

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ УСКОРЕНИЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ
УДАРНОЙ ВОЛНЫ

А. Е. Войтенко, О. П. Соболев
(Новосибирск)

При распространении ударной волны в среде с уменьшающейся плотностью скорость движения фронта волны может увеличиваться [1]. Ниже рассматривается подобная задача для плазмы, находящейся в магнитном поле.

Показано, что сильная магнитогиродинамическая ударная волна при движении в идеальной плазме с переменной плотностью и переменной напряженностью магнитного поля может ускоряться, а удельная энергия малой массы может стать весьма большой.

Ударная волна ускоряется пропорционально увеличению альфвеновской скорости перед волной, так что число Маха для фронта ударной волны будет оставаться постоянным.

Этот механизм ускорения возможно играет роль при генерации частиц с большой энергией в околозвездной и космической плазме.

1. **Постановка задачи.** Рассматривается плоская и цилиндрическая волна. В исходном состоянии плотность плазмы ρ_0 и напряженность магнитного поля H_0 в обоих случаях распределены по законам

$$\rho_0(x) = \rho_{00}x^q \quad H_0(x) = H_{00}x^s \quad (1.1)$$

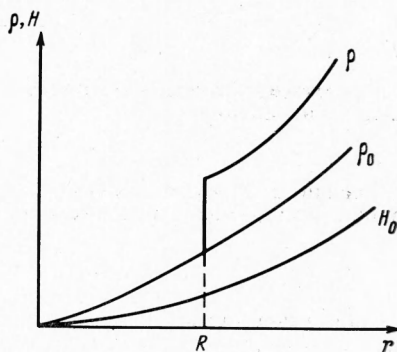
где ρ_{00} , H_{00} , q , s — положительные постоянные, а x — расстояние от начала координат (т. е. в цилиндрических координатах — радиус). Вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен течению, а в цилиндрическом случае, кроме того, параллелен оси. Ударная волна (плоская или цилиндрическая) идет к началу координат: от $x = \infty$ к $x = 0$ (фиг. 1). На фиг. 1 схематически показано также мгновенное положение фронта R и скачок плотности за фронтом волны. Скачок на фронте волны считается резким, т. е. структура фронта не рассматривается.

Отсчет времени выбирается из условия, что фронт волны приходит в точку $x = 0$ при $t = 0$. Таким образом, $0 > t > -\infty$, $\infty > x \geq 0$.

Вязкость и теплопроводность плазмы считаются равными нулю, ее электропроводность — бесконечной, процессы диффузии — несущественными. В невозмущенной плазме магнитное давление считается много большим газокинетического. Ударная волна предполагается сильной.

2. **Нахождение автомодельных решений.** Сформулированная задача допускает автомодельные решения. Движение плазмы за фронтом ударной волны в одномерном нестационарном случае описывается следующей системой уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + (\nu - 1) \frac{u\rho}{x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{H}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} + (\nu - 1) \frac{uH}{x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial p}{\partial t} - \gamma p \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma p u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$



где γ — показатель адиабаты, $\nu = 1, 2$, соответственно, для плоского и цилиндрического случая, остальные обозначения — обычные.

Для получения автомодельного решения от аргументов (x, t) переходим к (ξ, t) , где ξ — безразмерная переменная

$$\xi = Ax(-t)^\alpha = \frac{x}{R} \quad (2.2)$$

Здесь A , α — постоянные, R — координата фронта ударной волны.

В соотношении (2.2) величина ξ меняется в пределах

$$1 \leq \xi < \infty$$

Скорость фронта ударной волны

$$D = \frac{dR}{dt} = A^{-1} \alpha (-t)^{-\alpha-1} \quad (2.3)$$

Неизвестные функции u , ρ , p , H от аргументов (x, t) ищем в виде произведений функций от t на функции от автомодельной переменной ξ :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(t) \varphi(\xi), & \rho(x, t) &= \rho_1(t) \psi(\xi) \\ p(x, t) &= p_1(t) \pi(\xi), & H(x, t) &= H_1(t) \chi(\xi) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Следуя [1], назовем функции от t масштабами, от ξ — представителями.

Относя постоянные к масштабам, представители можно считать безразмерными и удовлетворяющими на фронте волны, т. е. при $\xi = 1$ условиям

$$\varphi(1) = \psi(1) = \pi(1) = \chi(1) = 1 \quad (2.5)$$

Масштабы легко находятся с использованием (2.2), (2.3) по известным значениям $u \equiv 0$, ρ_0 , $p \equiv 0$, H_0 непосредственно перед фронтом волны и универсальным условиям на фронте сильной ударной волны (постоянные A и α при этом пока остаются неопределенными)

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{2}{\gamma+1} D(t) = \frac{2}{\gamma+1} \frac{\alpha}{A} (-t)^{-\alpha-1} \\ \rho_1(t) &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_{00} R^q(t) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_{00} \frac{1}{A^q} (-t)^{-\alpha q} \\ p_1(t) &= \frac{2}{\gamma+1} \rho_{00} R^q(t) D^2(t) = \frac{2}{\gamma+1} \rho_{00} \frac{\alpha^2}{A^{2+q}} (-t)^{-\alpha q - 2\alpha - 2} \\ H_1(t) &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} H_{00} R^s(t) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} H_{00} \frac{1}{A^s} (-t)^{-\alpha s} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подстановкой (2.4), (2.6) в (2.1) получаем систему уравнений относительно аргументов t и ξ . Условие разделения переменных позволяет определить показатель автомодельности

$$\alpha = \frac{1}{s - 1/2q - 1} \quad (2.7)$$

Существенно заметить, что показатель автомодельности зависит только от s и q , причем в комбинации

$$\sigma = s - 1/2q - 1 \quad (2.8)$$

Величины S и q входят в получаемые зависимости от t и R только в указанной комбинации (в дальнейшем предполагается $\sigma \neq 1$). Например, скорость фронта

$$D = \frac{1}{(\sigma-1)A} (-t)^{-\alpha-1} = \frac{A^{\sigma-1}}{\sigma-1} R^{\sigma} \quad (2.9)$$

Из последнего выражения следует, что идущая к началу координат волна $R \rightarrow 0$ может как ускоряться, так и замедляться. Неограниченное ускорение волны имеет место при выполнении условия

$$\sigma = s - 1/2q < 0 \quad (2.10)$$

Тот факт, что показатель автомодельности α зависит от s и q в комбинации $\sigma = s - 1/2q$, позволяет дать условию ускорения или замедления волны простую физическую интерпретацию. Местная альфвеновская скорость в невозмущенной плазме определяется тем же параметром σ :

$$v_A(x) = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = \frac{H_{00}x^s}{2\sqrt{\pi\rho_{00}}x^{1/2q}} = \frac{H_{00}}{\sqrt{4\pi\rho_{00}}} x^{\sigma} \quad (2.11)$$

Из сравнения (2.9) и (2.11) следует, что число Маха ударной волны при ее движении остается постоянным

$$M = \frac{D(x)}{v_A(x)} = \frac{\sqrt{4\pi} A^{(\sigma-1)} \rho_{00}^{1/2}}{\sigma-1} \frac{\rho_{00}^{1/2}}{H_{00}} = \text{const} \quad (2.12)$$

Таким образом, оказывается, что в рассматриваемом случае ускорение или замедление ударной волны определяется только зависимостью альфеновской скорости от координаты x в невозмущенном состоянии. Если альфеновская скорость к началу координат увеличивается, то и волна пропорционально ускоряется.

В режиме ускорения, т. е. при $\sigma < 0$, массовая скорость плазмы при $R \rightarrow 0$ в рамках принятых предположений неограниченно возрастает. Подобная кумуляция энергии сопровождается, однако, уменьшением массы до нуля (в плоском случае — удельной массы на единицу площади), так что полная энергия вблизи начала координат все же стремится к нулю.

Используя найденное значение α (2.7), выражая постоянную A через сохраняющееся число Маха M (2.12) и обозначив дифференцирование по ξ штрихом, получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для представителей, зависящих от автомодельной переменной ξ :

$$\begin{aligned} 2\psi\psi' + [2\psi - (\gamma + 1)\xi]\psi' + (\gamma + 1)q\psi + 2(\nu - 1)\frac{\psi\Phi}{\xi} &= 0 \\ [2\psi - (\gamma + 1)\xi]\psi\psi' + (\gamma - 1)\pi' + \frac{(\gamma + 1)^3}{2(\gamma - 1)M^2}\chi\chi' + (\gamma + 1)\left(s - \frac{1}{2}q\right)\psi\Phi &= 0 \\ 2\chi\chi' + [2\psi - (\gamma + 1)\xi]\chi' + (\gamma + 1)s\chi + 2(\nu - 1)\frac{\chi\Phi}{\xi} &= 0 \\ \gamma[2\psi - (\gamma + 1)\xi]\pi\psi' - [2\psi - (\gamma + 1)\xi]\psi\pi' - (\gamma + 1)(2s - q\gamma)\pi\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Полученная система уравнений определяет движение за фронтом волны. Для конкретных значений ν , γ , q , s , M можно ее численно проинтегрировать, что совместно с формулами (2.6) дает полное решение.

Наиболее интересные результаты рассмотрения задачи выражаются формулами (2.6), причем t можно выразить (2.2) через R и формулой (2.7) для показателя автомодельности. Именно эти формулы определяют условия ускорения волны, т. е. кумуляцию энергии.

Показатель автомодельности α может быть получен не только из условия разделения переменных, как сделано выше, но и из соображений размерности. В условиях задачи имеются только две определяющие размерные константы с независимыми размерностями: ρ_{00} , H_{00} , что и позволяет определить α . Существенно отметить, что α для плоского и цилиндрического случаев одинаково, так что зависимость скорости фронта волны от расстояния до начала координат одинакова, хотя течение за фронтом в этих двух случаях, разумеется, различно (2.1).

Сохранение числа Маха движущейся ударной волны (2.12) имеет место как для плоского, так и для цилиндрического случая. Подобный же вывод о сохранении числа Маха следует из работы [3], в которой рассмотрена автомодельная магнитогидродинамическая ударная волна от цилиндрического взрыва. При этом в [3] и в настоящей работе решаются существенно различные задачи.

Поступила 20 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. В., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
2. Shih-I Pai. Magnetogasodynamics and plasma dynamics. Wien Springer — Verlag, 1962. Имеется рус. пер. Бай Ши И. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М., Изд-во «Мир», 1964.
3. Коробейников В. П. О цилиндрическом взрыве и прямолинейном разрыве в электропроводной среде с учетом магнитного поля. Сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы». Рига, Изд-во АН ЛатвССР, 1962.