УДК 534

ЦЕПОЧКА ФИЗИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ НЕЗАВИСИМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А. Д. Сергеев

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dievich@rambler.ru

Рассматривается механическая система с сосредоточенными параметрами — цепочка физически связанных твердых тел, каждое из которых имеет одну вращательную степень свободы. Показано, что безынерционные упругие элементы, связывающие абсолютно твердые тела цепочки, можно выбрать таким образом, чтобы механическая структура приобрела свойства так называемого абсолютного механического фильтра. Движение любого инерционного элемента этой системы описывается уравнением классического гармонического осциллятора с одной степенью свободы. На примере рассматриваемой системы показано, что между моделями классической и квантовой механики имеется связь. С позиций современной классической механики данная система с сосредоточенными параметрами подтверждает известную в теоретической физике гипотезу Эйнштейна о твердом теле как системе независимых осцилляторов.

Ключевые слова: цепочки твердых тел, гипотеза Эйнштейна.

DOI: 10.15372/PMTF20180520

Введение. Модели классической аналитической механики допускают классификацию динамических механических систем по типу кинематики движения, совершаемого их инерционными элементами. В настоящее время в аналитической механике, изучающей такие системы с дискретными параметрами, как правило, проводится классификация по числу обобщенных степеней свободы механической системы, при этом трансляционные и вращательные степени свободы не различаются. Правомерность классификации динамических систем по типу кинематики движения, совершаемого их инерционными элементами, следует из законов динамики Эйлера, лежащих в основе механики моментных континуумов [1, 2]. Модели, инерционные элементы которых совершают перемещения, не меняя ориентацию в пространстве, называются трансляционными. Если единственным движением инерционных элементов системы, совместимым с наложенными на них связями, являются только повороты или вращения, то такие системы называются спинорными. В моделях или системах смешанного типа кинематика инерционных элементов очевидна.

Формально разделение механических систем по типу кинематики их инерционных элементов не имеет преимуществ по сравнению с разделением систем по количеству степеней свободы. Тем не менее в данной работе показано преимущество использования такого разделения, по крайней мере, при рассмотрении динамики цепочек, обусловленное физической интерпретацией свойств решений систем дифференциальных уравнений, описывающих поведение цепочечных моделей.

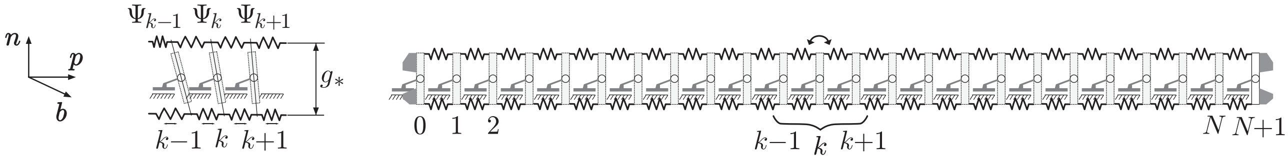

Рис. 1. Спинорная модель одномерного гармонического кристалла

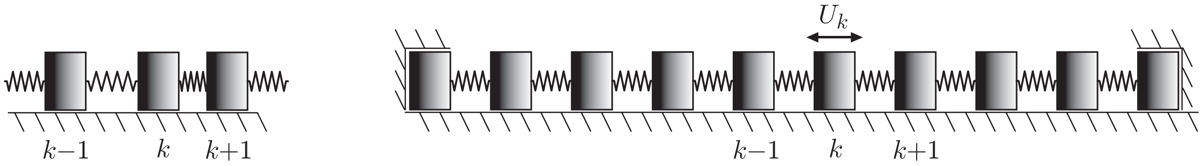

Рис. 2. Цепочка Ньютона — трансляционная каноническая модель одномерного гармонического кристалла

Типичный сегмент спинорной (по типу движения отдельного инерционного элемента) модели одномерного гармонического кристалла состоит из трех одинаковых инерционных элементов, связанных двумя одинаковыми системами безынерционных упругих элементов (рис. 1). Соседние тела в цепочке идентичны. Каждое тело может вращаться вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости рисунка и оси цепочки. Направление оси вращения совпадает с направлением главной центральной оси инерции твердого тела. Каждая пара тел соединена двумя одинаковыми безынерционными пружинами, концы которых закреплены в этих телах на расстоянии $g_*/2$ от оси вращения, параллельной орту $\boldsymbol{b}$. Каждая пружина упругой связи имеет единственный параметр упругости — жесткость на растяжение η. В точках контакта с инерционным элементом пружина не передает и не воспринимает моментных воздействий. Система уравнений движения инерционных элементов такой цепочки, состоящей из N твердых тел, имеет вид

$$J_k^b \ddot{\Psi}_k^b = \frac{\eta g_*^2}{2}(\Psi_{k-1}^b - 2\Psi_k^b + \Psi_{k+1}^b), \quad k = 1, \ldots, N, \qquad \Psi_0^b = \Psi_{N+1}^b = 0. \tag{1}$$

Здесь Ψ_k^b — малый угол поворота твердого тела вокруг оси неподвижного цилиндрического шарнира; J_k^b — момент инерции отдельного инерционного элемента относительно его главной центральной оси, параллельной орту $\boldsymbol{b}$. Для спинорной модели одномерного гармонического кристалла справедливы все формальные результаты, полученные к настоящему времени в теоретической физике [3–5] при рассмотрении канонической цепочечной модели типа цепочки Ньютона (рис. 2). Это обусловлено тем, что математические модели обеих цепочек с точностью до обозначений совпадают.

Фильтрующие свойства канонических механических цепочек. Как известно, однородные цепочечные системы (см. рис. 1, 2) являются фильтрами высокочастотных механических сигналов. Они пропускают только так называемые низкочастотные зондирующие сигналы, источники которых воздействуют либо на крайние, либо на внутренние инерционные элементы таких цепочек [4, 5].

Способность однородных цепочечных структур (см. рис. 1, 2) фильтровать высокочастотные воздействия играет важную роль при интерпретации результатов физических экспериментов с реальными кристаллическими телами с использованием подходов классической механики.

Особенности неканонических механических цепочечных систем. Теоретический анализ динамики механических систем позволяет описать нетривиальное с позиций классической неквантовой механики динамическое поведение кристаллических структур.

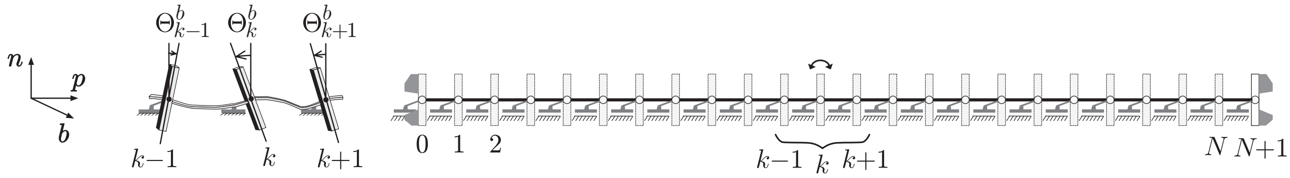

Рис. 3. Твердотельная цепочка с сосредоточенными параметрами, обладающая нетипичными динамическими свойствами

В частности, в работе [6] рассмотрены весьма нетипичные свойства твердотельных цепочек. Низкочастотная динамика твердотельной цепочечной структуры с безынерционными упругими моментными связями балочного типа (рис. 3) не может моделироваться поведением однородного одномерного континуума. Динамические свойства многоэлементной регулярной структуры с дискретными параметрами (см. рис. 3) определяются тем, что формы ее собственных колебаний, соответствующие низшим собственным частотам колебаний, являются многоузловыми, а форма собственных колебаний, соответствующая высшей собственной частоте колебаний такой дискретной структуры, — знакопостоянной. Следует отметить, что в работе [6] объяснены физические причины этого явления, не описанного в рамках современной теории линейных колебаний систем с дискретными параметрами.

Свойства спинорных механических моделей со связями пружинного типа. Выявить причины наличия нетривиальных свойств у спинорных цепочечных механических моделей позволяет сравнение уравнений движения отдельно взятого трехэлементного сегмента спинорной модели одномерного кристалла и аналогичного сегмента цепочки с безынерционными упругими моментными связями балочного типа (рис. 4). Уравнения движения изолированного от цепочки трехэлементного сегмента спинорной модели одномерного кристалла (см. рис. 4,*а*) имеют вид

$$J^b_1 \ddot{\Psi}^b_1 = -\frac{\eta g^2_*}{2}\,(\Psi^b_1 - \Psi^b_2), \quad J^b_2 \ddot{\Psi}^b_2 = \frac{\eta g^2_*}{2}\,(\Psi^b_1 - 2\Psi^b_2 + \Psi^b_3), \quad J^b_3 \ddot{\Psi}^b_3 = \frac{\eta g^2_*}{2}\,(\Psi^b_2 - \Psi^b_3). \qquad (2)$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что система (2) допускает частное решение вида

$$\Psi^b_1 = \Psi^b_2 = \Psi^b_3 = \alpha + \beta t, \qquad \alpha = \mathrm{const}, \qquad \beta = \mathrm{const}\,. \qquad (3)$$

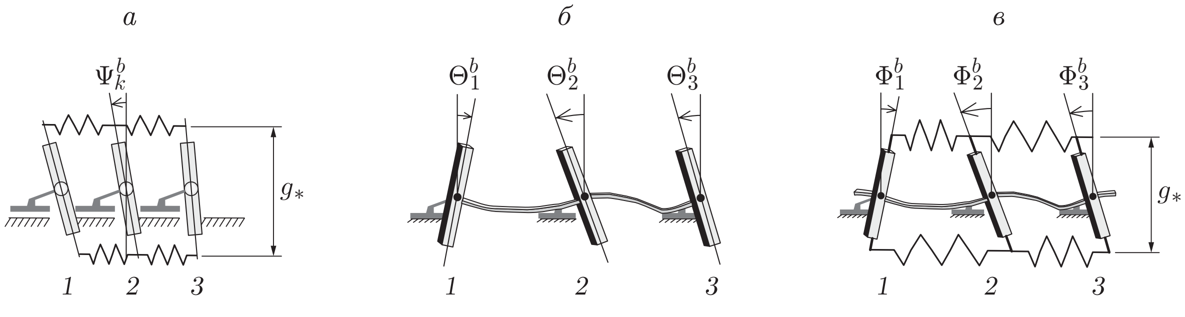

Рис. 4. Типичные сегменты (подсистемы) спинорных вариантов твердотельных цепочек:

а — сегмент спинорной канонической модели гармонического кристалла, *б* — сегмент цепочки с безынерционными упругими связями балочного типа, *в* — сегмент цепочки с безынерционными упругими связями комбинированного типа; *1*–*3* — номера элементов

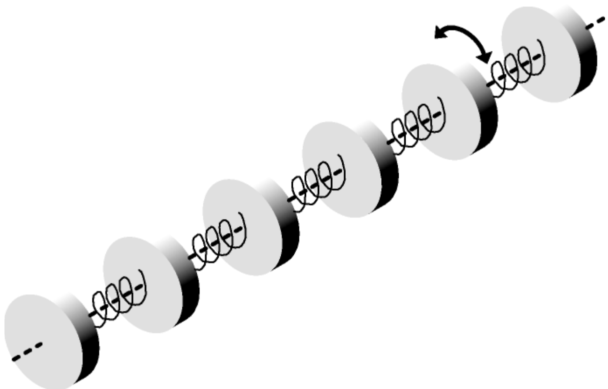

Рис. 5. Спинорный вариант цепочки Ньютона — цепочка насаженных на одну ось и связанных безынерционными упругими элементами одинаковых дисков, каждый из которых вращается вокруг общей оси

Для отдельно взятого сегмента трансляционной модели одномерного гармонического кристалла (см. рис. 2) как для самостоятельной системы существование частного решения вида (3) обычно интерпретируется как возможность ее трансляционного движения как жесткого целого в физическом пространстве. Для спинорной модели одномерного гармонического кристалла (см. рис. 1) такая интерпретация не верна.

Следует отметить, что изолированный трехэлементный сегмент спинорной модели, представленной на рис. 5, обладает способностью двигаться как абсолютно твердое тело. Возможность вращения дисков с одинаковой угловой скоростью (спинорное движение абсолютно твердого тела) в спинорной цепочке (см. рис. 5) очевидна. Таким образом, несмотря на то что системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение обеих спинорных физических моделей одинаковы (см. рис. 1, 5), физическая интерпретация движения этих систем различна. Это позволяет рассматривать цепочку, приведенную на рис. 1, как альтернативный вариант модели одномерного гармонического кристалла по отношению к трансляционной (см. рис. 2) и спинорной (см. рис. 5) цепочкам. Так, применительно к спинорной модели (см. рис. 1) наличие частного решения вида (3) означает, что при одинаковых углах поворота твердых тел связующие элементы данной цепочки не накапливают упругую энергию.

Свойства спинорных механических моделей со связями балочного типа. Твердые тела спинорной цепочки (см. рис. 3) имеют одну степень свободы. Однако в отличие от тел в цепочке с пружинными связями (см. рис. 1) эти тела связаны безынерционной моментной связью балочного типа — нерастяжимыми балками Бернулли — Эйлера длиной l с изгибной жесткостью C. Вывод уравнения движения отдельного сегмента такой цепочки, состоящего из трех тел, вращение которых происходит вокруг их центров масс (см. рис. 4,*б*), содержится в работе [6]. Уравнения движения инерционных элементов системы трех тел, каждое из которых имеет одну спинорную степень свободы (см. рис. 4,*б*), записываются в виде

$$J_1^b\ddot{\Theta}_1^b = -\frac{4C}{l}\,\Theta_1^b - \frac{2C}{l}\,\Theta_2^b, \qquad J_2^b\ddot{\Theta}_2^b = -\frac{2C}{l}\,\Theta_1^b - \frac{8C}{l}\,\Theta_2^b - \frac{2C}{l}\,\Theta_3^b,$$
$$J_3^b\ddot{\Theta}_3^b = -\frac{2C}{l}\,\Theta_2^b - \frac{4C}{l}\,\Theta_3^b. \tag{4}$$

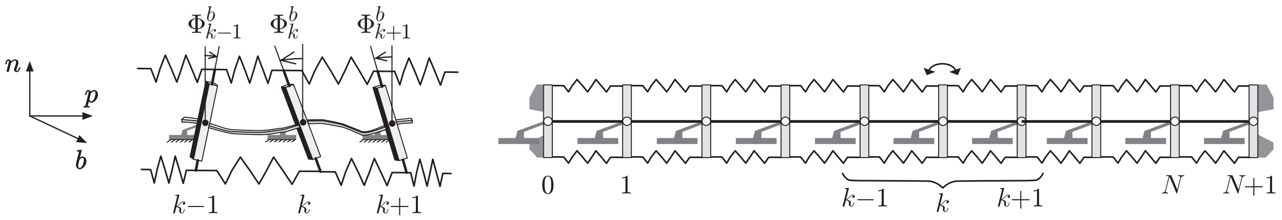

Рис. 6. Твердотельная цепочка с двухпараметрическими безынерционными упругими связями комбинированного пружинно-балочного типа

Подстановкой проверяется, что система (4) не имеет частного решения, обладающего свойством (3). Формальное различие систем уравнений (2) и (4) означает, что даже при одинаковых по величине и знаку углах поворота соседних твердых тел в случае безынерционной моментной связи между ними в сегменте цепочки (см. рис. 4,*б*) накапливается упругая энергия. Исключением является случай, когда два соседних тела одновременно оказываются в состоянии, соответствующем состоянию их равновесия в недеформированной системе. Система (2), в отличие от системы (4), является хорошо изученным вариантом системы обыкновенных дифференциальных уравнений с конечными разностями (1).

Цепочка с комбинированными связями как абсолютный механический фильтр. Нетривиальные следствия приведенного выше вывода следуют из динамических свойств системы, упругими связями которой являются как связи пружинного типа, так и связи балочного типа (см. рис. 4,*в*).

Характерный сегмент цепочки с комбинированными связями в недеформированном состоянии представлен на рис. 6.

Кинематика инерционных элементов сегментов, показанных на рис. 4, одинакова. Различаются лишь свойства элемента, обеспечивающего упругую связь между соседними телами. В случае цепочки с типичным сегментом, показанным на рис. 4,*в*, к двум безынерционным пружинам с жесткостью на растяжение η, закрепленным на расстоянии $g_*/2$ от оси вращения соответствующего твердого тела, добавлена безынерционная нерастяжимая балка Бернулли — Эйлера [7] длиной l, торцы которой неподвижно защемлены в соседних телах (см. рис. 6). Изгибную жесткость балки в плоскости рисунка обозначим C. Двумя независимыми параметрами комбинированной связи являются величины одинаковой размерности C и ηg_*^2.

Вывод уравнения малых углов поворота отдельного инерционного элемента для типичного трехэлементного сегмента цепочки (см. рис. 4,*в*) одновременно является выводом уравнений движения отдельного инерционного элемента для типичных трехэлементных сегментов цепочки, показанных на рис. 4,*а*,*б*. Повороты на малый угол инерционных элементов данной упругой системы с тремя степенями свободы в окрестности положения их равновесия описывает система трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
J_1^b\ddot{\Phi}_1^b = -\Big(\frac{\eta g_*^2}{2} + \frac{4C}{l}\Big)\Phi_1^b + \Big(\frac{\eta g_*^2}{2} - \frac{2C}{l}\Big)\Phi_2^b,\\
J_2^b\ddot{\Phi}_2^b = \Big(\frac{\eta g_*^2}{2} - \frac{2C}{l}\Big)\Phi_1^b - \Big(\eta g_*^2 + \frac{8C}{l}\Big)\Phi_2^b + \Big(\frac{\eta g_*^2}{2} - \frac{2C}{l}\Big)\Phi_3^b, \qquad (5)\\
J_3^b\ddot{\Phi}_3^b = \Big(\frac{\eta g_*^2}{2} - \frac{2C}{l}\Big)\Phi_2^b - \Big(\frac{\eta g_*^2}{2} + \frac{4C}{l}\Big)\Phi_3^b.
\end{gathered}
$$

Система (5), описывающая линейную динамику трех вращающихся инерционных тел, может быть обобщена на случай движения цепочки с N спинорными степенями свободы, показанной на рис. 6. Результатом такого обобщения является система уравнений

$$J_k^b \ddot{\Phi}_k^b = \left(\frac{\eta g_*^2}{2} - \frac{2C}{l}\right)\left(\Phi_{k-1}^b - 2\Phi_k^b + \Phi_{k+1}^b\right) - \frac{12C}{l}\,\Phi_k^b, \qquad k = 1, 2, \ldots, N,$$
$$\Phi_0^b = \Phi_{N+1}^b = 0. \tag{6}$$

Для значения геометрической величины $g_* = g_{**}$, удовлетворяющего равенству

$$\frac{\eta g_{**}^2}{2} = \frac{2C}{l}, \tag{7}$$

система дифференциальных уравнений (6) движения инерционных элементов цепочки, состоящей из N твердых тел, принимает вид

$$J_k^b \ddot{\Phi}_k^b = -\frac{12C}{l}\,\Phi_k^b, \qquad k = 1, 2, \ldots, N.$$

В этом случае с формальной точки зрения цепочка физически связанных N твердых тел (см. рис. 6) является механической системой, состоящей из N независимых гармонических осцилляторов.

Очевидно, что внешнее зондирующее механическое воздействие на любой инерционный элемент подобной структуры не влияет на динамическое поведение остальных твердотельных инерционных объектов. Поэтому при выполнении условия (7) линейную цепочку твердых тел (см. рис. 6) можно назвать абсолютным механическим фильтром.

Заключение. В теоретической физике цепочка связанных независимых осцилляторов известна достаточно давно. Так, А. Эйнштейн, объясняя причины уменьшения теплоемкости твердых тел вблизи абсолютного нуля, рассматривал твердое тело как совокупность N независимых частиц (гармонических осцилляторов), колеблющихся вблизи положений равновесия с одной и той же частотой [8]. В классической механике Ньютона модель Эйнштейна твердого тела рассматривается как гипотетическая. Это обусловлено принципиальной невозможностью реализации такой системы с помощью точечных инерционных элементов, обладающих исключительно трансляционными степенями свободы. Существенно больше возможностей имеет модель механики Эйлера [1, 2]. В этой модели в качестве точечного инерционного элемента используется объект, получивший название “тело-точка”. Главное его отличие от классической материальной точки — способность запасать кинетическую энергию движения исключительно за счет вращения в физическом пространстве. Термин “тело-точка” используется в механике относительно недавно. Собрать из “тел-точек” виртуальную цепочку Эйнштейна — задача тривиальная. Это позволяет более полно исследовать динамические свойства объектов микромира, в частности тех, которые в рамках современной теоретической физики описать невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Трусделл К.** Первоначальный курс механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
2. **Жилин П. А.** Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. политехн. ун-та, 2003.
3. **Мандельштам Л. И.** Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
4. **Борн М.** Динамическая теория кристаллических решеток / М. Борн, Х. Кунь. М.: Изд-во иностр. лит., 1972.
5. **Бриллюэн Л.** Распространение волн в периодических структурах / Л. Бриллюэн, М. Пароди. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

6. **Индейцев Д. А., Сергеев А. Д.** Корреляция между свойствами частот и форм свободных колебаний твердотельной цепочки с моментными связями // Вестн. С.-Петерб. гос. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4, вып. 2. С. 281–289. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.212.
7. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959.
8. **Марадудин А.** Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении / А. Марадудин, Э. Монтрол, Дж. Вейсс. М.: Мир, 1965.

Поступила в редакцию 1/II 2018 г.,
в окончательном варианте — 26/III 2018 г.