ТЕЧЕНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. Б. Чекмарев (Ленинград)

С. А. Регирер [1] рассмотрел течение между параллельными плоскими стенками в неоднородном поле в предположении, что скорость жидкости не изменяется вдоль потока. Недавно стационарное течение невязкой электропроводной среды в плоском канале в присутствии неоднородного внешнего магнитного поля исследовалось в работе Сакураи и Наито [2]. Магнитогидродинамический пограничный слой в неоднородных полях изучался Шерманом [3] и Таркоттом и Лайонсом [4].

Ниже рассматривается стационарное течение вязкой электропроводной жидкости между параллельными пластинами $y = \pm a$, создаваемое перепадом давления вдоль оси x. Составляющие магнитной индукции внешнего потенциального поля считаются периодическими функциями координаты x и имеют следующий вид:

$$B_x = -B_0 \sin\frac{2\pi x}{\lambda} \operatorname{sh}\frac{2\pi y}{\lambda}, \qquad B_y = B_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda} \operatorname{ch}\frac{2\pi y}{\lambda}, \qquad B_z = 0 \tag{1}$$

Так как в рассматриваемом случае все величины не зависят от координаты z, то, ограничиваясь малыми магнитными числами Рейнольдса, имеем:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} - j_z B_y + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + j_z B_x + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \qquad j_z = \sigma(uB_y - vB_x)$$

Здесь B_x и B_y определяются формулами (1), а внешнее электрическое поле отсутствует. Введем безразмерные переменные

$$y^* = \frac{y}{a}, \quad x^* = \frac{x}{\lambda}, \quad u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{\varepsilon u_0}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad \varepsilon = \frac{a}{\lambda}, \quad u_0 = \frac{Q}{2a} \tag{3}$$

Здесь u_0 — средняя скорость среды; p_0 — некоторый масштаб давления. Система (2) в этих переменных примет вид (звездочки далее опускаются)

$$\varepsilon\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\varepsilon E\frac{\partial p}{\partial x} - S\cos 2\pi x \operatorname{ch} 2\pi\varepsilon y\,(u\cos 2\pi x \operatorname{ch} 2\pi\varepsilon y +$$

$$+ \varepsilon v \sin 2\pi x \operatorname{sh} 2\pi\varepsilon y) + \frac{1}{R}\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

$$\varepsilon^2\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -E\frac{\partial p}{\partial y} - S\sin 2\pi x \operatorname{sh} 2\pi\varepsilon y\,(u\cos 2\pi x \operatorname{ch} 2\pi\varepsilon y +$$

$$+ \varepsilon v \sin 2\pi x \operatorname{sh} 2\pi\varepsilon y) + \frac{\varepsilon}{R}\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \left(E = \frac{p_0}{\rho u_0^2},\ S = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho u_0},\ R = \frac{\rho u_0 a}{\eta}\right)$$

Рассмотрим случай $\lambda \gg a$. При этом условии напряженность магнитного поля и скорость жидкости будут слабо изменяться вдоль потока по сравнению с их изменением поперек канала. Будем искать решение системы (4) в виде рядов по степеням малого параметра $\varepsilon = a/\lambda \ll 1$. Полагая $E = 1/\varepsilon$, находим для нулевого приближения уравнения

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - S(\cos 2\pi x)^2 u = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

Дифференцируя первое из уравнений (5) по y, исключаем давление p и получаем для скорости уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - (M\cos 2\pi x)^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (M^2 = SR) \tag{6}$$

решая которое при условиях

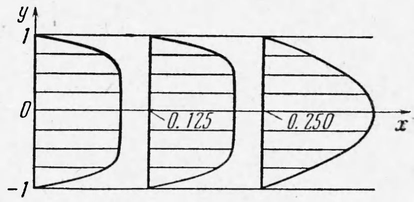
$$u|_{y=\pm 1} = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} u\,dy = 2 \tag{7}$$

находим

$$u = \frac{\operatorname{ch}(M_y\cos 2\pi x) - \operatorname{ch}(M\cos 2\pi x)}{(M\cos 2\pi x)^{-1}\operatorname{sh}(M\cos 2\pi x) - \operatorname{ch}(M\cos 2\pi x)} \tag{8}$$

При $\lambda \to \infty$ формула (8) переходит в известное решение задачи Гартмана для однородного магнитного поля

$$u = \frac{\operatorname{ch} My - \operatorname{ch} M}{M^{-1} \operatorname{sh} M - \operatorname{ch} M} \tag{9}$$



Любопытно отметить, что в точках $x = {}^1/_2\, n$, где $\cos 2\pi x = (-1)^n$, также получаем профиль Гартмана. В точках ${}^1/_4\,(2n+1)$, где $\cos 2\pi x = 0$, формула (8) дает обычный профиль Пуазейля $u = {}^3/_2\,(1 - y^2)$.

Таким образом, при движении жидкости в периодическом внешнем магнитном поле, длина волны которого значительно больше высоты канала, распределение скоростей определяется формулой (8), которая аналогична формуле (9), взятой с некоторым эффективным числом Гартмана $M\,|\cos 2\pi x\,|$. При этом профиль скоростей периодически деформируется от гартмановского при $|\cos 2\pi x\,| = 1$ до пуазейлевского при $\cos 2\pi x = 0$. Поперечная скорость v может быть найдена из последнего уравнения (5) по известной составляющей u.

Для определения распределения давления в канале имеем соотношение

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (M \cos 2\pi x)^2\, u\right]$$

Вычисляя его правую часть при помощи (8). находим

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(M \cos 2\pi x)^2}{R}\, \frac{\operatorname{ch}(M \cos 2\pi x)}{(M \cos 2\pi x)^{-1} \operatorname{sh}(M \cos 2\pi x) - \operatorname{ch}(M \cos 2\pi x)} \tag{10}$$

На приведенной фигуре показано изменение профиля скоростей в зависимости от продольной координаты x.

Поступила 13 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А. Об одном точном решении уравнений магнитной гидродинамики. ПММ. 1960, т. 24, № 2.
2. Sakurai T., Naito M. Steady two-dimensional channel flow of an incompressible perfect fluid with small electric conductivity in the presence of nonuniform magnetic fields. J. Phys. Soc. Japan, 1962, vol. 17, No. 4.
3. Sherman A. Viscous magnetohydrodynamic boundary layer. Phys. of Fluids, 1961, vol. 4, № 5.
4. Turcotte D. L., Lyons J. M. A periodic boundary-layer flow in magnetohydrodynamics. J. Fluid mech., 1962, vol. 13, Pt. 4.

О МОДЕЛИРОВАНИИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ НА ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЕ

В. В. Назаренко (Москва)

Для течения электропроводной несжимаемой жидкости в плоском канале в присутствии магнитного поля при значениях магнитного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_m \ll 1$ можно пренебречь влиянием индуцированного магнитного поля на движение жидкости. Кроме того, в ряде случаев гидродинамическая задача может быть отделена от электродинамической [1]. При этом скорость жидкости $\mathbf{V}$ может определяться из гидродинамических уравнений или задаваться, а распределение плотности тока $\mathbf{j}$ и электрического потенциала φ в канале находится из закона Ома и уравнения неразрывности для $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\,\mathbf{V}\times\mathbf{B}\right), \quad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{B}$ — напряженность магнитного поля, σ — электропроводность жидкости, c — скорость света в пустоте. При этом $\mathbf{V}$ и $\mathbf{B}$ считаются заданными функциями координат. Задача сводится к уравнению Пуассона для функции φ.

Если канал составлен из участков проводников и диэлектриков, то граничными условиями будут постоянство потенциала φ на проводниках и отсутствие нормальной составляющей плотности тока на диэлектриках $j_n = 0$.