УДК 531

ВРАЩЕНИЕ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПОТОК ИНЕРЦИОННОЙ ЖИДКОСТИ

А. Д. Сергеев

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
E-mail: dievich@rambler.ru

Рассматривается стержневая система, для которой можно корректно поставить и решить задачу о трехмерных движениях в физическом пространстве участка упругого трубопровода, содержащего поток инерционной несжимаемой жидкости. Описывается не исследовавшееся ранее физическое явление — прецессия оси упругого трубопровода, вдоль которого протекает инерционная несжимаемая жидкость. С использованием методов динамики абсолютно твердого тела теоретически установлена возможность возникновения в открытой (обменивающейся массой со своим окружением) упругоинерционной стержневой системе трехмерного динамического процесса.

Ключевые слова: стержневая система, упругий трубопровод, моделирование движения открытой системы, динамика твердого тела.

Введение. В литературе представлены результаты теоретических исследований динамики деформируемых трубопроводов, полученные, как правило, при изучении двумерных моделей трубопроводных систем [1–4]. Стержневые элементы двумерных моделей таких систем в процессе рассматриваемого движения не покидают какой-либо заданной плоскости. Стационарные динамические режимы, соответствующие трехмерному движению в физическом пространстве стержневых элементов системы, несущей поток инерционной жидкости, в механике деформируемого твердого тела практически не исследованы.

Актуальность подобных исследований определяется адекватностью моделирования реальных условий работы нефтяных и газовых трубопроводов; также для практики большое значение имеет описание трехмерной динамики длинных гибких райзеров — устройств, используемых для доставки полезных ископаемых на поверхность при их добыче со дна морей и океанов. Востребованность подобного рода подходов очевидна и для теоретического анализа работы систем охлаждения ядерных реакторов.

Стержневая модель участка упругого трубопровода, допускающая трехмерные движения его составных частей. Прямолинейный участок трубопровода будем моделировать с помощью упругодеформируемой системы, показанной на рис. 1. Замены упругодеформируемых стержневых систем с распределенными параметрами на стержневые системы с дискретными параметрами такого типа эффективно используются при исследовании особенностей колебательных процессов в технических устройствах [5].

Рассмотрим деформируемую стержневую систему, состоящую из двух потокоформирующих полых прямолинейных стержней AB и BD, связанных безынерционным упругим сферическим шарниром B. Оба стержня будем считать тонкими недеформируемыми, имеющими круглое сечение с одинаковой площадью F. Ось потокоформирующего стержня

© Сергеев А. Д., 2012

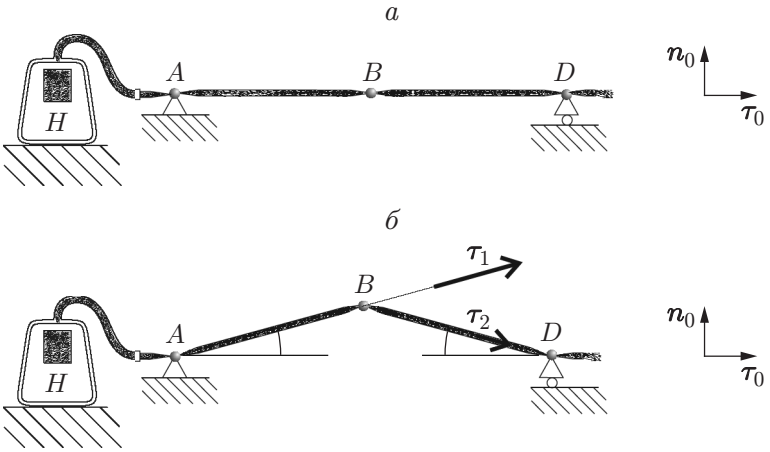

Рис. 1. Начальная (*а*) и деформированная (*б*) конфигурации открытой стержневой системы, вдоль которой течет поток инерционной жидкости

длиной l_1, соединяющего узлы A и B, совпадает с направлением подвижного орта $\boldsymbol{\tau}_1$. Концом A этот стержень опирается на неподвижный сферический шарнир A. В шарнире A на стержень действуют упругий момент $\boldsymbol{M}_A$ и опорная реакция $\boldsymbol{N}_A$. Упругий элемент в шарнире A с жесткостью μ_A препятствует отклонению оси потокоформирующего стержня от направления орта $\boldsymbol{\tau}_0$ (см. рис. 1). В шарнире B на стержень AB действуют упругий момент $\boldsymbol{M}_B$ и реакция связи $\boldsymbol{N}_B$. Упругий момент препятствует отклонению оси стержня AB от направления оси стержня BD. Жесткость упругого элемента в шарнире B равна μ_B. Потокоформирующий стержень, соединяющий узлы B и D, имеет длину l_2 и концом D опирается на подвижный сферический шарнир D. Шарнир D, находящийся на переменном расстоянии l_0 от шарнира A, может двигаться вдоль орта $\boldsymbol{\tau}_0$ (см. рис. 1). Ось стержня, соединяющего узлы B и D, направлена вдоль подвижного орта $\boldsymbol{\tau}_2$. В шарнире D на стержень BD действуют упругий момент $\boldsymbol{M}_D$, препятствующий отклонению оси стержня BD от направления орта $\boldsymbol{\tau}_0$, и опорная реакция $\boldsymbol{N}_D$, такая что $\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{N}_D = 0$. Жесткость упругого элемента в шарнире D равна μ_D.

Для упругих моментов $\boldsymbol{M}_A$, $\boldsymbol{M}_B$, $\boldsymbol{M}_D$ используем инвариантные определяющие соотношения, предполагающие малость отклонений всех стержневых элементов от прямолинейной конфигурации:

$$\boldsymbol{M}_A = -\mu_A \boldsymbol{\tau}_0 \times \boldsymbol{\tau}_1, \quad \boldsymbol{M}_B = \mu_B \boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2, \quad \boldsymbol{M}_D = \mu_D \boldsymbol{\tau}_2 \times \boldsymbol{\tau}_0.$$

В связанные стержни насос H подает несжимаемую инерционную жидкость с плотностью ρ. Подача жидкости в систему осуществляется через неподвижный сферический шарнир A в направлении $\boldsymbol{\tau}_0$, совпадающем с направлением прямой, проходящей через шарниры A и D. Будем полагать, что насос H обеспечивает в узле A постоянный расход жидкости q. В шарнире D жидкость покидает стержневую систему, вытекая из шарнира D в фиксированном направлении $\boldsymbol{\tau}_0$ (см. рис. 1). Площади отверстий в шарнирах, через которые жидкость попадает в каждый потокоформирующий стержень, будем считать одинаковыми и также равными F. Скорость протекания жидкости в узле A через отверстие в шарнире обозначим через v. Эта скорость связана с расходом жидкости в узле A соотношением $q = \rho F v$. При постоянных площади сечения внутреннего канала в стержнях и расходе скорость протекания несжимаемой жидкости вдоль стержней не меняется.

Кинематика элементов модели упругого трубопровода. Положение в пространстве вектора постоянной длины $\boldsymbol{r}_{AB} = l_1 \boldsymbol{\tau}_1$, совершающего сферическое движение, описы-

вается композицией двух поворотов вокруг осей фиксированного направления [6]:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{r}_{AB} = Q_{AB} \cdot [l_1 \boldsymbol{\tau}_1^0], \qquad \dot{Q}_{AB} = \boldsymbol{\Omega}_1 \times Q_{AB}, \\ Q_{AB} = Q_0(\psi_0 \boldsymbol{\tau}_0) \cdot Q_1(\varphi_1 \boldsymbol{e}), \qquad Q_0^{-1} = Q_0^{\mathrm{т}}, \qquad Q_1^{-1} = Q_1^{\mathrm{т}} \end{gathered} \tag{1}$$

(точка вверху означает производную по времени). В уравнениях (1) орт $\boldsymbol{\tau}_1^0$ соответствует начальному положению стержня, соединяющего узлы A и B. Тензор $Q_0(\psi_0 \boldsymbol{\tau}_0)$ описывает вращение вокруг орта $\boldsymbol{\tau}_0$:

$$\begin{gathered} Q_0(\psi_0 \boldsymbol{\tau}_0) = \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + (E - \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0) \cos \psi_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \times E \sin \psi_0, \qquad Q_0^{-1} = Q_0^{\mathrm{т}}, \\ \dot{Q}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0 \times Q_0, \quad \boldsymbol{\tau}_0 \cdot Q_0 = Q_0 \cdot \boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{\tau}_0, \quad \boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0 \boldsymbol{\tau}_0, \quad \Omega_0 = \dot{\psi}_0. \end{gathered} \tag{2}$$

В (2) E — единичный тензор, свойства которого, как и свойства тензорного произведения $\boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0$, определены, например, в [6]. Тензор $Q_1(\varphi_1 \boldsymbol{e})$ описывает вращение вокруг орта постоянного направления $\boldsymbol{e}$, ортогонального $\boldsymbol{\tau}_0$, и имеет аналогичную структуру:

$$\begin{gathered} Q_1(\varphi_1 \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} + (E - \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}) \cos \varphi_1 + \boldsymbol{e} \times E \sin \varphi_1, \qquad Q_1^{-1} = Q_1^{\mathrm{т}}, \\ \dot{Q}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times Q_1, \quad \boldsymbol{e} \cdot Q_1 = Q_1 \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{e} = 0, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\varphi}_1 \boldsymbol{e}. \end{gathered} \tag{3}$$

Поскольку положение оси стержня, соединяющего узлы B и D, однозначно определяется вектором $\boldsymbol{r}_{AB}$ и описанными выше условиями на торцах рассматриваемой стержневой системы, вектор постоянной длины $\boldsymbol{r}_{BD} = l_2 \boldsymbol{\tau}_2$ удобно описывать следующим образом:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{r}_{BD} = Q_{BD} \cdot [l_2 \boldsymbol{\tau}_2^0], \qquad \dot{Q}_{BD} = \boldsymbol{\Omega}_2 \times Q_{BD}, \\ Q_{BD} = Q_0(\psi_0 \boldsymbol{\tau}_0) \cdot Q_2(\varphi_2 \boldsymbol{e}), \qquad \dot{Q}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times Q_2, \qquad Q_2^{-1} = Q_2^{\mathrm{т}}. \end{gathered} \tag{4}$$

Структуры тензора поворота Q_2 и вектора соответствующей ему угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_2$ аналогичны структуре Q_1 и структуре $\boldsymbol{\omega}_1$ в уравнениях (3). В (4) орт $\boldsymbol{\tau}_2^0$ соответствует некоторому начальному положению оси стержня, соединяющего узлы B и D.

По теореме об угловой скорости композиции двух поворотов [6] с использованием вытекающего из (2) тождества $\boldsymbol{\Omega}_0 \equiv Q_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}_0$ для угловых скоростей каждого из стержней рассматриваемой системы получаем

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_0 + Q_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 = Q_0 \cdot (\boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_1), \qquad \boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{\Omega}_0 + Q_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = Q_0 \cdot (\boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_2).$$

Интеграл движения. Закон об изменении полного кинетического момента всей открытой стержневой системы сформулируем в виде

$$\frac{d\boldsymbol{K}_{2,A}^{\Sigma}}{dt} = -\mu_A \boldsymbol{\tau}_0 \times \boldsymbol{\tau}_1 + \mu_D \boldsymbol{\tau}_2 \times \boldsymbol{\tau}_0 + l_0 \boldsymbol{\tau}_0 \times \boldsymbol{N}_D + \boldsymbol{k}_{2,A}^{ABD}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{k}_{2,A}^{ABD}$ — скорость изменения момента количества движения относительно узла A во всей стержневой системе. В силу принятого условия вытекания жидкости из стержневой системы вдоль орта $\boldsymbol{\tau}_0$ через шарнир D $\boldsymbol{k}_{2,A}^{ABD} = \boldsymbol{0}$.

Поскольку правая часть уравнения (5) ортогональна фиксированному орту $\boldsymbol{\tau}_0$, из этого уравнения следует существование у рассматриваемой системы интеграла движения

$$\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{K}_{2,A}^{\Sigma} = K_\tau = \mathrm{const}\,. \tag{6}$$

Возникает вопрос о том, существует ли в данной системе динамический режим, для которого справедливы равенства

$$\Omega_0 = \mathrm{const}, \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{0} \tag{7}$$

(это стационарный режим, который сложно описать с помощью двумерных моделей трубопровода).

Законы движения открытой системы, состоящей из двух стержней с потоком жидкости. Покажем, что в описанной системе возникновение режима (7), по крайней мере, не противоречит законам механики. При этом будем полагать, что для открытых стержней с потоком жидкости, входящих в состав системы (см. рис. 1), справедливы фундаментальные законы динамики Эйлера [7], связывающие скорости изменения количества движения и скорость изменения кинетического момента открытого тела с действующими на данное тело внешними силами и моментами, а также со скоростями притока в стержневую систему извне количества движения и кинетического момента:

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{K}}_1^{AB}\big|_{st} = \boldsymbol{N}_A + \boldsymbol{N}_B + \boldsymbol{k}_1^{AB}\big|_{st},\\ \dot{\boldsymbol{K}}_{2,A}^{AB}\big|_{st} = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B + \boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{N}_B + \boldsymbol{k}_{2,A}^{AB}\big|_{st},\\ \dot{\boldsymbol{K}}_1^{BD}\big|_{st} = -\boldsymbol{N}_B + \boldsymbol{N}_D + \boldsymbol{k}_1^{BD}\big|_{st},\\ \dot{\boldsymbol{K}}_{2,A}^{BD}\big|_{st} = -\boldsymbol{M}_B + \boldsymbol{M}_D - \boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{N}_B + \boldsymbol{r}_{AD}\times\boldsymbol{N}_D + \boldsymbol{k}_{2,A}^{BD}\big|_{st}.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{K}_1^{AB}\big|_{st}$ — соответствующее стационарному режиму количество движения стержня с потоком инерционной жидкости, соединяющего узлы A и B; $\boldsymbol{K}_1^{BD}\big|_{st}$ — количество движения стержня с потоком инерционной жидкости, соединяющего узлы B и D; $\boldsymbol{K}_{2,A}^{AB}\big|_{st}$, $\boldsymbol{K}_{2,A}^{BD}\big|_{st}$ — вычисленные относительно узла A кинетические моменты стержней с потоком инерционной жидкости, соединяющих узлы A и B и узлы B и D соответственно. В первое и третье уравнения (8) входят $\boldsymbol{k}_1^{AB}\big|_{st}$ и $\boldsymbol{k}_1^{BD}\big|_{st}$ — скорости притока количества движения в стержни, соединяющие узлы A и B и узлы B и D; $\boldsymbol{k}_{2,A}^{AB}\big|_{st}$, $\boldsymbol{k}_{2,A}^{BD}\big|_{st}$, входящие во второе и четвертое уравнения системы (8), — это скорости изменения момента количества движения относительно узла A в соответствующих стержнях. Данные слагаемые учитывают обмен массой между стержневой системой и ее окружением, приводящий к возникновению в системе реактивных воздействий.

Явные выражения для входящих в (8) реактивных слагаемых, соответствующие режиму движения (7) стержневой системы, имеют вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{k}_1^{AB}\big|_{st} = -q(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{r}_{AB} + v\boldsymbol{\tau}_1) + qv\boldsymbol{\tau}_0,\\ \boldsymbol{k}_1^{BD}\big|_{st} = q(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{r}_{AB} + v\boldsymbol{\tau}_1) - qv\boldsymbol{\tau}_0,\\ \boldsymbol{k}_{2,A}^{AB}\big|_{st} = -q\boldsymbol{r}_{AB}\times(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{r}_{AB}), \qquad \boldsymbol{k}_{2,A}^{BD}\big|_{st} = q\boldsymbol{r}_{AB}\times(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{r}_{AB}).\end{gathered} \tag{9}$$

Меры движения сегментов модели. Меры движения, входящие в формулировку фундаментальных законов, получаются в результате суммирования соответствующих величин для единицы длины потока инерционной жидкости и единицы длины каждого из потокоформирующих стержней. Выполнив некоторые преобразования, входящие в (8) меры движения, необходимые для описания трехмерного вращения элементов системы с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0\boldsymbol{\tau}_0$, можно представить в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{K}_{2,A}^{AB} = (J_A^{s,1} + J_A^{g,1})\{E - \boldsymbol{\tau}_1\otimes\boldsymbol{\tau}_1\}\cdot\boldsymbol{\Omega}_0,\\ \boldsymbol{K}_1^{BD} = (m_{s,2} + m_{g,2})\boldsymbol{\Omega}_0\times l_1\boldsymbol{\tau}_1 + \frac{m_{s,2}+m_{g,2}}{2}\,\boldsymbol{\Omega}_0\times l_2\boldsymbol{\tau}_2 + m_{s,2}v\boldsymbol{\tau}_2,\\ \boldsymbol{K}_{2,A}^{BD} = \rho F v l_1 l_2\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2 + (m_{g,2}+m_{s,2})l_1^2\boldsymbol{\tau}_1\times(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\tau}_1) +\\ + \frac{m_{g,2}+m_{s,2}}{2}\,l_2\boldsymbol{\tau}_2\times(\boldsymbol{\Omega}_0\times l_1\boldsymbol{\tau}_1) + \frac{m_{g,2}+m_{s,2}}{2}\,l_1\boldsymbol{\tau}_1\times(\boldsymbol{\Omega}_0\times l_2\boldsymbol{\tau}_2) +\\ + (J_B^{g,2} + J_B^{s,2})\{E - \boldsymbol{\tau}_2\otimes\boldsymbol{\tau}_2\}\cdot\boldsymbol{\Omega}_0,\end{gathered} \tag{10}$$

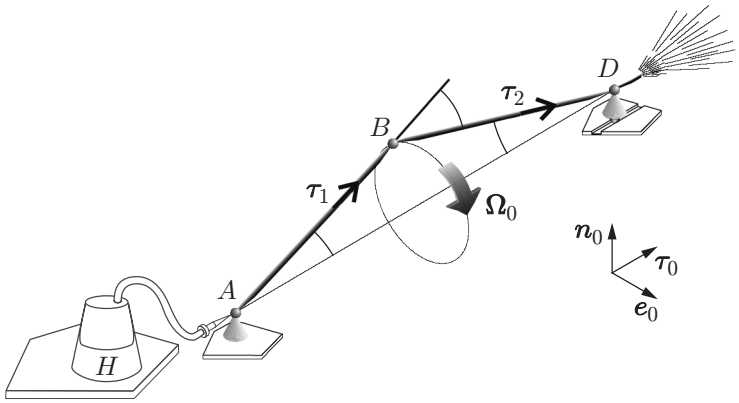

Рис. 2. Динамическая конфигурация открытой стержневой системы с потоком инерционной жидкости, соответствующая вращению с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0 \boldsymbol{\tau}_0$

где

$$J_A^{s,1} = \frac{m_{s,1} l_1^2}{3}, \quad J_A^{g,1} = \frac{m_{g,1} l_1^2}{3}, \quad J_B^{s,2} = \frac{m_{s,2} l_2^2}{3}, \quad J_B^{g,2} = \frac{m_{g,2} l_2^2}{3},$$

$m_{s,1}$, $m_{g,1}$ — масса потока жидкости внутри стержня, соединяющего узлы A и B, и масса собственно этого потокоформирующего стержня соответственно; $m_{s,2}$, $m_{g,2}$ — масса потока жидкости внутри стержня, соединяющего узлы B и D, и собственно масса этого стержня.

Условия стационарного вращения. Приняв $l_1 = l_2$, из (6), (8)–(10) получаем зависимость отклонения системы от первоначально прямолинейной конфигурации, определяемого выражением $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_0$, от угловой скорости вращения стержневой системы Ω_0, скорости потока v и интеграла движения K_τ:

$$(\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}_1)^2 = 1 - \frac{K_\tau}{J_\Sigma \Omega_0}, \qquad \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = \frac{\mu_A + \mu_D - 2qvl_1}{J_\Sigma \Omega_0^2 - 4\mu_B}, \tag{11}$$

где

$$J_\Sigma = m_\Sigma l_1^2/3, \qquad m_\Sigma = m_{s,1} + m_{g,1} + m_{s,2} + m_{g,2}.$$

Практический интерес представляют конфигурации, для которых

$$\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = 1 - \theta^2/2, \qquad \theta^2 \ll 1, \qquad 2l_1 = l_0.$$

Из уравнений (11) следует, что для открытой системы, показанной на рис. 2, законы механики допускают возможность существования режима (7). Значение θ^2, соответствующее интегралу движения (6), должно удовлетворять уравнению

$$\theta^4 + \frac{K_\tau^2 \theta^2}{2J_\Sigma(\mu_A + 4\mu_B + \mu_D - qvl_0)} - \frac{K_\tau^2}{J_\Sigma(\mu_A + 4\mu_B + \mu_D - qvl_0)} = 0.$$

Очевидно, что $m_{s,\Sigma} = \rho F l_0$ — общая масса жидкости, находящейся в рассматриваемой стержневой системе, поэтому $qvl_0 = m_{s,\Sigma} v^2$. Величина θ^2 является малой, вещественной и неотрицательной. Эти условия соблюдаются при выполнении двойного неравенства

$$-16 \leqslant \frac{K_\tau^2}{J_\Sigma(\mu_A + 4\mu_B + \mu_D - m_{s,\Sigma} v^2)} \ll 2. \tag{12}$$

На практике параметр K_τ может зависеть от условий, в которые помещен участок трубопровода. В случае если K_τ удовлетворяет условию (12), что не противоречит принципам механики, для уравнений движения открытой стержневой системы, представленной

на рис. 2, существует решение, описывающее движение, при котором все элементы стержневой системы вращаются вокруг $\boldsymbol{\tau}_0$ с угловой скоростью $\Omega_0 = \text{const}$. Заметим, что до сих пор в теоретических исследованиях колебаний труб с потоком жидкости данное обстоятельство не учитывалось.

Заключение. В работе описан режим трехмерного движения открытой стержневой системы, находящейся под воздействием реактивной нагрузки. В механике упругоинерционных стержневых систем, содержащих поток инерционной жидкости, возможность существования трехмерных движений имеет значение при выборе адекватных моделей для теоретического изучения физических процессов в подобного рода трубопроводных системах. (По сути, эти физические процессы протекают в реальном трехмерном физическом пространстве.) В настоящее время при теоретическом исследовании динамики трубопроводов, как правило, используются двумерные модели и без внимания остается обширный класс возможных движений трубопроводных систем. В частности, представленные в настоящей работе результаты в принципе не могут быть теоретически описаны с помощью двумерных моделей. При этом показано, что переход к моделям, совершающим трехмерное движение в физическом пространстве, делает такие трубопроводные системы доступными для теоретического анализа с помощью методов динамики твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Феодосьев В. И.** Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973.
2. **Светлицкий В. А.** Механика абсолютно гибких стержней. М.: Моск. авиац. ин-т, 2001.
3. **Païdoussis M. P.** Pipes, conveying fluid: linear dynamics I // Fluid-structure interactions slender structures and axial flow. L.: Acad. Press, 1998. V. 1. P. 63–163.
4. **Elishakoff I., Vittori P.** A paradox of non-monotonicity in stability of pipes conveying fluid // Theor. Appl. Mech. 2005. V. 32, N 3. P. 235–282.
5. **Бидерман В. Л.** Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1972.
6. **Жилин П. А.** Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001.
7. **Жилин П. А.** Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. политехн. ун-та, 2003.

Поступила в редакцию 5/XII 2011 г.,
в окончательном варианте — 15/II 2012 г.