение которой имеет вид

$$\Psi = -\frac{\gamma^2 b^2}{2(1 + b^2)} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{b^2}\right). \quad (15)$$

Найдем модифицированную скорость на границе эллипса. Из (15), (1), (6) получаем

$$u(\xi, \eta_0) = \gamma^2 u_0(\xi); \quad (16)$$

$$u_0(\xi) = b(1 - \rho^2 \sin^2 \xi)/(1 + b^2). \quad (17)$$

Рассмотрим течение внутри ПС. Пусть

$$\delta = (\eta_0 - \eta)/\varepsilon. \quad (18)$$

Тогда

$$\eta = \eta_0 - \delta\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \delta}. \quad (19)$$

Запишем задачу (7)–(10) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0; \quad (20)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) = u \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + v \frac{\partial \omega}{\partial \eta}; \quad (21)$$

$$\omega = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad \xi \in [0, 2\pi], \quad \eta \in [0, \eta_0]; \quad (22)$$

$$\omega(\xi, \eta_0) + (2K_0(\xi) - \alpha(\xi)) \frac{u(\xi, \eta_0)}{H(\xi, \eta_0)} = -\frac{\alpha(\xi)}{q}; \quad (23)$$

$$v(\xi, \eta_0) = 0. \quad (24)$$

Представим u, v в виде асимптотических рядов

$$u = \gamma^2(u_0^1(\xi, \delta) + \varepsilon u_1(\xi, \delta) + \dots); \quad (25)$$

$$v = \gamma^2(\varepsilon v_0(\xi, \delta) + \varepsilon^2 v_1(\xi, \delta) + \dots). \quad (26)$$

Подставляя (25), (26) в (20) и учитывая (19), получаем

$$\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi} - \frac{\partial v_0}{\partial \delta} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{\partial v_1}{\partial \delta} \right) + \dots = 0. \quad (27)$$

По формуле (22) с учетом (25), (26) находим

$$\omega = \frac{\gamma^2}{H^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_0^1}{\partial \delta} + \frac{\partial u_1}{\partial \delta} + \dots \right). \quad (28)$$

Из ограниченности ω при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует

$$\frac{\partial u_0^1(\xi, \delta)}{\partial \delta} = 0,$$

или

$$u_0^1(\xi, \delta) = u_0(\xi). \quad (29)$$

Эта функция задается внешним асимптотическим разложением и вычисляется по формуле (17).

Установим связь между функциями u_0 и v_0 . Из (27), (29), (24) следует

$$\frac{\partial v_0(\xi, \delta)}{\partial \delta} = u_0'(\xi), \quad v_0(\xi, 0) = 0$$

(штрих означает дифференцирование по ξ). Отсюда получаем

$$v_0(\xi, \delta) = \delta u_0'(\xi). \quad (30)$$

Из (28), (29) следует, что главный член асимптотического разложения для ω имеет вид

$$\omega = \gamma^2 f(\xi, \delta), \quad (31)$$

где

$$f(\xi, \delta) = \frac{1}{H_0^2(\xi)} \frac{\partial u_1(\xi, \delta)}{\partial \delta}; \quad (32)$$

$$H_0(\xi) = H(\xi, \eta_0) = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \xi}. \quad (33)$$

Из (21), (30)–(32), (19) следует уравнение для f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \delta^2} = \gamma^2 \left(u_0(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi} - \delta u_0'(\xi) \frac{\partial f}{\partial \delta} \right). \quad (34)$$

Выполним замену [13]:

$$z = \delta u_0(\xi), \quad f(\xi, z/u_0(\xi)) = f_1(\xi, z), \quad f_1(\xi, \delta u_0(\xi)) = f(\xi, \delta). \quad (35)$$

Уравнение (34) принимает вид

$$u_0(\xi) \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = \gamma^2 \frac{\partial f_1}{\partial \xi}.$$

Проведем еще одну замену [13]:

$$\zeta = \int_0^{\xi} u_0(\xi_1) d\xi_1, \quad f_1(\xi, z) = f_2\left(\int_0^{\xi} u_0(\xi_1) d\xi_1, z\right) = f_2(\zeta, z), \quad (36)$$

получаем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = \gamma^2 \frac{\partial f_2}{\partial \zeta}. \quad (37)$$

Из (23), (31) следует граничное условие для функции f_2 :

$$\gamma^2 f_2(\zeta(\xi), 0) = -\gamma^2 A(\xi) - \alpha(\xi)/q, \quad (38)$$

где

$$A(\xi) = (2K_0(\xi) - \alpha(\xi)) u_0(\xi)/H_0(\xi). \quad (39)$$

Подставляя в (39) выражения (14), (16), (17), (33), находим

$$A(\xi) = \frac{2b^2}{(1+b^2)(1-\rho^2 \sin^2 \xi)} - \frac{b\alpha(\xi)}{1+b^2} \sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \xi}. \quad (40)$$

Пусть

$$\zeta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\xi_1) d\xi_1, \quad \zeta(\xi) = \int_0^{\xi} u_0(\xi_1) d\xi_1. \quad (41)$$

Тогда

$$\zeta(\xi)/\zeta_0 \in [0, 2\pi].$$

Обозначим

$$A^1(\zeta(\xi)) = A(\xi), \quad \alpha^1(\zeta(\xi)) = \alpha(\xi).$$

Разложим функции $A^1(\zeta)$, $\alpha^1(\zeta)$ в ряды Фурье:

$$A^1(\zeta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\zeta}{\zeta_0}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\zeta}{\zeta_0}\right) \right),$$

$$\alpha^1(\zeta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos\left(\frac{k\zeta}{\zeta_0}\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\zeta}{\zeta_0}\right) \right),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi\zeta_0} \int_0^{2\pi\zeta_0} A^1(\zeta) \cos\left(\frac{k\zeta}{\zeta_0}\right) d\zeta$$

или

$$a_k = \frac{1}{\pi\zeta_0} \int_0^{2\pi} A(\xi) \cos\left(k \int_0^{\xi} \frac{u_0(\xi_1)}{\zeta_0} d\xi_1\right) u_0(\xi) d\xi, \quad k = \overline{0, \infty}; \quad (42)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi\zeta_0} \int_0^{2\pi} A(\xi) \sin\left(k \int_0^{\xi} \frac{u_0(\xi_1)}{\zeta_0} d\xi_1\right) u_0(\xi) d\xi, \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (43)$$

Величины α_k , β_k определяются аналогично.

Условие согласования с внешним асимптотическим разложением имеет вид

$$\gamma^2 f_2(\zeta(\xi), \infty) = -\gamma^2 = \omega_0. \quad (44)$$

Ограниченное решение задачи (37), (38), (44) находим в замкнутой форме

$$\gamma^2 f_2(\zeta, z) = -\frac{\gamma^2 a_0 + \alpha_0/q}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\gamma^2 a_k + \frac{\alpha_k}{q} \right) f_{kc}(\zeta, z) + \left(\gamma^2 b_k + \frac{\beta_k}{q} \right) f_{ks}(\zeta, z) \right], \quad (45)$$

где

$$f_{kc} = \exp \left(-\sqrt{\gamma^2 k / (2\zeta_0)} z \right) \cos \left(-\sqrt{\gamma^2 k / (2\zeta_0)} z + k\zeta / \zeta_0 \right); \quad (46)$$

$$f_{ks} = \exp \left(-\sqrt{\gamma^2 k / (2\zeta_0)} z \right) \sin \left(-\sqrt{\gamma^2 k / (2\zeta_0)} z + k\zeta / \zeta_0 \right). \quad (47)$$

Из условия (44) следует выражение $-\gamma^2 = -(\gamma^2 a_0 + \alpha_0/q)/2$, или

$$\gamma^2 = \frac{\alpha_0}{q(2 - a_0)}. \quad (48)$$

Из (31), (35), (36), (45)–(48) следует

$$\begin{aligned} \omega(\xi, \delta) = & -\gamma^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(a_k \gamma^2 + \frac{\alpha_k}{q} \right) \cos \left(-\sqrt{\frac{\gamma^2 k}{2\zeta_0}} \delta u_0(\xi) + \frac{k}{\zeta_0} \int_0^{\xi} u_0(\xi_1) d\xi_1 \right) + \right. \\ & \left. + \left(b_k \gamma^2 + \frac{\beta_k}{q} \right) \sin \left(-\sqrt{\frac{\gamma^2 k}{2\zeta_0}} \delta u_0(\xi) + \frac{k}{\zeta_0} \int_0^{\xi} u_0(\xi_1) d\xi_1 \right) \right] \exp \left(-\sqrt{\frac{\gamma^2 k}{2\zeta_0}} \delta u_0(\xi) \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Для функции $\zeta(\xi)$ получаем выражение

$$\zeta(\xi) = \int_0^{\xi} u_0(\xi_1) d\xi_1 = \frac{b\xi}{2} + \frac{b\rho^2 \sin(2\xi)}{1 + b^2}.$$

В соответствии с (41) имеем

$$\zeta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} (\zeta(2\pi) - \zeta(0)) = \frac{b}{2}.$$

Рассчитаем коэффициент a_0 . Согласно формуле (42) при $k = 0$ получаем

$$a_0 = \frac{1}{\pi\zeta_0} \int_0^{2\pi} A(\xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Из (17), (40) находим

$$A(\xi) = A_0 + A_1(\xi),$$

где

$$A_0 = \frac{2b^3}{(1 + b^2)^2} = \text{const}, \quad A_1(\xi) = -\frac{\alpha(\xi)b^2(1 - \rho^2 \sin^2 \xi)^{3/2}}{(1 + b^2)^2}.$$

Тогда

$$a_0 = a_{0,0} + a_{0,1},$$

где

$$a_{0,0} = \frac{1}{\pi \zeta_0} \int_0^{2\pi} A_0 d\xi = \frac{8b^2}{(1+b^2)^2}, \quad a_{0,1} = -\frac{2b}{\pi(1+b^2)^2} I(\rho),$$

$$I(\rho) = \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2 \sin^2 \xi)^{3/2} \alpha(\xi) d\xi.$$

При $0 < b < 1$ оценим величину a_0 сверху:

$$a_0 = a_{0,0} - |a_{0,1}| < a_{0,0} = \frac{8b^2}{(1+b^2)^2} = \frac{8}{(1/b + b)^2} < 2.$$

Следовательно, знаменатель в правой части выражения (48) строго положителен и решение задачи существует всегда.

Определим максимальное значение u_{\max} безразмерной скорости жидких частиц на границе эллипса. Согласно (17) он достигается при $\xi = 0$ и $\xi = \pi$, т. е. в верхней и нижней центральных точках области течения. С учетом (16), (48) находим

$$u_{\max} = \frac{\alpha_0 b}{q(2 - a_0)(1 + b^2)}.$$

Полагая $u_{\max} = 1$, найдем значение параметра q , обеспечивающее выполнение второго равенства (3). Принимая в качестве U_0 в (2) максимальное значение размерной скорости жидкости на границе эллипса, получаем

$$q = \frac{\alpha_0 b}{(2 - a_0)(1 + b^2)}. \quad (50)$$

Из (48), (50) следует, что величина γ^2 зависит только от геометрии области и вычисляется по формуле

$$\gamma^2 = \frac{1 + b^2}{b}. \quad (51)$$

3. Тестирование алгоритма. При $b = 1$ область течения представляет собой круг, в котором при произвольной функции проскальзывания $\alpha(\xi)$ величина q должна быть равна единице.

Итак, пусть $b = 1$. Тогда $\rho = 0$, $a_{0,0} = 2$, $I(\rho) = \alpha_0 \pi$, поэтому $a_{0,1} = -\alpha_0/2$, $a_0 = a_{0,0} + a_{0,1} = 2 - \alpha_0/2$. Следовательно, $q = \alpha_0/(2(2 - a_0)) = 1$. Рассматриваемое соотношение доказано.

Проверим выполнение энергетического тождества

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} ds = \iint_D \left[2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (52)$$

где \mathbf{t} — вектор напряжений; u_x, u_y — компоненты вектора скорости в декартовой системе координат. Интеграл в левой части (52) является мощностью поверхностных сил, правая часть описывает скорость диссипации энергии в жидком объеме [10]. Имеем

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = - \left(\omega + 2K_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial n}.$$

Тогда левая часть равенства (52) принимает вид

$$\begin{aligned} - \oint_{\Gamma} \left(\omega + 2K_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds &= \int_0^{2\pi} \left(\gamma^2 A + \frac{\alpha}{q} - 2K_0 \frac{\gamma^2 u_0}{H_0} \right) \gamma^2 u_0 d\xi = \\ &= \pi \zeta_0 \gamma^2 \left(\gamma^2 a_0 + \frac{\alpha_0}{q} \right) - 2\gamma^4 \int_0^{2\pi} \frac{K_0 u_0^2}{H_0} d\xi = \gamma^4 \pi b - \frac{4\pi \gamma^4 b^3}{(1+b^2)^2}. \end{aligned} \quad (53)$$

При вычислении правой части используем формулу (15) и соотношения

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Первый и последний члены под знаком интеграла в правой части (52) равны нулю, второй член является константой. Интеграл от второго члена имеет вид

$$\iint_D \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{\pi b (1-b^2)^2 \gamma^4}{(1+b^2)^2}. \quad (54)$$

Выражения (53), (54) равны. Таким образом, энергетическое тождество доказано.

4. Результаты расчетов. Все исходные и искомые величины и функции, за исключением ν , R , U_0 , V_0 , для приведенных результатов расчетов являются безразмерными.

Положим малую полуось эллипса равной $b = 0,6$. Тогда $\rho = 0,8$, $\eta_0 = 0,6931472$. Рассмотрим два варианта задания функции проскальзывания $\alpha(\xi)$:

— вариант 1: $\alpha(\xi) \equiv \alpha_0/2$, $\alpha_0 = 0,4$;

— вариант 2: $\alpha(\xi) = \begin{cases} \alpha_0 = 0,2, & \xi \in [\pi/2, 3\pi/2], \\ 0, & \xi \in [0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]. \end{cases}$

Вариант 1 соответствует случаю, когда вся граница эллипса является твердой стенкой, на которой выполняется условие проскальзывания Навье, вариант 2 — случаю, когда на нижней половине границы эллипса выполняется условие проскальзывания Навье, на верхней — условие отсутствия касательных напряжений, как на свободной границе [1]. При этом завихренность в левой и правой центральных граничных точках эллипса претерпевает скачок.

Заметим, что в варианте 2 задания функции проскальзывания величина α_0 является правой частью выражения для $\alpha(\xi)$ при $\xi \in [\pi/2, 3\pi/2]$ и одновременно “нулевым” коэффициентом Фурье функции $\alpha(\xi)$.

В табл. 1 приведены число членов ряда K , число разбиений N_1 отрезка $[0, 2\pi)$ оси ξ при вычислении интегралов (42) (интегралы (43) ввиду четности функции $A(\xi)$ равны нулю), а также значения величин a_0 и q для двух вариантов задания функции проскальзывания (L — номер варианта).

Таблица 1

Значения числа членов ряда K , числа разбиений N_1 и величин a_0 , q для двух вариантов задания функции проскальзывания

L	K	N_1	a_0	q
1	120	250	1,4055	0,29682
2	1200	24000	1,5192	0,18351

Таблица 2

Зависимости скоростей движения жидкости U_0 и стенки эллипса V_0 от числа Рейнольдса для двух вариантов задания функции проскальзывания

L	Re	q	U_0 , м/с	V_0 , м/с
1	100	0,296 82	0,001 35	0,004 55
	400	—	0,005 40	0,018 19
	1600	—	0,021 60	0,072 77
2	100	0,183 51	0,001 35	0,007 36
	400	—	0,005 40	0,029 43
	1600	—	0,021 60	0,117 70

Средняя по отрезку $\xi \in [0, 2\pi)$ погрешность выполнения граничного условия (23) для варианта 1 имеет порядок 10^{-11} , для варианта 2 — $3 \cdot 10^{-4}$. Погрешность выполнения уравнения (37) на разностном уровне составляла порядка $10^{-4} \div 10^{-3}$ при $L = 1$ и $6 \cdot 10^{-3} \div 2 \cdot 10^{-2}$ при $L = 2$.

В варианте 2 коэффициенты Фурье функции $\alpha(\xi)$ при $k > 0$ имеют вид

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, & k \bmod 2 = 0, \\ -2\alpha_0/(k\pi), & k \bmod 4 = 1, \\ 2\alpha_0/(k\pi), & k \bmod 4 = 3, \end{cases}$$

где \bmod — операция взятия остатка от деления на число.

Функция тока рассчитывалась по формуле (15) с учетом (1), (51). Ее минимальное значение равно $\Psi_{\min} = -b/2 = -0,3$ и достигается в центре области, максимальное значение равно $\Psi_{\max} = 0$ и достигается на всей границе области течения.

В табл. 2 приведены зависимости максимальной скорости жидкости U_0 и скорости движения стенки эллипса V_0 от числа Рейнольдса и величины q в соответствии с формулами (4) для двух вариантов задания функции проскальзывания. Из табл. 2 следует, что скорость стенки эллипса меняется от 0,005 до 0,12 м/с, максимум скорости жидкости — от 0,0014 до 0,02 м/с.

Завихренность рассчитывалась по формуле (49). При этом коэффициенты a_k, b_k определялись по формулам (42), (43) с учетом (40), коэффициенты α_k, β_k — по аналогичным формулам с заменой $A(\xi)$ на $\alpha(\xi)$. Функция $u_0(\xi)$ вычислялась по формуле (17), параметр δ — по формуле (18).

Завихренность имеет следующие минимальные и максимальные значения. При $L = 1$ минимум функции ω составляет $\omega_{\min} = -3,886 19$ и достигается на правой части границы эллипса при $x = 0,999 921, y = 0,007 539 6$, а максимум составляет $\omega_{\max} = -1,673 81$ и достигается в верхней центральной точке границы области. При $L = 2$ минимум функции ω составляет $\omega_{\min} = -4,371 70$ и достигается на правой части границы эллипса при $x = 0,999 657, y = -0,015 706$, максимум составляет $\omega_{\max} = -1,200 27$ и достигается в верхней центральной точке границы области.

На рис. 2 показаны линии тока, не зависящие от $\alpha(\xi)$ и Re. На рис. 3 приведены изолинии завихренности при $L = 1, 2$ и различных значениях числа Рейнольдса Re. Число разбиений области течения по осям ξ, η составляло 250×250 для $L = 1$ и 240×250 для $L = 2$. По оси ξ использовалась равномерная расчетная сетка, по оси η — сетка, сгущающаяся вблизи границы области. Изломы изолиний на рис. 3, а, б обусловлены наличием разреза на отрезке $y = 0, x \in [-\rho, \rho]$ внутри области течения для эллиптической системы координат.

Следует отметить, что при $L = 2, K = 1200, N_1 = 24 000$ время расчета коэффициентов a_k по формулам (42) в настоящей работе составляет 10 с, время расчета завихрен-

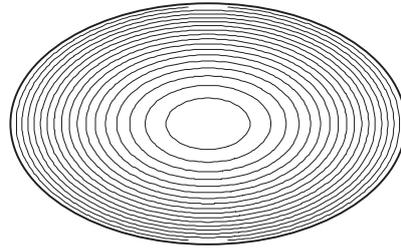


Рис. 2. Линии тока

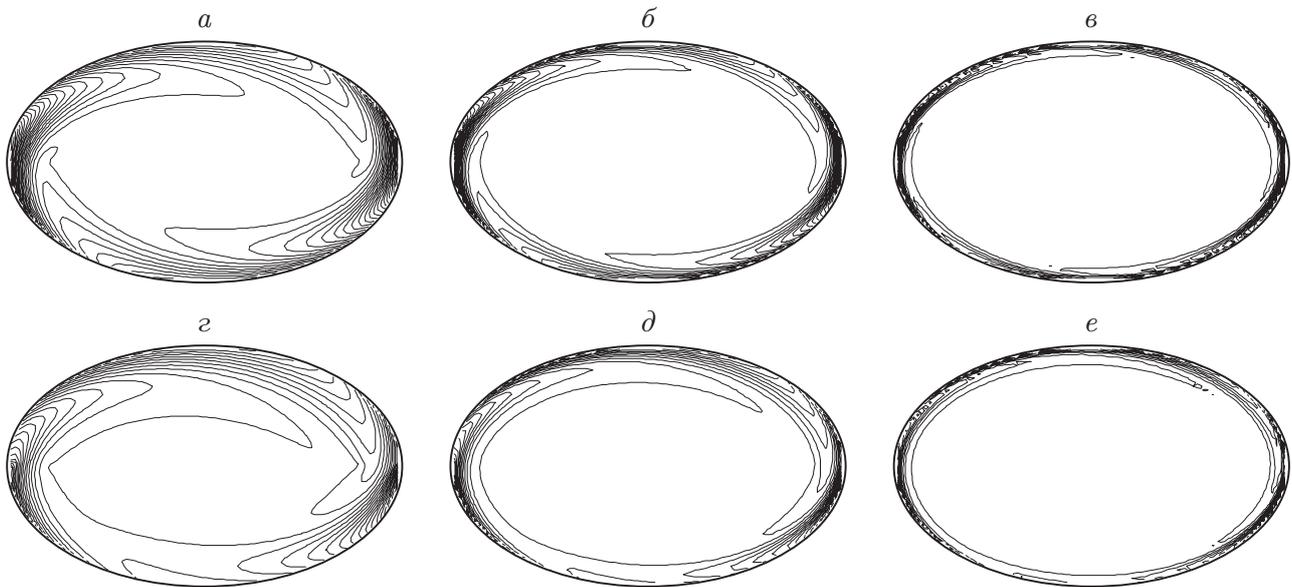


Рис. 3. Изолинии завихренности для вариантов 1 (*a*–*в*), 2 (*г*–*е*) при различных значениях числа Рейнольдса:
a, *г* — $Re = 100$, *б*, *д* — $Re = 400$, *в*, *е* — $Re = 1600$

ности по формуле (49) при $N \times M = 240 \times 250$ — порядка 40 с. Таким образом, общее время расчета одного варианта составляет менее 1 мин и не зависит от числа Рейнольдса. Продолжительность расчета одного варианта с помощью метода конечных разностей для задачи в полукруге существенно зависит от числа Рейнольдса. Так, при $Re = 1470$ она составляет порядка 6 ч (что в 360 раз больше времени расчета в настоящей работе), а при $Re = 3321$ — 48 ч. При этом расчет ведется на последовательности сеток, начиная с сетки размерностью 32×8 и заканчивая сеткой размерностью 2048×512 . Для последней из построенных сеток при $Re = 3321$ время расчета составляет 24 ч [1].

Заключение. С использованием метода пограничного слоя решена задача о плоскопараллельном стационарном движении маловязкой несжимаемой жидкости внутри эллиптической полости с движущейся по касательной к ее границе стенкой. Невязкое ядро течения описывается уравнением для функции тока с постоянной завихренностью. Уравнение пограничного слоя путем замены переменных сводится к уравнению теплопроводности, решение которого определяется в виде ряда. Константа, входящая в решение, согласуется с константой в невязком ядре течения. Рассмотрено два варианта граничных условий для завихренности на границе эллипса: с постоянной и кусочно-постоянной функциями проскальзывания. Для обоих вариантов построены изолинии завихренности для трех значений числа Рейнольдса. Показано, что изолинии завихренности “скручиваются” под действием

вращения жидкости и при увеличении числа Рейнольдса смещаются к границе эллиптической полости. В варианте 2 выход на постоянное значение завихренности по мере удаления от границы эллипса происходит медленнее, чем в варианте 1, что обусловлено значительно меньшей скоростью уменьшения коэффициентов ряда. Использование в данной работе метода сращивания асимптотических разложений при значении числа Рейнольдса $Re \approx 1500$ позволило в несколько сотен раз уменьшить время расчета для решения задачи о течении жидкости в области с гладкой границей по сравнению со случаем, когда используется метод конечных разностей для решения задачи в полукруге. Однако при использовании этого метода для решения задачи в области, граница которой содержит угловые точки, возникает проблема построения угловых пограничных слоев, которая пока не решена.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пивоваров Ю. В.** Расчет движения вязкой жидкости, частично заполняющей вращающуюся полость, при больших числах Рейнольдса // Вычисл. технологии. 2019. Т. 24, № 3. С. 88–105.
2. **Betchelor G. K.** On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1, N 2. P. 177–190.
3. **Батищев В. А.** Тепловые пограничные слои в жидких средах с границами раздела: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1998.
4. **Кузнецов В. В.** Расчет течений расплава в ампуле // ПМТФ. 1984. № 2. С. 105–110.
5. **Срубщик Л. С., Юдович В. И.** Асимптотика слабых разрывов течений жидкости при исчезающей вязкости // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, № 3. С. 563–566.
6. **Батищев В. А., Срубщик Л. С.** Диффузия сферического вихря Хилла при исчезающей вязкости // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 5. С. 1038–1041.
7. **Батищев В. А., Срубщик Л. С.** Диффузия плоского вихря при исчезающей вязкости // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та, 1974. Т. 5. С. 114–119.
8. **Батищев В. А.** Влияние малой вязкости на потенциальное течение жидкости со свободной границей в форме эллипса // ПМТФ. 1977. № 1. С. 101–105.
9. **Маделунг Э.** Математический аппарат физики. М.: Физматгиз, 1960.
10. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 2 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963.
11. **Воеводин А. Ф.** Проблемы вычислительной математики / А. Ф. Воеводин, В. В. Остапенко, Ю. В. Пивоваров, С. М. Шугрин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1995.
12. **Пивоваров Ю. В.** Моделирование конвекции расплава полупроводникового материала при зонной плавке: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2006.
13. **Батищев В. А.** Асимптотика осесимметричных течений жидкости со свободной границей при исчезающей вязкости // ПМТФ. 1975. № 3. С. 101–109.

*Поступила в редакцию 7/III 2019 г.,
после доработки — 18/VI 2019 г.
Принята к публикации 26/VIII 2019 г.*