

УДК 532.526

Расчет нормального вдува струи водорода в сверхзвуковом потоке воздуха

П. Бруель¹, А.Ж. Найманова²

¹*Национальный центр научных исследований, По, Франция*

²*Институт математики Министерства образования и науки РК,
Алматы, Казахстан,*

E-mail: Pascal.Brueel@univ-pau.fr

E-mail: ked@math.kz

Численно исследовано взаимодействие плоского сверхзвукового потока воздуха со струей водорода, вдуваемого перпендикулярно через щель со стенок канала. Построен алгоритм решения осредненных по Фавру уравнений Навье–Стокса для течения термически совершенного многокомпонентного газа на основе ENO-схемы. Показано влияние числа Маха струй и отношений давления струй и потока на ударно-волновую структуру течения и глубину проникновения струи.

Ключевые слова: многокомпонентный газ, ENO-схема, уравнения Навье–Стокса, ударная волна.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на достигнутые значительные успехи в математическом моделировании перпендикулярного вдува струи в сверхзвуковой поток, трудности численного решения не позволяют в полном объеме изучать структуру взаимодействия струи с поперечным потоком для многокомпонентных газов в зависимости от основных параметров (геометрических параметров выбранной схемы вдува, чисел Маха струи и основного потока, отношения удельных теплоемкостей, отношения давлений вдуваемого газа и основного потока).

Трудность численного моделирования взаимодействия поперечной струи со сверхзвуковым турбулентным потоком обусловлена тем, что использование схем выше первого порядка вызывают осцилляции в решениях, разрывы в рассчитываемых функциях.

При решении искомой проблемы определенные успехи достигнуты с введением в разностные уравнения дополнительных диссипативных слагаемых, видоизменяющих разностные операторы в окрестности разрыва [1–2]. Так, например, в [1] предложен метод расчета сверхзвуковых течений на основе введения искусственной вязкости с производной четвертого порядка для подавления осцилляций вблизи сильных ударных волн. Это позволило авторам при решении задачи перпендикулярного вдува струи водорода в сверхзвуковой поток воздуха получить представление о характере смешения компонентов в области, примыкающей к струе.

Численный метод для расчета не только процессов смешения, но и протекания химических реакций в канале ПВРД (прямоточного воздушно-реактивного двигателя) предложен в работе [2]. Здесь также вводятся искусственные диссипативные члены для подавления осцилляций численного решения, характерные для схем с центральными разностями. Аппроксимация двумерной системы уравнений Навье–Стокса осуществляется по неявной схеме методом конечных объемов с использованием метода симметричной последовательной верхней релаксации. С помощью предложенных методов рассмотрены тестовые задачи, в частности задача поперечного вдува звуковой струи гелия в сверхзвуковой воздушный поток. Надежность результатов предлагаемых методов подтверждается сравнениями с экспериментами.

Значительный успех в преодолении проблемы, связанной с разрывными решениями, достигался с применением схемы MUSCL в комбинации с k - ϵ моделью турбулентности [3] при решении задачи сверхзвукового течения одноатомного газа с перпендикулярным вдувом струй.

В настоящее время для решения такого рода задач широко применяются квази-монотонные консервативные схемы повышенного порядка аппроксимации без введения искусственных диссипативных членов, такие как TVD (Total Variation Diminishing Schemes) схемы [4]. Основной недостаток такого подхода состоит в том, что в окрестности разрыва решения порядок точности понижается до первого. Это обстоятельство приводит к тому, что скачки уплотнения, возникающие в течении, могут быть сильно размазаны. Схемы ENO (Essentially Nonoscillatory Schemes), свободные от вышеуказанных недостатков, изложены в ряде работ [5–8]. В работе [8] авторы развили ENO схему на основе идеи метода Годунова и показали применимость этой схемы к решению задачи сверхзвукового течения многоатомного газа в плоском канале с вдувом перпендикулярных струй. Задача течения многоатомного газа решается в предположении постоянства показателя адиабаты газовой смеси при вычислении производных от давления по независимым переменным.

В настоящей работе численно моделируется плоское сверхзвуковое турбулентное течение многокомпонентной газовой смеси с вдувом поперечной струи со стенок канала. Разработанная авторами в работе [8] численная методика применяется для решения поставленной задачи. Дополнительно вводится эффективный показатель адиабаты газовой смеси, который позволяет вычислить производные от давления по независимым переменным, и тем самым построить эффективный неявный алгоритм решения. Изучено влияние числа Маха струи и отношений давления струи и потока на ударно-волновую структуру течения и глубину проникновения струи. Выбор диапазона рассматриваемых параметров определяется имеющимися экспериментальными данными процессов горения водорода в рассматриваемом диапазоне режимных параметров, что позволит в будущем производить сравнение с опытными данными других авторов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим перпендикулярный вдув звуковой (сверхзвуковой) струи водорода в плоский воздушный сверхзвуковой турбулентный поток. Для удобства вычисления предположим, что вдув происходит только с нижней стенки (рис. 1).

Исходными уравнениями для рассматриваемой задачи является система двумерных осредненных по Фавру уравнений Навье–Стокса для многокомпонентных газов [9]:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\bar{U} &= (\rho, \rho u, \rho w, E_t, \rho Y_k)^T, \\ \bar{E} &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uw, (E_t + p)u, \rho u Y_k)^T, \\ \bar{F} &= (\rho w, \rho uw, \rho w^2 + p, (E_t + p)w, \rho w Y_k)^T, \\ \bar{E}_v &= (0, \tau_{xx}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + w\tau_{xz} - q_x, J_{kx})^T, \quad \bar{F}_v = (0, \tau_{xz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{kz}), \\ p &= \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W}, \quad W = \left(\sum_{k=1}^{N_p} \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}, \quad \sum_{k=1}^{N_p} Y_k = 1,\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}E_t &= \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} h - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2), \quad h = \sum_{k=1}^{N_p} Y_k h_k, \quad h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT, \\ c_{pk} &= C_{pk} / W_k,\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left(2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_x) \right), \quad \tau_{zz} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left(2w_z - \frac{2}{3}(u_x + w_x) \right), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \frac{\mu}{\text{Re}} (u_z + w_x),\end{aligned}$$

$$q_x = \left(\frac{\mu}{\text{Pr Re}} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{xk}, \quad q_z = \left(\frac{\mu}{\text{Pr Re}} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{zk}.$$

$$J_{kx} = -\frac{\mu}{Sc \text{ Re}} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, \quad J_{kz} = -\frac{\mu}{Sc \text{ Re}} \frac{\partial Y_k}{\partial z}.$$

Система (1) записана в безразмерном виде в общепринятых обозначениях, в качестве определяющих приняты параметры потока $(u_\infty, \rho_\infty, T_\infty)$, давление (p) и полная энергия (E_t) отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, удельная энтальпия (h_k) — к $R^0 T_\infty / W_\infty$, молярные удельные теплоемкости (C_{pk}) — к R_0 , характерным параметром длины является ширина щели. Величина Y_k — массовая концентрация k -й компоненты, индекс массовой концентрации $k = 1$ соответствует O_2 , $k = 2$ — H_2 , $k = 3$ — N_2 ; $N_p = 3$ — число компонентов смеси газов. В искомый вектор системы (1) входят массовые концентрации O_2 и H_2 , W_k — молекулярный вес k -й компоненты,

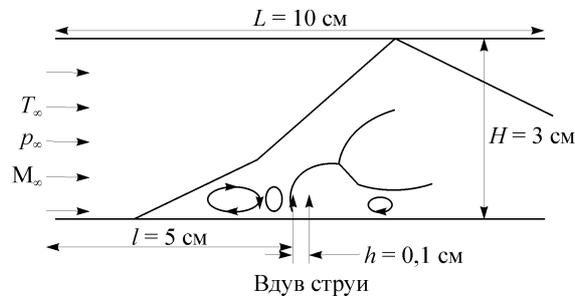


Рис. 1. Схема течения.

Re, Pr, Sc — числа Рейнольдса, Прандтля и Шмидта, $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ — тензоры вязких напряжений, q_x, q_z, J_{xk}, J_{zk} — тепловые и диффузионные потоки (диффузионные потоки вычисляются по закону Фика), $\mu = \mu_l + \mu_t$ — коэффициенты ламинарной и турбулентной вязкости. Для определения μ_t используется модель Болдуина–Ломакса. Молярные удельные теплоемкости C_{pk} — полиномы четвертой степени относительно температуры, значения эмпирических констант взяты из таблицы JANAF [10].

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

На входе: $p = p_\infty, T = T_\infty, u = M_\infty \sqrt{\frac{\gamma_\infty R_0 T_\infty}{W_\infty}}, w = 0, Y_k = Y_{k\infty}, x = 0,$

$0 \leq z \leq H$, во входном сечении вблизи стенки задается пограничный слой, при этом скорость и температура аппроксимируются степенным законом;

на щели: $p = n p_\infty, T = T_0, w = M_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 R_0 T_0}{W_0}}, u = 0, Y_k = Y_{k0}, z = 0,$

$L_b \leq x \leq L_b + h$, ($n = p_0/p_\infty$ — степень нерасчетности, p_0, p_∞ — давление в струе и в потоке, M_0, M_∞ — число Маха струи и потока, индексу массовой концентрации k соответствует $1 \rightarrow O_2, 2 \rightarrow H_2, 3 \rightarrow N_2, N_p = 3, 0, \infty$ — относится к параметрам струи и потока), на нижней стенке задается условие прилипания и теплоизоляции, на верхней границе — условие симметрии, на выходной границе задаются условия неотражения [11].

МЕТОД РЕШЕНИЯ

В областях больших градиентов, т. е. в пограничном слое, вблизи стенки и на уровне щели, вводится сгущение сетки. Тогда система уравнений (1) в преобразованной системе координат запишется в виде

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta}, \quad (4)$$

где $\tilde{U} = \vec{U}/J, \tilde{E} = \xi_x \vec{E}/J, \tilde{F} = \zeta \vec{F}/J, \tilde{E}_{v2} = \xi_x \vec{E}_{v2}/J, \tilde{E}_{vm} = \xi_x \vec{E}_{vm}/J, \tilde{F}_{vm} = \eta_z \vec{F}_{vm}/J, \tilde{F}_{vm} = \eta_z \vec{F}_{vm}/J, J = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, z)$ — Якобиан преобразования.

Параметры преобразования координат следующие:

$$\xi(x) = K + \frac{1}{\tau} \operatorname{arsh} \left[\left(\frac{x}{x_n} - 1 \right) \operatorname{sh}(\tau K) \right],$$

$$\eta(z) = H \left[(\beta + 1) - (\beta - 1) \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1 - \frac{z}{a}} \right] / \left[\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1 - \frac{z}{a}} + 1 \right],$$

$K = \frac{1}{2\tau} \ln \left[\left(1 + (e^\tau - 1) \frac{x_c}{L} \right) / \left(1 - (e^\tau - 1) \frac{x_c}{L} \right) \right], \beta, \tau$ — коэффициенты сгущения,

$\beta, \tau > 1, a$ — высота расчетной области в новой системе координат, x_c — точка, относительно которой производится сгущение.

В соответствии с принципом построения ENO-схемы, в котором аппроксимация конвективных слагаемых производится с третьим порядком точности, одношаговая конечно-разностная схема для интегрирования по времени системы (4) формально представляется

$$\Delta \tilde{U}^{n+1} + \Delta t \left[(\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial \bar{E}^m}{\partial \xi} + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial \bar{F}^m}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial (\bar{E}_{v2}^{n+1} + \bar{E}_{vm}^n)}{\partial \xi} - \frac{\partial (\bar{F}_{v2}^{n+1} + \bar{F}_{vm}^n)}{\partial \eta} \right] \right] = O(1/2 \Delta t^2), \quad (5)$$

здесь \bar{E}^m , \bar{F}^m — модифицированные потоки на узловых точках (i, j) , состоящих из исходных конвективных векторов (\bar{E}^m, \bar{F}^m) и добавочных членов высокого порядка точности $(\bar{E}_\xi, \bar{D}_\xi, \bar{E}_\eta, \bar{D}_\eta)$,

$$\bar{E}^m = \begin{cases} \tilde{E}^{n+1} & \text{для неявной без добавочных членов} \quad (a), \\ \tilde{E}^{n+1} + (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)^n & \text{для неявной ENO схемы} \quad (b), \\ \tilde{E}^n + (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)^n & \text{для явной ENO схемы} \quad (c). \end{cases}$$

Выражение для потока \bar{F}^m записывается аналогичным образом и $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$, $\hat{A}^\pm = A^\pm A^{-1}$, $\hat{B}^\pm = B^\pm B^{-1}$, I — единичные матрицы, $A = \partial \bar{E} / \partial \tilde{U}$, $B = \partial \bar{F} / \partial \tilde{U}$ — матрицы Якоби.

Запишем неявный алгоритм решения уравнения (5). Для этого члены, содержащие вторые производные, представляются в виде суммы двух векторов: векторов вторых производных и векторов диссипативных членов, а векторы потоков со смешанными производными аппроксимируются явным образом со вторым порядком точности [12]. Линеаризация конвективных слагаемых осуществляется с использованием свойств однородности.

После применения факторизации к системе (5) имеем два одномерных оператора:

$$\begin{aligned} 1 \text{ шаг: } & \left[I + \Delta t \left\{ (\hat{A}_{i-1/2}^+ \Delta_- A_\xi^n + \hat{A}_{i+1/2}^- \Delta_+ A_\xi^n) + \Delta \frac{\mu_i \xi_x^2}{\text{Re } J} \Delta \frac{1}{U_1^n} \right\} \right] U^* = RHS_\xi^n + RHS_\eta^n, \\ 2 \text{ шаг: } & \left[I + \Delta t \left\{ (\hat{B}_{j-1/2}^+ \Delta_- B_\eta^n + \hat{B}_{j+1/2}^- \Delta_+ B_\eta^n) + \Delta \frac{\mu_i \eta_z^2}{\text{Re } J} \Delta \frac{1}{U_1^n} \right\} \right] \tilde{U}^{n+1} = U^*, \end{aligned} \quad (7)$$

$$RHS_\xi^n = \hat{A}_{i+1/2}^- \left[(\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i+1j} - (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij} \right]^n + \hat{A}_{i-1/2}^+ \left[(\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij} - (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i-1j} \right]^n,$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{i+1/2}^- &= \left[(\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij} \right]^n = (\mathbf{minmod}(\bar{E}_\xi_{i+1/2j}, \bar{E}_\xi_{i-1/2j})) + \\ &+ \begin{cases} \dot{m}(\Delta_- \hat{D}_{\xi i+1/2j}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i+1/2j}) & \text{если } |\Delta_- \tilde{U}_{ij}| > |\Delta_+ \tilde{U}_{ij}|, \\ \dot{m}(\Delta_- \bar{D}_{\xi i-1/2j}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i-1/2j}) & \text{если } |\Delta_- \tilde{U}_{ij}| \leq |\Delta_+ \tilde{U}_{ij}| \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{i-1/2}^+ & \left[(\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij} \right]^n = R \hat{A}_{i-1/2j}^- R^{-1} \left[(\mathbf{minmod}(\bar{E}_\xi_{i+1/2j}, \bar{E}_\xi_{i-1/2j})) - \right. \\ & \left. - \begin{cases} \dot{m}(\Delta_- \hat{D}_{\xi i-1/2j}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i-1/2j}) & \text{если } |\Delta_- \tilde{U}_{ij}| \leq |\Delta_+ \tilde{U}_{ij}| \\ \dot{m}(\Delta_- \bar{D}_{\xi i-1/2j}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i-1/2j}) & \text{если } |\Delta_- \tilde{U}_{ij}| > |\Delta_+ \tilde{U}_{ij}| \end{cases} \right] \end{aligned}$$

$$\bar{E}_{\xi_{i\pm 1/2j}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i\pm 1/2j} \frac{1}{2} \left[I - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R |\Lambda| R^{-1})_{i\pm 1/2} \right] \Delta_{\pm} \tilde{E}_{ij},$$

$$\bar{D}_{\xi_{i\pm 1/2j}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i\pm 1/2j} \frac{1}{6} \left[\frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{\pm}^2 - I \right] \Delta_{\pm} \tilde{E}_{ij},$$

$$\hat{D}_{\xi_{i\pm 1/2j}} = \bar{E}_{\xi_{i\pm 1/2j}} + \bar{D}_{\xi_{i\pm 1/2j}},$$

$$\text{где } \mathbf{minmod}(a, b) = \begin{cases} s \times \min(|a|, |b|), & \text{если } \operatorname{sign}(a) = \operatorname{sign}(b) = s \\ 0 & , \text{ иначе} \end{cases},$$

$$\hat{m}(a, b) = \begin{cases} a & \text{если } |a| \leq |b| \\ b & \text{если } |a| > |b| \end{cases}.$$

Второе слагаемое RHS_{η}^n записывается аналогичным образом. Для аппроксимации первых производных в системе (7) использованы разности против потока с первым порядком точности, а для вторых производных — центральные разности со вторым порядком точности.

Система уравнений (7) решается относительно вектора термодинамических параметров матричной прогонкой и вектора массовых концентраций смеси скалярной прогонкой.

Как следует из (7), необходимо определить матрицы левых и правых собственных векторов R, R^{-1} — матриц Якоби, вычисление которых в случае термически совершенного газа сопряжено с трудностями, связанными с определением давления явным образом через искомые переменные. Один из путей преодоления этих трудностей приведен в [2]. Аналогично этой работе вводится эффективный показатель адиабаты газовой смеси

$$\bar{\gamma} = \frac{h_{sm}}{e_{sm}}, \quad (8)$$

где $h_{sm} = \sum_{i=1}^{N_p} Y_i \int_{T^0}^T c_{p_i} dT$, $e_{sm} = \sum_{i=1}^{N_p} Y_i \int_{T^0}^T c_{v_i} dT$ — энтальпия и внутренняя энергия смеси

за вычетом теплоты и энергии образования, $T^0 = 293$ К — стандартная температура образования, которая позволяет записать выражение для давления

$$p = (\bar{\gamma} - 1) \left[E_t - \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) - \rho \frac{h^0}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} \right] + \frac{\rho T^0}{M_{\infty}^2 W}. \quad (9)$$

Из первого уравнения (3) следует, что температура удовлетворяет следующему уравнению:

$$f(T) = E_t - \frac{\rho}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2 W} (\tilde{H}(T) - PT) - \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) = 0, \quad (10)$$

где $\tilde{H}(T)$ — молярная энтальпия смеси газов.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ АНАЛИЗ

Расчет производился на разнесенной сетке по пространственным координатам с параметрами $2 \leq M_{\infty} \leq 6$, $2 \leq n \leq 15$, $Re = 10^4$, $Pr = 0,7$, $T_0 = 442$ К, $T_{\infty} = 800$ К. Температура определяется из (10) итерационно методом Ньютона–Рафсона. На рис. 2–3 $n = 5$, $M_0 = 1$, $M_{\infty} = 3,75$ представлены результаты расчета истечения

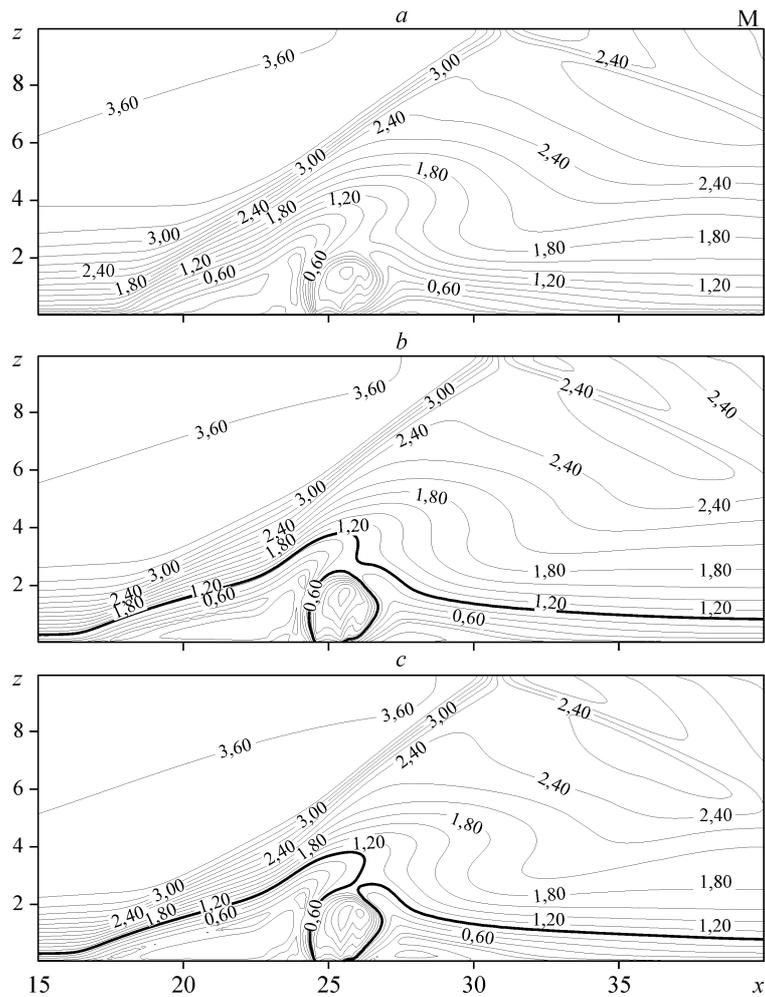


Рис. 2. Изолинии местного числа Маха: а) неявная ENO-схема, б) схема с направленными разностями, в) явная ENO-схема.

звуковой струи водорода ($Y_2 = 1$) перпендикулярно плоскости течения потока воздуха ($Y_1 = 0,2, Y_3 = 0,8$). В таблице приведена чувствительность сходимости

решений к характеристикам сетки путем оценки суммарных $L_1^\rho = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\varepsilon_M^n - \varepsilon_{\hat{M}}^n|$ и

среднеквадратических $L_2^\rho = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N |\varepsilon_M^n - \varepsilon_{\hat{M}}^n|^2}$ отклонений норм невязок плотностей газов. Здесь $\varepsilon_{\hat{M}}^n = \max_{(i,j) \in \hat{M}} |\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n|$, N — число итераций. Аналогичным образом определяются суммарное L_1^δ и среднеквадратическое L_2^δ отклонения норм невязок давлений $\delta = p/p_\infty$ на стенке.

Оценки были построены путем последовательности измельчения сеток, при этом в качестве начальной принималась сетка M с $I \times J$ узлами, затем осуществлялась вариация M и J узлов сетки \hat{M} .

Таблица

Зависимость суммарного и среднеквадратичного отклонения (разностей плотности и давления на стенке) от числа узлов

| Число узлов | | L_1^p | L_1^δ | L_2^p | L_2^δ |
|-------------------------|--------------------------------------|--|---|--|--|
| $M = M \times L$ | $\tilde{M} = M \times L$ | | | | |
| $I = 221,$ $J = 161$ | $M = I, L = 121$ $M = I, L = 181$ | 0,1357 0,1348 | $3,106 \cdot 10^{-2}$ $1,98 \cdot 10^{-2}$ | 0,2920 0,3231 | $8,44 \cdot 10^{-2}$ $5,86 \cdot 10^{-2}$ |
| $I = 231,$ $J = 181$ | $M = 221, L = J$ $M = 241, L = J$ | $2,63 \cdot 10^{-2}$ $2,60 \cdot 10^{-2}$ | $5,78 \cdot 10^{-2}$ $3,402 \cdot 10^{-2}$ | $3,369 \cdot 10^{-2}$ $3,516 \cdot 10^{-2}$ | 0,22 $9,05 \cdot 10^{-2}$ |

Как следует из таблицы, разность отклонения величин уменьшается с измельчением сетки. В соответствии с этим, сетка \tilde{M} с узлами 241×181 , для которых различие с результатами, полученными для \tilde{M} 231×181 , оказалось минимальным, представляет хороший компромисс между точностью и требуемым условием устойчивости, и поэтому она была сохранена для всех последующих вычислений.

На рис. 2–3 представлены результаты расчетов с использованием всех трех типов схем для модифицированного потока (6). Линии изобар и изомах (см. рис. 2, линии местного числа Маха $M = \sqrt{u^2 + w^2} / c$, c — местная скорость звука, жирные линии $M = 1$) показывают, что общая картина ударно-волновой структуры во всех трех случаях схожа с течением одноатомного газа [8]. Перед струей наблюдаются головной, косой и замыкающий скачки уплотнения, которые, пересекаясь в одной

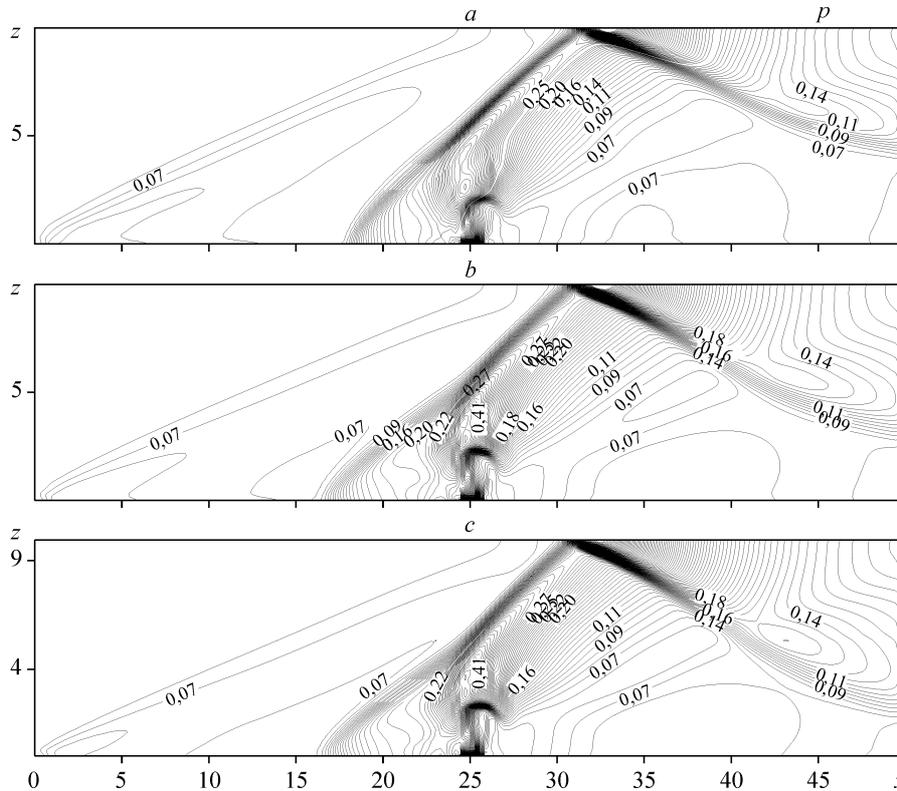
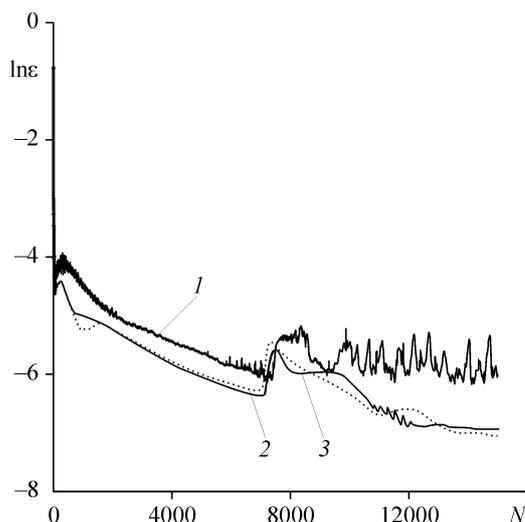


Рис. 3. Изобары: а) неявная ENO-схема, б) схема с направленными разностями, в) явная ENO-схема.

Рис. 4. Зависимость безразмерной нормы невязки для плотности газа от числа итерации: 1 — неявная ENO-схема, 2 — с направленными разностями, 3 — явная ENO-схема.



точке, образуют λ -образную систему скачков уплотнения. В дозвуковой зоне перед струей, т. е. в области отрыва, наблюдается небольшое расхождение результатов, полученных по явному и неявному методу. В этой зоне изомахи (см. рис. 2, *c*) явной ENO-схемы аналогичны изомахам, полученным с использованием односторонних разностей (см. рис. 2, *b*). Это также подтверждает динамика уменьшения безразмерной нормы невязки плотности газа (рис. 4) явного метода (линия 1), неявного, с направленными разностями с первым порядком (линия 2) и ENO-схемы (линия 3). Как следует из расчетов, максимальное отклонение среднеквадратичных величин для явной ENO-схемы и схемы с первым порядком составляет 0,122, тогда как между неявной ENO-схемой и односторонней его значение равно 0,644.

Ниже приведены результаты расчетов по неявной ENO-схеме. Влияние числа Маха струй на характер взаимодействия струй водорода с набегающим потоком

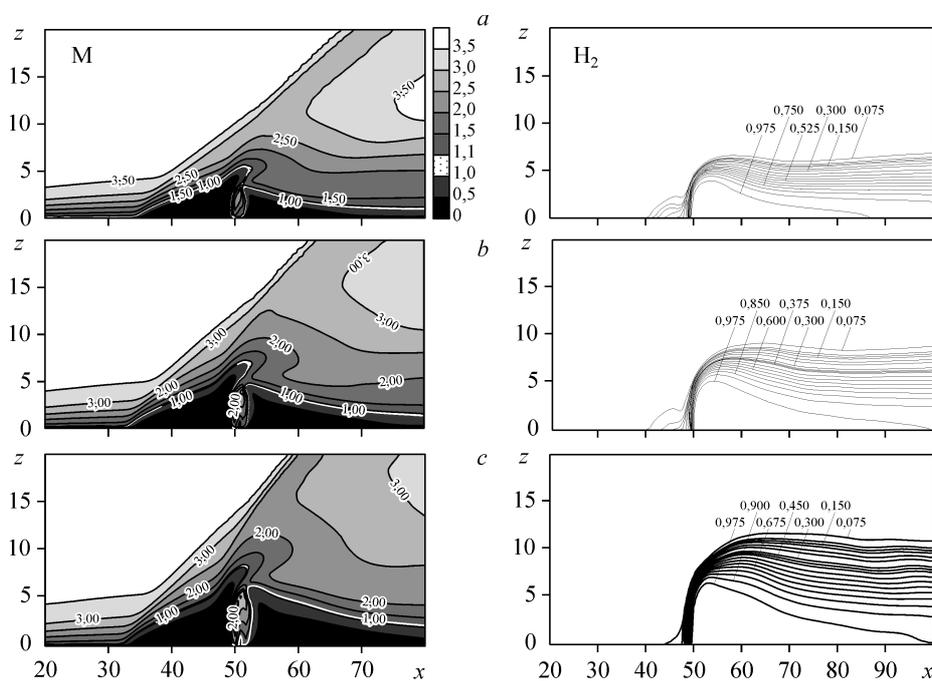


Рис. 5. Изолинии местного числа Маха (слева) и линии постоянных массовых концентраций водорода (справа).
 $M_0 = 1$ (a), 1,5 (b), 2 (c).

воздуха показано на рис. 5 ($n = 10,26$, $M_\infty = 3,75$, $M_0 = 1, 1,5, 2$), на котором представлена картина изомах (слева) и линий постоянных массовых концентраций водорода (справа) при различных M_0 . Из рисунка видно, что с ростом числа Маха струи высота препятствия (струи) увеличивается (см. рис. 5, *b, c*, слева), что приводит к увеличению глубины проникновения расширяющейся струи (см. рис. 5, *b, c*, справа). При этом водород выносится также в область отрыва перед щелью. Из расчетов следует, что длина перетекания уменьшается с увеличением числа Маха струи. Поскольку с ростом M_0 струя расширяется в зоне высоких скоростей набегающего потока, то скорость сноса струй увеличивается, что и служит препятствием для растекания водорода в зоне перед щелью. Однако область за щелью насыщается водородом больше с ростом M_0 , причем прослеживается, что область максимальных концентраций водорода сосредоточена в дозвуковой зоне (см. рис. 5, справа).

Из рис. 5 также видно, что вдув струи с большими значениями M_0 незначительно увеличивает длину вихревой зоны перед струей, что подтверждает и график распределения давления на стенке (рис. 6, $M_0 = 1$ (1), 1,5 (2), 2 (3)). Как следует из графика, увеличение давления происходит практически на одинаковом расстоянии от входной границы для всех чисел Маха струи ($x \approx 32$).

Численный анализ показывает, что аналогично течению однокомпонентного газа угол наклона скачков уплотнения для газовой смеси возрастает с увеличением отношения давления струи и потока. Область отрывной зоны также увеличивается перед струей. Расширение зоны отрыва приводит к росту давления на стенке перед щелью. Вышесказанное демонстрирует рис. 7, $n = 5$ (1), 10,26 (2), 15 (3) линии, на котором представлено распределение давлений на стенке, рассчитанных с различными значениями параметра нерасчетности. Линии постоянных массовых концентраций водорода показывают увеличение перетекания водорода в область возвратного течения, расположенного выше по потоку от щели (рис. 8, $M_0 = 1$, $n = 5$ (a), 10,26 (b), 15 (c)). Из рис. 8 (слева) видно, что максимальные концентрации водорода сосредоточены также за препятствием (струей).

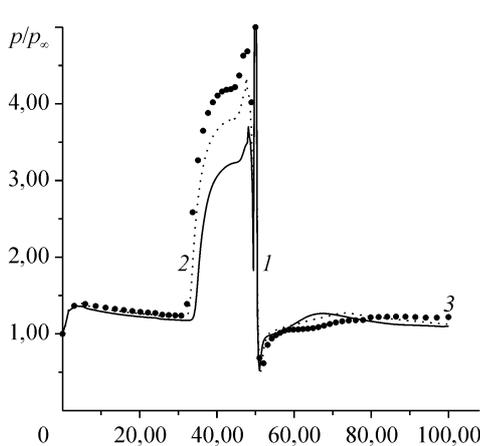


Рис. 6. Распределение давления на стенке.
 $M_0 = 1$ (1), 1,5 (2), 2 (3).

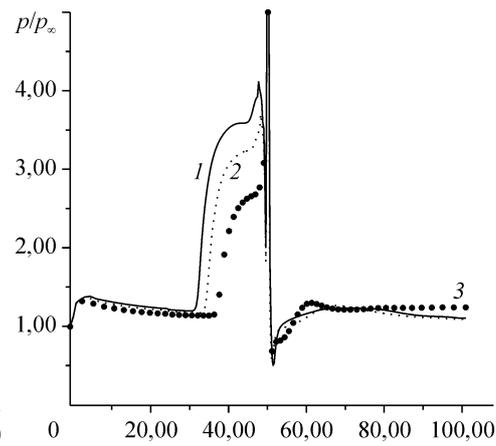


Рис. 7. Распределение давления на стенке.
 $n = 5$ (1), 10,26 (2), 15 (3).

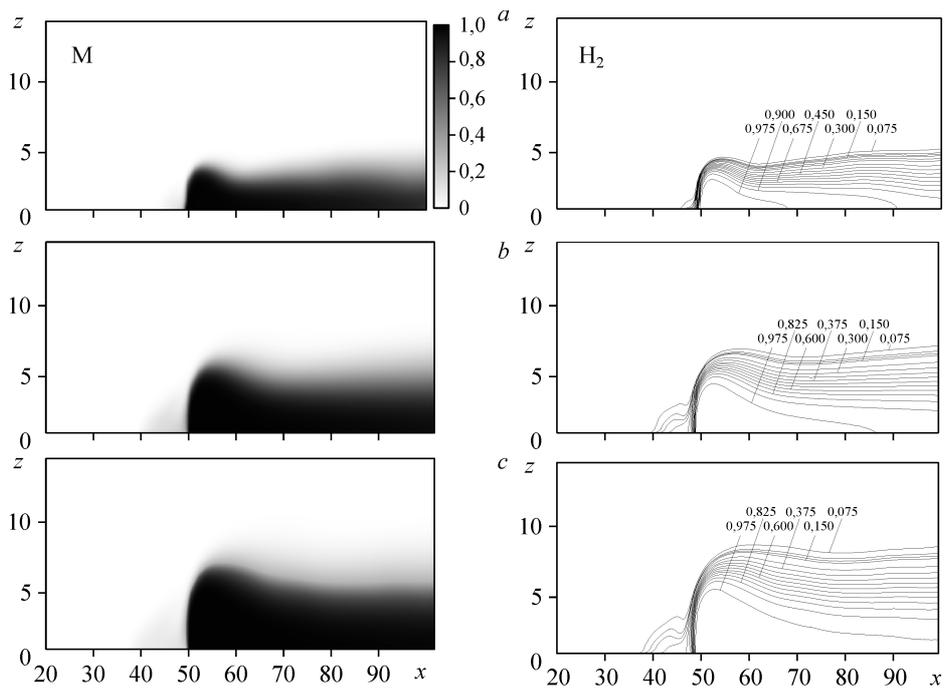


Рис. 8. Линии постоянных массовых концентраций водорода.
 $n = 5$ (1), 10,26 (2), 15 (3).

Таким образом, вынос вдуваемого газа в зону отрыва перед струей определяется как число Маха струи, так и параметром нерасчетности.

На рис. 9 показано давление на стенке с использованием постоянного значения эффективного показателя адиабаты газовой смеси $\bar{\gamma} = 1,4$ и показателя адиабаты, вычисленного по формуле (11). Следовательно, предположение о неизменности $\bar{\gamma}$ влияет на точность расчета термодинамических параметров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная численная модель для расчета турбулентных течений на основе ENO-схемы позволяет моделировать течение термически совершенного многокомпонентного газа и учитывать такие сложные физические явления, как возникновение скачков уплотнения и вихревых зон. Прослежены основные особенности течения при различных значениях числа Маха струи и параметра нерасчетности.

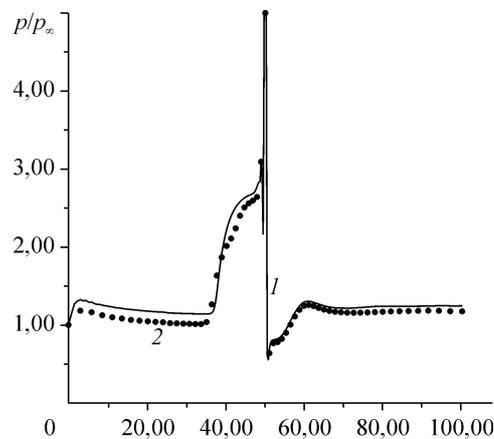


Рис. 9. Давление на стенке канала, расчет $\bar{\gamma}$ по формуле (10) (1), $\bar{\gamma} = 1,4$ (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Драммонд Дж. Ф.** Численный расчет вдува звуковой струи водорода перпендикулярного потоку воздуха в канале // Ракетная техника и космонавтика. 1979. Т. 17, № 5. С. 95–97.
2. **Шунь Дж. Ш., Юнь С.** Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU-факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // Аэрокосмическая техника. 1990. № 10. С. 102–113.
3. **Chenault F.C., Beran P.S.** k - ϵ and Reynolds stress turbulence model comparisons for two-dimensional injection flows // AIAA J. 1998. Vol. 36, No. 8. P. 1401–1412.
4. **Grasso F., Magi V.** Simulation of transverse gas injection in turbulent supersonic air flows // AIAA J. 1995. Vol. 33, No. 1. P. 56–62.
5. **Harten A., Osher S., Engquist B., Chakravarthy S.R.** Some results on uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes // Applied Num. Math. 1986. No. 2. P. 347–377.
6. **Ершов С.В.** Квазимонотонная ENO- схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье–Стокса // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 11. С. 63–75.
7. **Yang J.Y.** Third order nonoscillatory schemes for the euler equations // AIAA J. 1991. Vol. 29, No. 10. P. 1611–1618.
8. **Бекетаева А.О., Найманова А.Ж.** Применение ENO (Essentially nonoscillatory) схемы для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, № 4. С. 17–25.
9. **Williams F.A.** Combustion theory (second editor). The Benjamin Cummings Publishing Company, Inc, 1985. 680 p.
10. **Kee R.J., Rupley F.M., Miller J.A.** CHEMKIN-II: a FORTRAN chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics // SANDIA Report SAND89-8009, 1989.
11. **Poinsot T.J., Lele S.K.** Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows // J. of Comput. Phys. 1992. No. 101. P. 104–129.
12. **Бекетаева А.О., Найманова А.Ж.** Численное моделирование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45, № 3. С. 367–374.

Статья поступила в редакцию 6 июля 2009 г.