

УДК 536.25

Смешанно-конвективное течение наножидкостей в вертикальном канале с обратным уступом

Х.А. Мохаммед¹, А.А. Аль-асвади¹, Н.Х. Шуэйб¹, Р. Сайдур²

¹Университет Тенага Насионал, Каджан, Селангор, Малайзия

²Университет Малая, Куала Лумпур, Малайзия

E-mail: Hussein@uniten.edu.my

С помощью метода конечных объемов численно моделировалось ламинарное смешанное конвективное течение (с учетом плавучести) в двумерном вертикальном канале с обратным уступом с использованием наножидкостей как среды. Использовались различные типы наночастиц, такие как Au, Ag, Al₂O₃, Cu, CuO, алмаз, SiO₂ и TiO₂ с 5 % объемной долей. Поддерживалась равномерная температура стенки ниже по потоку от уступа, а на прямой стенке, которая образует другую сторону канала, поддерживалась постоянная температура, эквивалентная температуре жидкости на входе. Стенки вверх по потоку от уступа рассматривались как адиабатические поверхности. Высота уступа в канале составляла 4,9 мм, относительное расширение канала равнялось 1,942, а полная длина ниже по потоку от уступа — 0,5 м. На стенке вниз по потоку поддерживалась фиксированная равномерная температура в диапазоне $0 \leq \Delta T \leq 30$ °C, которая была выше, чем температура течения на входе. Рассматривались числа Рейнольдса в диапазоне $33,3 \leq Re \leq 100$. Найдено, что непосредственно за уступом развивалась область рециркуляции, которая появлялась между кромкой уступа и на расстоянии нескольких миллиметров перед углом, который соединяет уступ со стенкой вниз по потоку. В зоне размером несколько миллиметров между областью рециркуляции и стенкой вниз по потоку развивалось течение в направлении, противоположном течению рециркуляции, которое смешивалось с нерециркуляционным течением и двигалось вдоль канала. Наблюдались два пика максимума и один пик минимума в числе Нуссельта вдоль нагретой стенки вниз по потоку. Сделан вывод, что наножидкость с Au имеет самый высокий пик максимума числа Нуссельта, а наножидкость с алмазом имеет самый высокий пик минимума. Наножидкости с более высоким числом Прандтля имеют более высокий пик чисел Нуссельта после того, как исчезают отрыв и течение рециркуляции.

Ключевые слова: теплообмен при смешанной конвекции, течение с учетом плавучести, обратный уступ, наножидкости.

Введение

Явления отрыва и последующего присоединения потока, происходящие вследствие внезапного расширения в потоке, признаны важным явлением в практическом отношении. Такие сложные течения встречаются в приложениях, где имеются нагрев или охлаждение, таких как охлаждение электронного оборудования, лопаток турбин, камер сгорания, ядерных реакторов, широкоугольных диффузоров, в химических процессах, высокоэффективных обменниках, оборудовании энергосистем, течениях в клапанах. Во многих случаях отрыв ведет к нежелательному падению давления и потерям энергии, что требует дополнительных

мощностей. Однако в других обстоятельствах отрыв потока может быть полезным, например, при стабилизации пламени горелки для стимулирования турбулентности, что усиливает перемешивание или скорости тепло- и массопереноса.

Из литературы известно, что первые исследования отрыва и присоединения потока за обратным уступом были выполнены в конце 1950-х годов. Появление новых измерительных инструментов и улучшение численных методов увеличивают количество новых исследований этой задачи и облегчают комплексное исследование трехмерного течения в зоне отрыва и присоединения. Случаи горизонтальных, наклонных и вертикальных течений исследовались для различных геометрических, граничных условий и свойств жидкостей. В работе [1] был сделан обширный обзор по течениям жидкости и теплопереносу однофазного ламинарного смешанного конвективного течения в окрестности прямых и обратных ступенек. В литературе появилось много работ, посвященных моделированию и измерениям течения, примыкающего к двумерному обратному уступу. Двумерное вынужденное конвективное течение исследовалось экспериментально и численно в работах [2–4]. Было найдено, что точка присоединения потока удаляется вниз по потоку от уступа с увеличением числа Рейнольдса. Кроме того, было показано, что при $Re \leq 400$ течение действительно является двумерным на большей части ширины тестовой секции, а при $Re > 400$ — трехмерным вследствие эффектов перехода к турбулентности. Трехмерная вынужденная конвекция интенсивно изучалась многими исследователями [5–11]. Они нашли, что зона присоединения больше вблизи боковых стенок по сравнению с центральной плоскостью канала.

В ряде исследований рассматривались эффекты теплопереноса над обратным уступом. Они свидетельствовали о влиянии силы плавучести на поведение течения жидкости. В работах [12–15] представлены экспериментальные и численные результаты по теплопереносу для двумерного течения воздуха в горизонтальном канале с обратным уступом, подогревавшимся снизу либо при равномерной температуре стенки, либо равномерным тепловым потоком. Был сделан вывод, что число Нуссельта не зависит от числа Рейнольдса. Также отмечено, что максимум локального числа Нуссельта достигается вблизи точки присоединения, а минимум наблюдался внизу между стенкой ниже по потоку и уступом. Число Нуссельта и зона рециркуляции уменьшались с увеличением силы плавучести.

Характеристики течения и теплообмена в каналах с трехмерным обратным уступом интенсивно изучались в [16–21] при различных параметрах задачи. Наблюдалось, что максимум локального числа Нуссельта достигается вблизи точки присоединения между боковой стенкой и центральной плоскостью. Влияние ориентации канала с обратным уступом исследовалось в работах [22–26]. Было замечено, что при увеличении угла наклона от 0° до 180° длина присоединения растет, но коэффициент трения на стенке и число Нуссельта на нагретой стенке убывают. Противоположное поведение наблюдалось и для длины присоединения, и для числа Нуссельта при увеличении угла наклона от 180° до 360° .

Обширные исследования влияния плавучести на течение около обратного уступа в двумерных вертикальных каналах выполнялись в [27–34]. Обнаружилось, что под действием плавучести, длина присоединения убывает при возрастании температуры стенки, и размер вторичной внутренней рециркуляционной области, развивающейся в углу между нагретой стенкой и уступом, увеличивается. Также было найдено, что число Нуссельта и коэффициент трения увеличиваются с ростом температуры стенки. Кроме того, выяснилось, что при фиксированной температуре стенки длина присоединения и объем рециркуляционной области убывают с убыванием числа Рейнольдса. Однако в случае высокой температуры стенки и

низкого числа Рейнольдса рециркуляционная область исчезала, отрываясь от нагретой стенки, и присоединялась только к адиабатической ступеньке. В работе [27] было показано, что исчезновение отрыва от нагретой стенки будет происходить только в режиме течения, где средняя скорость на входе меньше, чем значение, соответствующее естественной конвекции. В течении с противодействием плавучести, рассматриваемом в [32], было замечено, что при низких уровнях плавучести ($Ri < 4,4 \times 10^{-3}$) длина рециркуляционной области вниз по потоку от обратного уступа быстро возрастает с увеличением уровня плавучести. Однако при низких уровнях плавучести выше $4,4 \times 10^{-3}$ течение внутри области рециркуляции остается ламинарным, но длина области рециркуляции быстро уменьшается. Это происходит вследствие перехода течения от ламинарного к турбулентному, и течение становится турбулентным ниже по потоку от области рециркуляции. Было найдено, что с увеличением разности температур ΔT длина присоединения увеличивается, а число Нуссельта уменьшается.

Первое численное исследование течения и теплопереноса над обратным уступом с использованием наножидкостей было проведено в работе [35]. Число Рейнольдса и объемная доля наночастиц находились в диапазоне $200 \leq Re \leq 600$ и $0 \leq \varphi \leq 0,2$ соответственно, для пяти типов наночастиц: Cu, Ag, Al_2O_3 , CuO и TiO_2 . Обнаружено, что высокое число Нуссельта внутри зоны рециркуляции зависело, главным образом, от теплофизических свойств наночастиц и не зависело от числа Рейнольдса. При $Re > 300$ были найдены две области рециркуляции: первичная зона рециркуляции у стенки вниз по потоку и вторичная зона рециркуляции у верхней стенки канала. В недавней работе [36] те же авторы численно исследовали ламинарную вынужденную конвекцию над обратным уступом в канале с использованием различных наножидкостей. Найдено, что первичная область рециркуляции развивалась после внезапного расширения канала. Кроме того, выяснилось, что наножидкости низкой плотности имеют более высокую абсолютную скорость по сравнению с наножидкостями высокой плотности. Статическое давление и касательное напряжение на стенке увеличиваются с ростом числа Рейнольдса, а коэффициент трения — наоборот. Из обзора литературы ясно, что имеются в наличии только вышеуказанные исследования. Таким образом, настоящая работа пытается заполнить существующий пробел в этой области исследований. Кроме того, представляется, что случай смешанного конвективного течения с учетом плавучести в двумерном вертикальном канале с обратным уступом с использованием наножидкостей ранее не изучался, что и мотивировало настоящее исследование.

Была выполнена обширная работа по подготовке наножидкостей для экспериментальных исследований и представления их характеристик течения и теплопереноса. Термин “наножидкость” был введен Чоем в 1995 году для жидкостей (вода, этиленгликоль, масло и т. д.) с дисперсными твердыми частицами нанометрового размера для усиления их тепловых свойств. Имеется несколько обзоров, проясняющих и демонстрирующих расхождения в результатах по этой тематике (см. [37–39]). Наножидкости должны быть однородными, устойчивыми, долговечными взвесьями без химических изменений и пренебрежимой агломерацией. Для получения требуемых наножидкостей предлагались различные варианты, такие как использование различных добавок, оборудования или контролирования pH. Имеются два разных метода для получения наножидкостей: одношаговый и двухшаговый. В работе [40] утверждалось, что: “... для двухшагового метода нет в настоящее время сформулированной теории, которая смогла бы разумно предсказывать течение и теплоперенос в наножидкости. Было предложено рассматривать

частицы как обычную однофазную жидкость, обладающую эффективными физическими свойствами, являющимися функцией свойств обоих составляющих и их соответствующих концентраций.” Обычно в численных исследованиях используется однофазная модель в связи с ее простотой и вычислительной эффективностью. Имеется несколько факторов, которые влияют на течение наножидкостей и усиление теплопереноса, такие как размер, форма и тип наночастиц, тип базовой жидкости, объемная доля наножидкости, броуновское движение, наслаивание на поверхности раздела твердого тела и жидкости и т. д.

Теплофизические свойства базовых жидкостей могут изменяться после введения наночастиц. В работах [37–40] четко показано, что большинство исследований сосредоточено на теплопроводности k для увеличения коэффициента теплопередачи обычных жидкостей. Однако было также замечено, что другие свойства, например, удельная теплоемкость C_p , плотность ρ , динамическая вязкость μ , играют важную роль в усилении теплопереноса.

В настоящем исследовании выполнено двумерное численное моделирование смешанных конвективных течений с учетом плавучести над обратным уступом в вертикальном канале с использованием наножидкостей. Используются различные типы наночастиц, такие как Au, Ag, Al_2O_3 , Cu, CuO, алмаз, SiO_2 , TiO_2 с объемной долей 5 % в базовой жидкости (воде). Представлены результаты: распределение скоростей, число Нуссельта, коэффициент трения для ламинарной смешанной конвекции над вертикальным уступом для иллюстрации влияния наножидкостей на эти параметры.

Описание модели и основные уравнения

Рассматриваемая конфигурация течения схематично показана на рис. 1. Высота ступеньки и относительное расширение канала имели фиксированные значения — 4,9 и 1,942 мм соответственно. Стенки вверх (X_1) и вниз (X_c) по потоку от уступа имели длины: 40 мм и 500 мм. Считалось, что течение на входе в канал гидродинамически стационарное и полностью развитое; градиенты всех величин вдоль потока на выходе из канала полагались равными нулю. На стенке вниз по потоку от уступа поддерживалась равномерная температура, а на прямой стенке, образующей другую сторону канала, поддерживалась постоянная температура, эквивалентная температуре жидкости на входе. Стенка вверх по потоку от уступа и уступ рассматривались как адиабатические поверхности; наночастицы и базовая жидкость (то есть вода) находятся в тепловом равновесии, и имеет место условие прилипания; течение жидкости ньютоново, стационарное, несжимаемое и двумерное. На формулировку теплофизических свойств наножидкостей оказывает влияние сила плавучести, см. табл. 1, и используется приближение Буссинеска. На основе этих

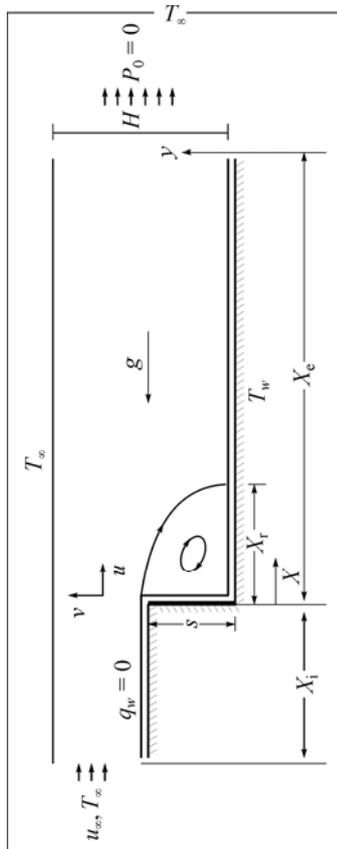


Рис. 1. Схема-диаграмма обратного уступа.

Таблица 1

Теплофизические свойства наножидкостей различных типов

Свойство	Чистая вода	Ag	Al ₂ O ₃	Au	Cu	CuO	Алмаз	SiO ₂	TiO ₂
$\rho(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	997,1	10500	3970	19300	8933	6500	3510	2200	4250
$\mu(\text{N}\cdot\text{m}/\text{s})$	110^{-3}	–	–	–	–	–	–	–	–
$k(\text{W}/\text{mk})$	0,613	429	40	314	400	20	1000	1,2	8,9538
C_p (kj/kg·K)	4179	235	765	126	385	535,6	497,26	703	686,2
$\beta(1/\text{K})$	207×10^{-6}	18×10^{-6}	$5,8\times 10^{-6}$	$1,4\times 10^{-6}$	17×10^{-6}	$4,3\times 10^{-6}$	$1,0\times 10^{-6}$	$5,5\times 10^{-6}$	$0,17\times 10^{-6}$

упрощающих предположений и с введением безразмерных параметров по формулам —

$$U = \frac{u}{u_\infty}, \quad V = \frac{v}{u_\infty}, \quad X = \frac{x}{D_h}, \quad Y = \frac{y}{D_h}, \quad P = \frac{(p + pgX)}{\rho u_\infty^2}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty},$$

стационарные двумерные уравнения сохранения массы, количества движения и энергии, описывающие течение жидкости и теплоперенос, принимают следующий вид [35]:

– уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (1)$$

– уравнение движения в направлении оси X:

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = - \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_s}{\rho_f}} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\left((1-\varphi)^{2,5} \left((1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr_X}{\text{Re}^2}, \quad (2)$$

– уравнение движения в направлении оси Y:

$$\left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_s}{\rho_f}} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\left((1-\varphi)^{2,5} \left((1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \right)} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right), \quad (3)$$

– уравнение энергии:

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + v \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{k_{nf}/k_f}{(1-\varphi) - \varphi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (4)$$

Уравнения, описывающие теплофизические свойства наножидкости, основываются на исследованиях работы [35], и в уравнениях (1)–(4) вязкость наножидкости аппроксимируется как вязкость базовой жидкости μ_f , содержащей разбавленную взвесь мелких сферических частиц, которая дана Бринкманом [41]:

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\varphi)^{2.5}}. \quad (5)$$

Эффективная плотность жидкости задается согласно [42]:

$$\rho_{nf} = (1-\varphi)\rho_f + \varphi\rho_s. \quad (6)$$

Теплоемкость наножидкости выражается по формуле [42]:

$$(\rho C_p)_{nf} = (1-\varphi)(\rho C_p)_f + \varphi(\rho C_p)_s. \quad (7)$$

Эффективную теплопроводность наножидкости можно аппроксимировать по модели Максвелла–Гранетса (МГ), как показано в [42]:

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{k_s + 2k_f - 2\varphi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + \varphi(k_f - k_s)}. \quad (8)$$

В настоящем исследовании мы ограничиваемся использованием МГ-модели только применительно к сферическим наночастицам, другие формы частиц не рассматриваем.

Коэффициент теплового расширения наножидкости выражается по формуле [42]

$$(\rho\beta)_{nf} = \varphi\rho_s\beta_s + (1-\varphi)\rho_f\beta_f. \quad (9)$$

Граничные условия для вышеприведенного набора основных уравнений задаются в виде:

1. Условия вверх по потоку на входе при $\chi = -\frac{X_i}{D_h}$ и $\frac{s}{D_h} \leq Y \leq \frac{H}{D_h}$:

$$U_i = u_i/u_\infty, \quad V = 0, \quad \theta = 0.$$

Предполагается, что течение на входе в канал полностью развитое со средней скоростью u_∞ . Таким образом, распределение скорости на входе параболическое.

2. Условия вниз по потоку при $\chi = X_e/D_h$ и $0 \leq Y \leq H/D_h$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} = 0.$$

Все величины на выходе из канала полагаются равными нулю.

3. Условия на верхней стенке при $\chi = -\frac{X_i}{D_h} \leq \chi \leq \frac{X_e}{D_h}$ и $Y = \frac{H}{D_h}$:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \theta = 0.$$

4. Условия на стенке со ступенькой:

вверх по потоку от ступеньки при $-X_i/D_h \leq \chi \leq 0$ и $Y = s/D_h$:

$$U=0, \quad V=0, \quad \partial\theta/\partial\chi=0,$$

на ступеньке при $\chi=0$ и $0 \leq Y \leq s/D_h$:

$$U=0, \quad V=0, \quad \partial\theta/\partial\chi=0,$$

вниз по потоку от ступеньки при $0 < \chi \leq X_i/D_h$ и $Y=0$:

$$U=0, \quad V=0, \quad \theta=1.$$

Безразмерные уравнения сохранения и граничные условия показывают, что все величины в настоящем исследовании являются функциями безразмерных параметров, указанных выше таких как Re , Pr , X_i , X_c и т. д.

Численный алгоритм и верификация программы

Численный расчет выполнялся путем решения уравнений сохранения (1)–(4) с учетом граничных условий. Уравнения для твердой и жидкой фазы решались одновременно в одной области. Дискретизация уравнений осуществлялась с использованием метода конечного объема (МКО). Диффузионный член в уравнениях импульса и энергии аппроксимируется центральной разностью второго порядка точности, что дает устойчивое решение. Кроме того, применяется схема второго порядка точности с направленными разностями для конвективных членов. Численная модель была разработана в физической области, и безразмерные параметры вычислялись из рассчитанных распределений скорости и температуры. Поле течения находилось с помощью алгоритма SIMPLE [43]. Это итерационная процедура, в которой расчет начинается с задания приближенного для поля давления. Затем решается уравнение движения для того, чтобы определить составляющие скорости. Давление перевычисляется с использованием уравнения неразрывности. Хотя последнее не содержит давления, его легко преобразовать в уравнение для поправки давления [44].

В моделировании используются четырехсторонние элементы и неравномерная сетка, которая сильно сгущается вблизи уступа и вблизи кромки уступа и стенок, чтобы обеспечить точность численного моделирования, приемлемый размер сетки и экономию времени счета. В конце каждой итерации вычисляется и сохраняется сумма невязок для каждой из переменных, удовлетворяющих законам сохранения, тем самым записывается история сходимости. Критерий сходимости требует, чтобы максимальная невязка в массе, относительно входной массы, была меньше, чем 1×10^{-3} .

С целью верификации были выполнены тестовые расчеты с использованием сеток разной плотности в сравнении с результатами предыдущих работ [3, 24], как показано на рис. 2–3. В этих исследованиях в качестве рабочей среды использовался воздух. Конфигурация течения соответствует рассмотренной в работе [3] при $Re = 100$ и 389 . Для того, чтобы обеспечить решение, не зависящее от сетки, расчеты проводились с различными плотностями узлов сетки в направлении оси x ($x = 140, 160, 180$) и в направлении оси y ($y = 30, 40, 60$). Кроме того, использовалась мелкая сетка в направлении оси x вблизи стенки уступа, а затем ее шаг увеличивался с постоянным коэффициентом $1,025$ при удалении от стенки уступа. Другие мелкие сетки с коэффициентами $1,08$ и $1,35$ в направлении оси y использовались вблизи верхней стенки, нижних стенок и на кромке уступа. Сетка размером 160×40 с коэффициентом $1,025$ в направлении оси x и $1,35$ в направлении оси y подтверждает независимость решения от сетки для $Re = 100$ и 389 среди 18 различных плотностей сетки. Результаты для положения точки присоединения на стенке вниз по потоку хорошо согласуются с экспериментальными и теоретическими

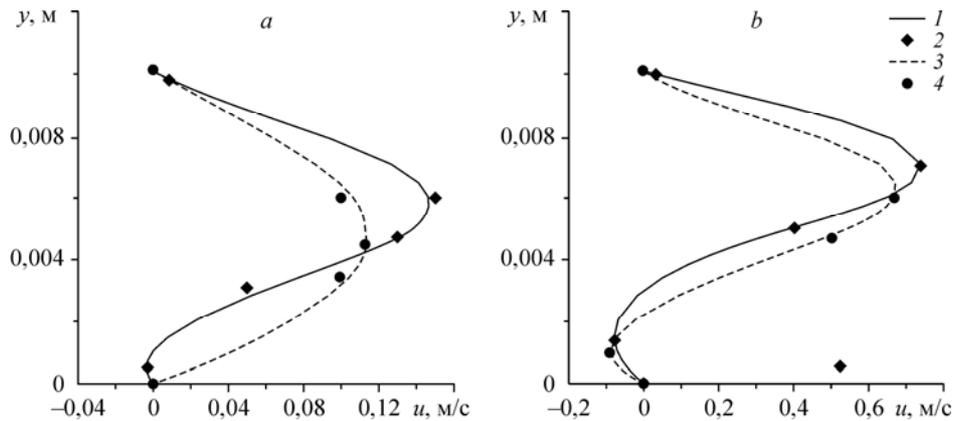


Рис. 2. Сравнение распределения скорости с результатами [3] для $s = 4,9$ мм и $ER = 1,942$ при $Re = 100$ (a), 389 (b).

Настоящая работа: $X/s = 2,55$ (1), 4,80 (3); результаты [3]: $X/s = 2,55$ (2), 4,80 (4).

данными для $Re = 100$ и 389, как показано в табл. 2. Кроме того, настоящие результаты очень хорошо согласуются с распределением скорости, как это показано на рис. 2, a, b. Эти геометрия и сетка используются для численного моделирования течения различных наножидкостей. Детально рассмотренный в работе [3] пример чистой вынужденной конвекции в горизонтальном канале и тщательное исследование вертикальной смешанной конвекции, выполненное в [24], используются для верификации настоящих результатов. Результаты хорошо согласуются с данными работ [3, 24] по распределениям скорости и числа Нуссельта, как показано на рис. 3, a, b.

На рис. 2 и 3, a показаны распределения скорости потока воздуха из результатов предыдущих исследований при различных X/s вдоль канала. Отчетливо видно появление области рециркуляции, и ее размер уменьшается далее вниз по потоку от уступа. Когда поток достигает точки повторного присоединения, течение становится полностью развитым, что более выражено ниже по потоку вдоль стенки от точки присоединения. Иллюстрации полностью развитого течения вдоль канала в настоящей статье не представлены ввиду ее ограниченного объема.

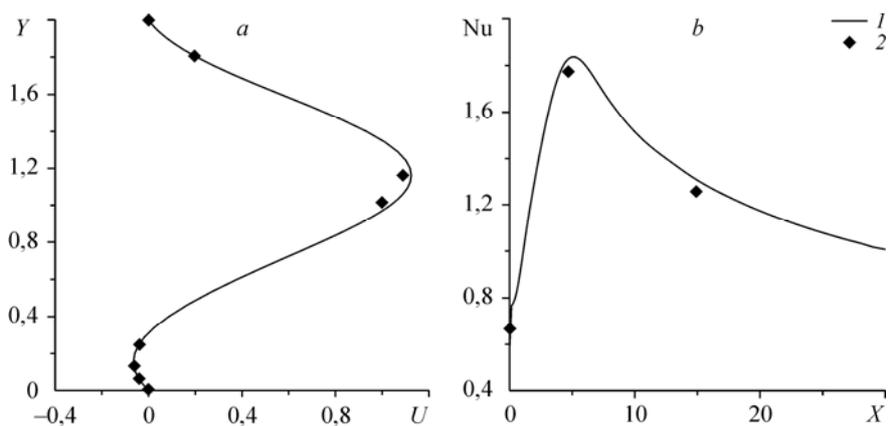


Рис. 3. Сравнение характеристик течения с учетом плавучести с результатами [24] при $Re = 100$, $g_w = 200$ wt/m^2 .

a — распределение скорости, b — число Нуссельта. Настоящая работа: $X/s = 3$ (a); результаты [24]: $X/s = 3$ (a).

Таблица 2

Сравнение длин присоединения с результатами Армали и др. [3]

	Армали и др. [3]		Настоящая работа (X/s)	Разность в (%)	
	Экспериментальное (X/s)	Теоретическое (X/s)		Экспериментальная	Теоретическая
Re = 100	2,98	2,98	2,96245	0,5924	0,5924
Re = 389	8,25	7,83	7,8209	5,4865	0,1163

На рис. 2, *a, b* ясно видно, что зона рециркуляции увеличивается с ростом числа Рейнольдса. Для подтверждения работоспособности расчетного метода результаты, показанные на рис. 3, *a, b*, сравниваются с результатами расчета смешанного конвективного течения с учетом плавучести. На рис. 3, *b* число Нуссельта увеличивается в области рециркуляции до тех пор, пока оно не достигает своего оптимального значения, затем оно постепенно убывает вниз по потоку до выходного сечения.

Результаты и их обсуждение

Моделирование осуществлялось при варьировании числа Рейнольдса в диапазоне $33,3 \leq Re \leq 100$, при различном перепаде температуры в диапазоне $0 \leq \Delta T \leq 30$ °C и различных типах наночастиц, таких как Au, Ag, Al₂O₃, Cu, CuO, алмаз, SiO₂, TiO₂ с объемной долей 5 %. Из более ранних исследований течения над обратным уступом известно, что оно весьма чувствительно к внезапному геометрическому расширению на уступе. Полностью развитое параболическое течение выше по потоку от уступа отрывается с образованием первичной зоны рециркуляции. После этого оно повторно присоединяется и вновь развивается, приближаясь к полностью развитому течению по мере движения жидкости к выходу из канала.

На рис. 4, *a* показаны векторы скорости наножидкости с SiO₂, $\varphi = 5$ % для случая вынужденного конвективного течения при $Re = 66,7$ и $\Delta T = 0$ °C между входным течением и нагретой стенкой вниз по потоку. Течение полностью развитое на кромке уступа. Зона рециркуляции образуется непосредственно за уступом, где она присоединяется к его стенке и стенке канала вниз по потоку. Толщина области рециркуляции убывает с увеличением расстояния вниз по потоку от стенки уступа до тех пор, пока течение не достигнет нулевой скорости (точка повторного присоединения). Ниже точки присоединения течение вновь приобретает параболический профиль скорости до выхода из канала.

На рис. 4, *b* показано поле температуры наножидкости с SiO₂, $\varphi = 5$ % для случая смешанной конвекции при $Re = 66,7$ и $\Delta T = 20$ °C между течением на входе и нагретой стенкой вниз по потоку. Течение полностью развитое на кромке уступа. Имеется область рециркуляции, присоединенная к стенке уступа, размер которой велик вблизи уступа и убывает с увеличением расстояния вниз по потоку от уступа до ее исчезновения. Имеется вихрь, расположенный в промежутке между областью рециркуляции и нагретой стенкой ниже по потоку. Этот вихрь появился вследствие того, что часть потока на поверхности зоны рециркуляции имеет низкую отрицательную скорость; на нее воздействует сила плавучести и она движется по направлению к нагретой стенке, а затем течение меняет свое направление на положительное. Вниз по потоку от уступа, где область рециркуляции уменьшилась, течение с положительной скоростью ниже по потоку у стенки, объединяется с течением, которое возникает из-за внезапного расширения канала и не рецир-

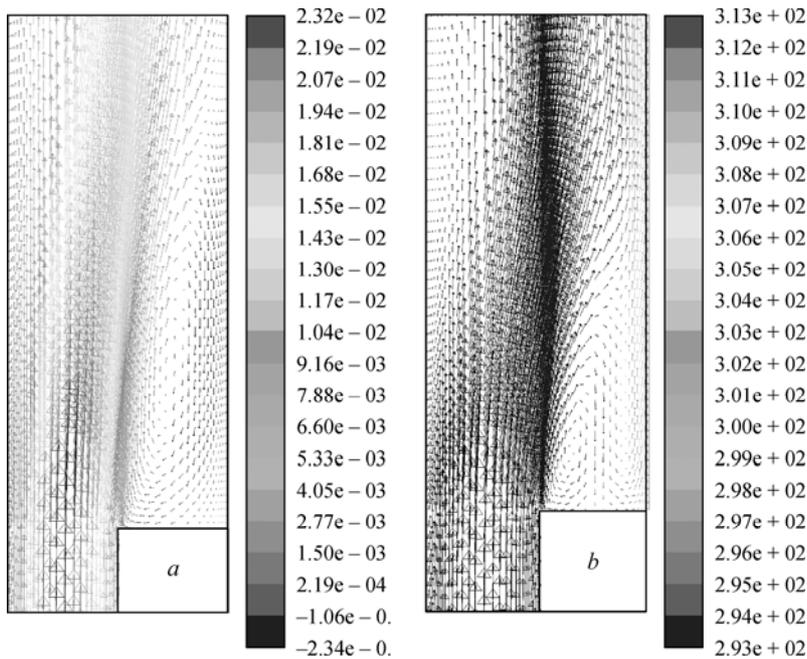


Рис. 4. Векторы скорости наножидкости с SiO_2 для вынужденного конвективного течения (a), поле полной температуры наножидкости с SiO_2 для смешанного конвективного течения (b) при $\varphi = 5\%$, $\text{Re} = 66,7$, $\Delta T = 0$ (a) и 20 (b) $^\circ\text{C}$.

кулирует. Эти течения имеют разные температуры и после их перемешивания реализуется смешанное течение с некоторой температурой и переносом вниз по потоку. Заметим отсутствие точки повторного присоединения на стенке вниз по потоку в противоположность случаю вынужденной конвекции (рис. 4, a).

Профиль скорости

На рис. 5, a–d показаны профили скорости различных наножидкостей с $\varphi = 5\%$ при $\text{Re} = 66,7$ и $\Delta T = 0$ $^\circ\text{C}$ в нескольких сечениях X/s . На входе в канал задавался однородный профиль скорости, и течение развивалось по мере его продвижения вдоль стенки уступа выше по потоку до тех пор, пока не приобретало полностью развитый параболический профиль перед расширением канала, как показано на рис. 5, a. Можно видеть, что наножидкости с низкой плотностью (такие как SiO_2) имеют более высокий пик профиля скорости по сравнению с наножидкостями высокой плотности (Au). В выражении для числа Рейнольдса ($\text{Re} = \rho u_\infty D_h / \mu$) все параметры сохраняются постоянными за исключением плотности ρ и средней скорости на входе u_∞ , так что когда плотность растёт, то скорость будет убывать, чтобы поддерживать постоянное число Рейнольдса. Поток отрывается от кромки уступа из-за внезапного расширения канала и натекает на стенку ниже по потоку. Течение разделяется на две части: одна из них движется вниз по потоку от уступа, другая — в противоположном направлении к стенке уступа и образует область рециркуляции. Между ними находится зона повторного присоединения, где скорость имеет нулевую величину, а место падения разделяющей линии тока на стенку называется точкой повторного присоединения (см. рис. 5, b, c). Ниже по потоку

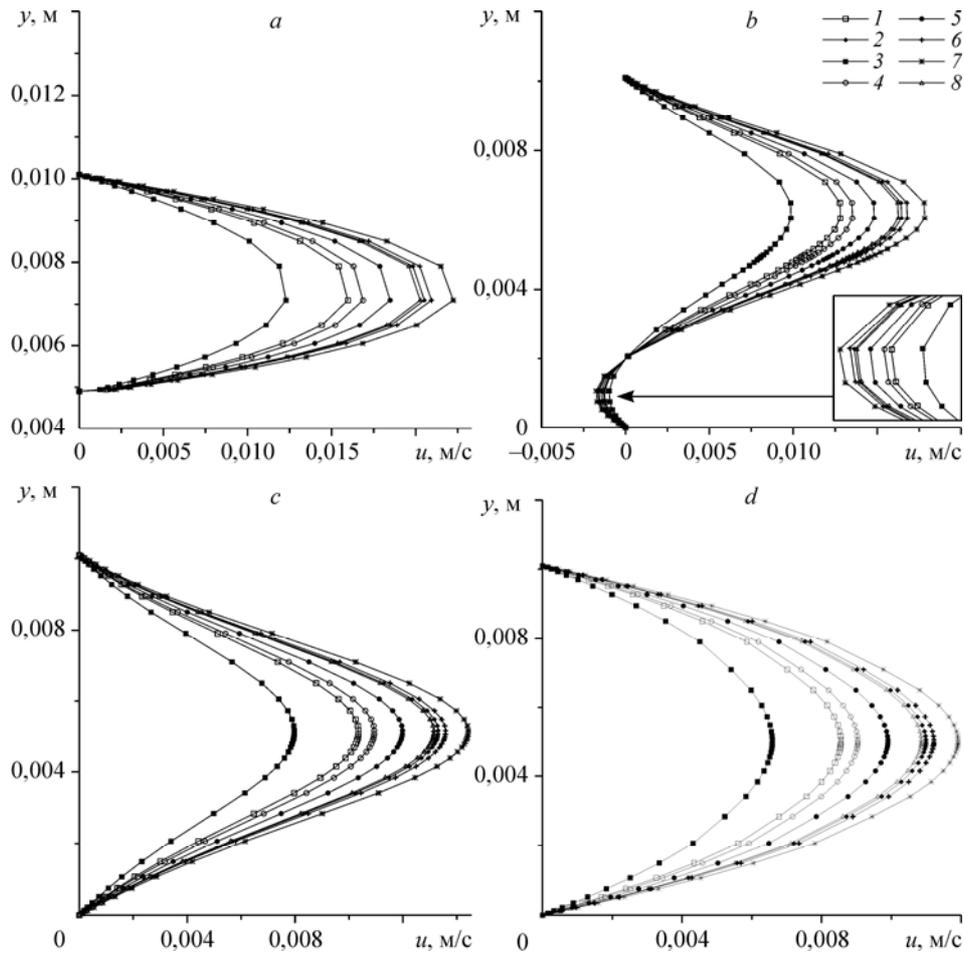


Рис. 5. Профили скорости различных наножидкостей с $\varphi = 5\%$ для $Re = 66,7$ и $\Delta T = 20\text{ }^\circ\text{C}$ при $X/s = 0$ (a), 2,55 (b), 4,80 (c); выходное сечение (d).
Ag (1), Al_2O_3 (2), Au (3), Cu (4), CuO (5), алмаз (6), SiO_2 (7), TiO_2 (8).

от точки присоединения течение начинает вновь развиваться и становится полностью развитым до выходного сечения, как показано на рис. 5, d. Отметим, что наножидкость с низкой плотностью имеет более высокую скорость течения по сравнению с наножидкостями высокой плотности.

На рис. 6, a–f показаны профили скорости различных наножидкостей с $\varphi = 5\%$ при $Re = 66,7$ и $\Delta T = 20\text{ }^\circ\text{C}$ для различных сечений X/s . Из рис. 6, a (при $X/s = 0$) видно, что наножидкости с низкой плотностью, такие как SiO_2 , имеют более высокое распределение скорости на кромке уступа, чем наножидкости с высокой плотностью, подобные Au, при постоянном числе Рейнольдса. Наблюдаются два противоположных течения за стенкой уступа как показано на рис. 6, b (при $X/s = 1$): одно из них имеет пик отрицательной скорости вследствие области рециркуляции, которая присоединена к уступу, второе течение — вихрь, который покидает область рециркуляции и изменяет свое направление вниз по потоку в канале из-за силы плавучести. Это отображено на рис. 4, b. Рециркуляция происходит между вихрем, присоединенным к стенке, и основным расширенным потоком,

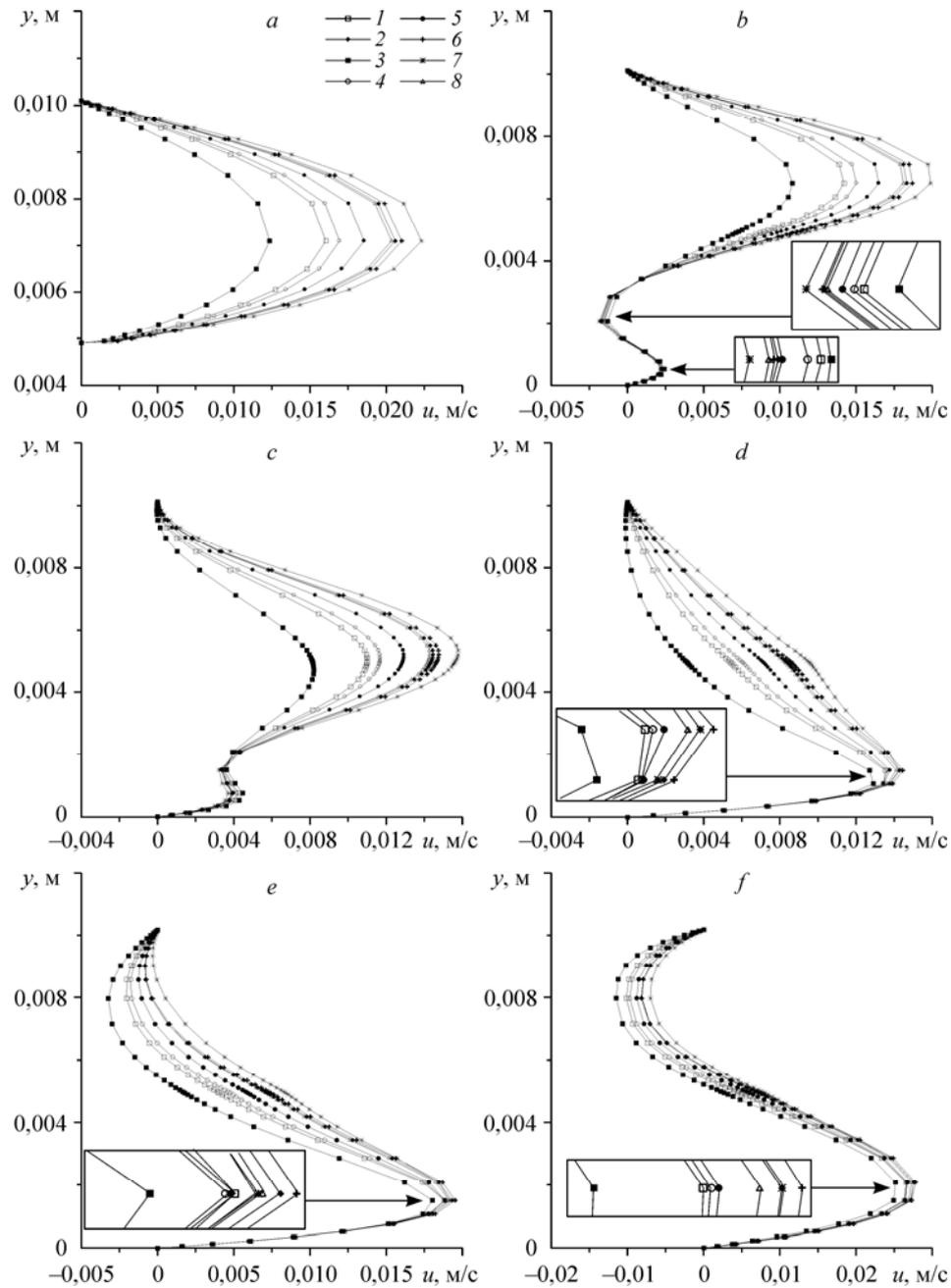


Рис. 6. Профили скорости различных наножидкостей с $\varphi = 5\%$ для $Re = 66,7$ и $\Delta T = 20\text{ }^\circ\text{C}$ при $X/s = 0$ (a), 1 (b), 2,55 (c), 13,57 (d), 30 (e); выходное сечение (f).
Ag (1), Al_2O_3 (2), Au (3), Cu (4), CuO (5), алмаз (6), SiO_2 (7), TiO_2 (8).

которые смыкаются в конце зоны рециркуляции и имеют одинаковое направление. Найдено, что в рециркуляционной области наножидкости с низкой плотностью имеют более высокий отрицательный пик в профиле скорости, чем наножидкости с высокой плотностью. Это связано с высоким распределением скорости перед расширением канала. С другой стороны, обнаружено, что наножидкости с более высокой плотностью имеют более высокий положительный пик в профиле

скорости вихревого течения, присоединенного к стенке. Это приращение в положительном профиле скорости можно объяснить следующим образом: наножидкости с высокой плотностью имеют более низкую скорость в области рециркуляции, где они нагреты до более высокой температуры и движутся в направлении потока вследствие влияния силы плавучести перед другими наножидкостями с низкой плотностью. После этого скорость вблизи нагретой стенки увеличивается с увеличением расстояния от уступа, так как течение становится менее плотным, и наоборот для течения вблизи верхней стенки и в середине канала из-за приращения плотности, как показано на рис. 6, *c, d*.

Такое положение дел сохраняется до тех пор, пока течение не достигнет выходного сечения, как показано на рис. 6, *e-f*, где течение вблизи нагретой стенки имеет максимальную пиковую скорость, а вблизи верхней стенки — минимальную вследствие влияния плавучести. Из рис. 6, *d-f* видно, что алмазная наножидкость имеет максимальную пиковую скорость в отличие от SiO_2 , как это наблюдается на рис. 6, *a*. Это происходит потому, что алмазная наножидкость имеет более высокую теплопроводность, чем наножидкость с SiO_2 , хотя последняя имеет несколько более низкую плотность, чем алмазная наножидкость. Напротив, наножидкость с Au имеет минимальную пиковую скорость, потому что она имеет самую высокую плотность среди других наножидкостей, хотя и при более высокой теплопроводности.

На рис. 7, *a-f* показаны профили скорости наножидкости с SiO_2 с $\varphi = 5\%$ при $\text{Re} = 66,7$ с различными разностями температур ΔT при различных X/s . На рис. 7, *a* ясно видно, что разность температур имеет слабое влияние на профили скорости в сечении кромки уступа при учете силы плавучести. Выявлено, что полностью развитый профиль скорости слегка изгибается в направлении к нагретой стенке вниз по потоку вследствие влияния силы плавучести. После расширения канала течение отрывается, и развивается область рециркуляции вниз по потоку от уступа, как показано на рис. 7, *b, c*. Найдено, что размер области рециркуляции больше для случая вынужденного конвективного потока при $\Delta T = 0$, чем в случае смешанного конвективного потока при $\Delta T \neq 0$. Это происходит потому, что в смешанном конвективном потоке область рециркуляции находится между вихревым и основным отрывным течением, и она не присоединена к стенке ниже по потоку. Иными словами, размер области рециркуляции имеет обратное соотношение с разницей температур. Кроме того, в случае смешанной конвекции вихревое течение у стенки ниже по потоку присоединено и смешано с основным отрывным течением, как это объяснено выше. Скорость смешанного течения увеличивается в направлении потока на нагретой стенке вниз по потоку, так как уровень плавучести увеличивается, что показано на рис. 7, *d*. Кроме того, видно, что скорость вблизи верхней стенки растет в направлении, противоположном направлению течения, так как уровень плавучести увеличивается, и его величина растет по мере приближения к выходу канала (см. рис. 7, *e, f*). Течение вниз по потоку от области рециркуляции для случая вынужденной конвекции при $\Delta T = 0$ вновь развивается и приобретает развитый параболический профиль благодаря отсутствию силы плавучести.

На рис. 8, *a-f* отображены профили скорости наножидкости с SiO_2 при $\varphi = 5\%$ для различных чисел Рейнольдса с $\Delta T = 20\text{ }^\circ\text{C}$ при различных X/s . На рис. 8, *a* показано, что скорость течения наножидкости с SiO_2 возрастает с увеличением числа Рейнольдса. Кроме того, установлено, что рециркуляция увеличивается

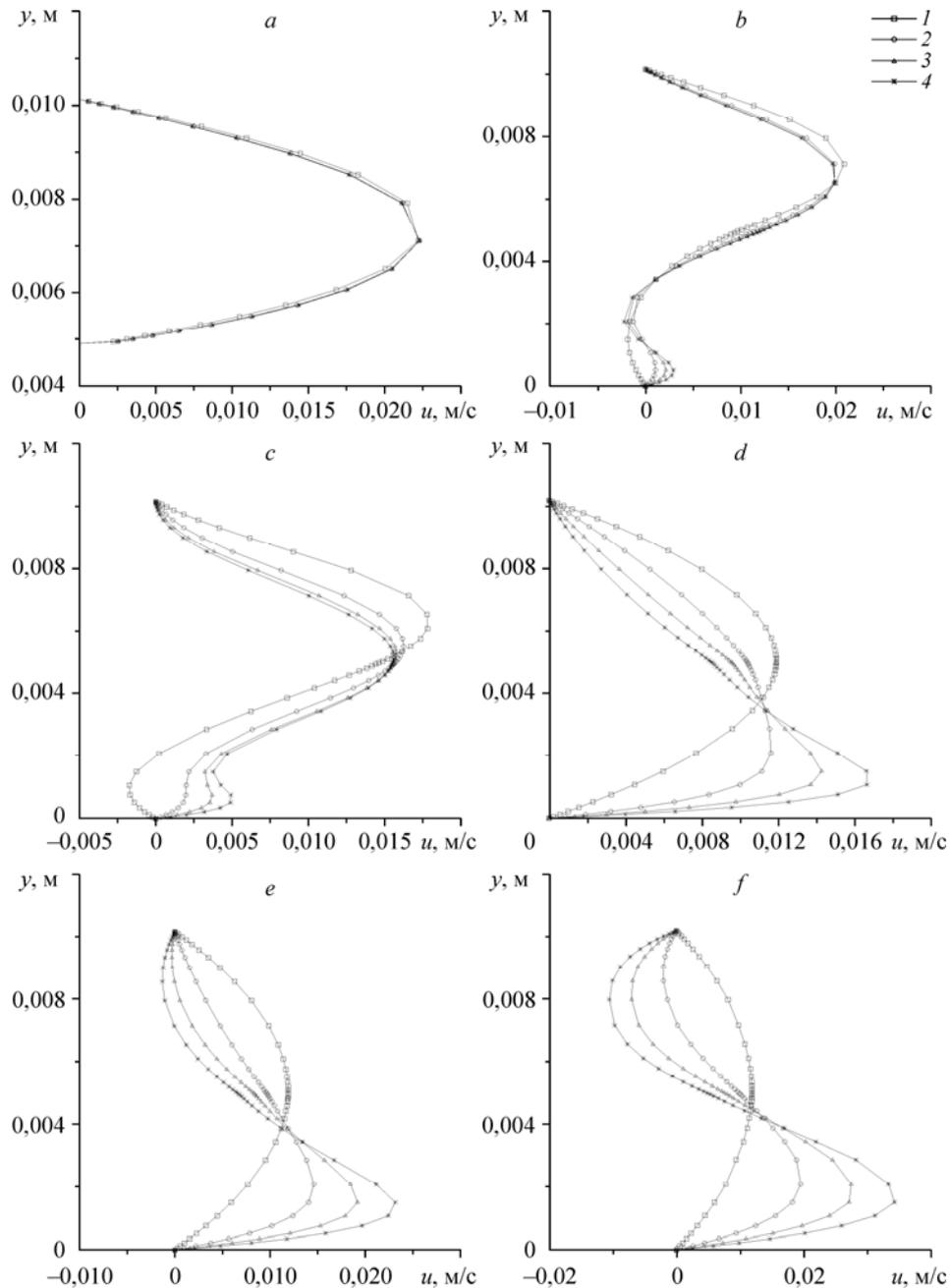


Рис. 7. Профиль скорости наножидкости с SiO_2 , $\varphi = 5\%$ при различных разностях температуры для $\text{Re} = 66,7$: $X/s = 0$ (a), 1 (b), 2,55 (c), 13,57 (d), 30 (e); выход (f).

$\Delta T = 0$ (1), 10 (2), 20 (3), 30 (4) °C.

с ростом числа Рейнольдса, и наоборот для отрицательного профиля скорости у верхней стенки, как показано на рис. 8, *b–f*. Напротив, возвратное течение, покидающее зону рециркуляции течение и присоединяющееся к стенке с уступом, увеличивается в направлении потока с уменьшением числа Рейнольдса. Это происходит потому, что течение с низкой скоростью более подвержено увеличению своей температуры, и сила плавучести становится преобладающей, как показано на рис. 8, *b, c*.

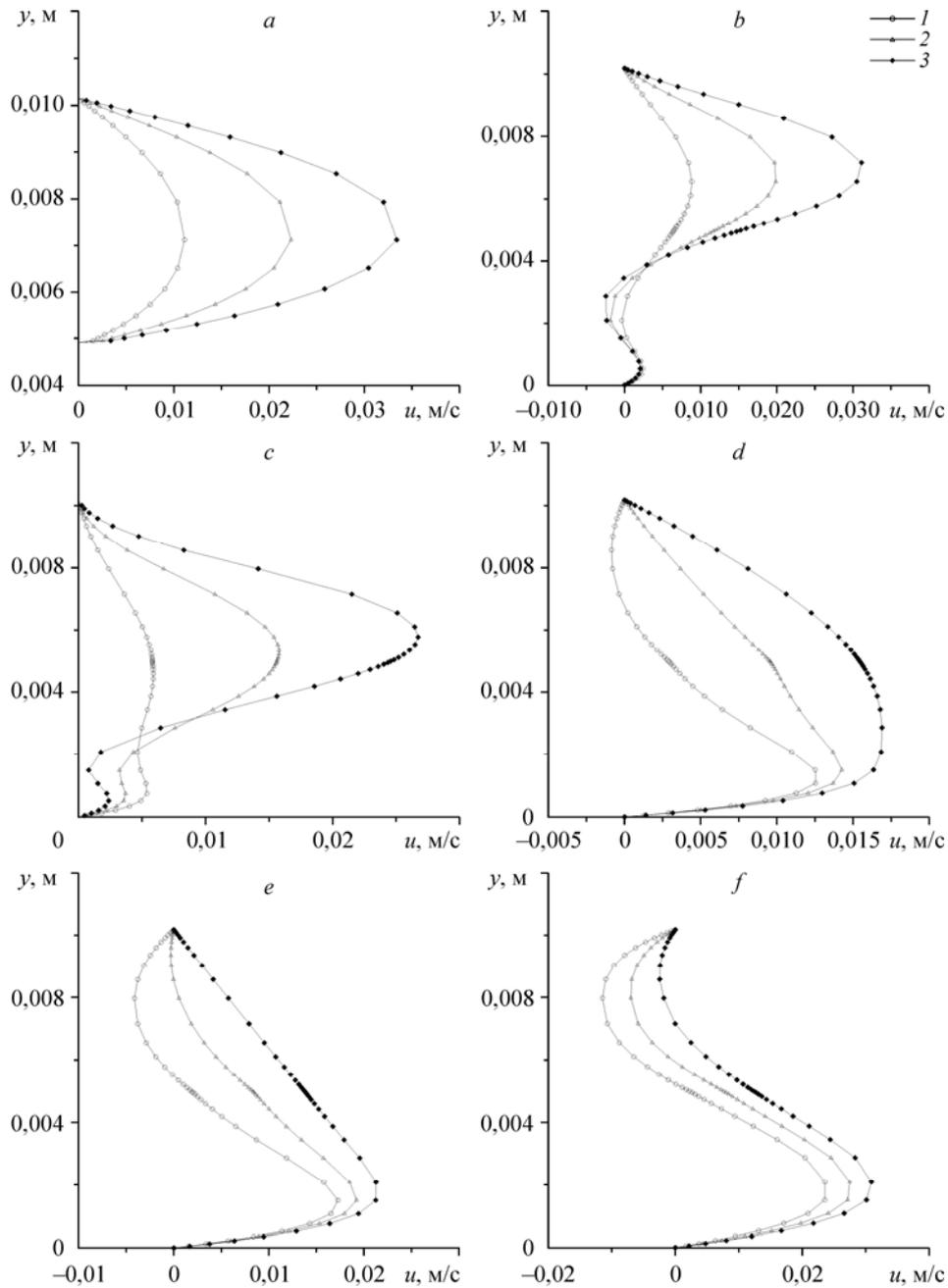


Рис. 8. Профили скорости наножидкости с SiO_2 при $\varphi = 5\%$ для различных чисел Рейнольдса для $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ при $X/s = 0$ (a), 1 (b), 2,55 (c), 13,57 (d), 30 (e); выходное сечение (f).
 $\text{Re} = 33,3$ (1), 66,7 (2), 100 (3).

Коэффициент трения

На рис. 9, а показаны распределения коэффициента трения C_{fr} различных наножидкостей с $\varphi = 5\%$ вдоль стенки вниз по потоку. Видно, что C_{fr} постепенно увеличивается до тех пор, пока не достигнет оптимального значения на расстоянии менее 3 см от выхода, и затем он быстро убывает к выходному сечению

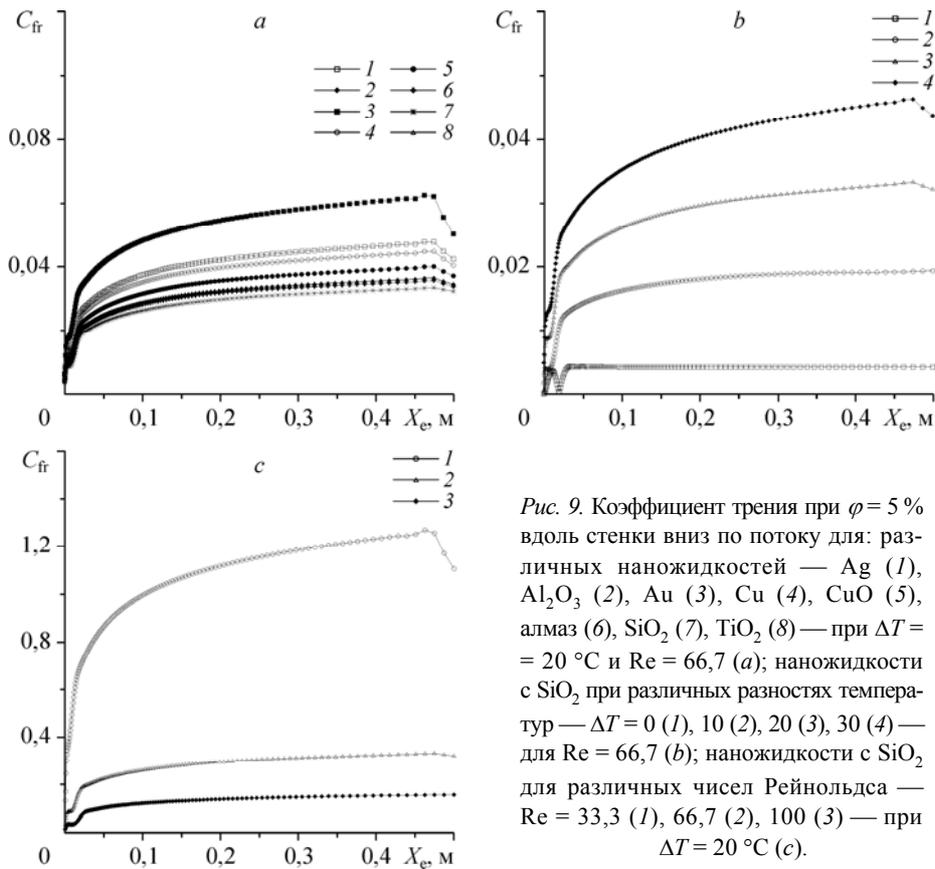


Рис. 9. Коэффициент трения при $\phi = 5\%$ вдоль стенки вниз по потоку для: различных наножидкостей — Ag (1), Al_2O_3 (2), Au (3), Cu (4), CuO (5), алмаз (6), SiO_2 (7), TiO_2 (8) — при $\Delta T = 20\text{ °C}$ и $Re = 66,7$ (a); наножидкости с SiO_2 при различных разностях температур — $\Delta T = 0$ (1), 10 (2), 20 (3), 30 (4) — для $Re = 66,7$ (b); наножидкости с SiO_2 для различных чисел Рейнольдса — $Re = 33,3$ (1), 66,7 (2), 100 (3) — при $\Delta T = 20\text{ °C}$ (c).

вследствие концевго эффекта. Также заметно, что коэффициент трения увеличивается с убыванием скорости. Это происходит потому, что коэффициент трения — безразмерный множитель касательного напряжения на стенке ($\tau/(1/2)\rho u_{\infty}^2$). Найдено, что жидкость с Au имеет самый высокий коэффициент трения, а наножидкость с SiO_2 имеет самый низкий коэффициент трения среди других наножидкостей.

На рис. 9, b показаны распределения коэффициента трения наножидкости с SiO_2 при $\phi = 5\%$ для различных разностей температур при $Re = 66,7$ вдоль стенки вниз по потоку. Трение увеличивается с ростом разности температур вследствие приращения касательного напряжения на стенке. С другой стороны, имеется более высокий пик минимума коэффициента трения при $\Delta T = 0\text{ °C}$, прежде чем он достигает постоянного значения, вплоть до выходного сечения. Это происходит потому, что в этом случае область рециркуляции больше, и она присоединена к стенке за уступом, в то время как течение со смешанной конвекцией имеет меньшую область рециркуляции, которая не присоединена к стенке с уступом и уменьшается с ростом разности температур. Кроме того, видно, что C_{fr} уменьшается в окрестности выхода и увеличивается с ростом разности температур. Это происходит вследствие того, что температура на выходе равна 0 °C , так что когда температура на стенке с уступом растет, то разность температур между стенкой с уступом и на выходе увеличивается.

На рис. 9, c показан коэффициент трения наножидкости с SiO_2 при $\phi = 5\%$ для различных чисел Рейнольдса при $\Delta T = 20\text{ °C}$ вдоль стенки вниз по потоку, который уменьшается с ростом числа Рейнольдса. Это происходит потому, что скорость течения прямо пропорциональна числу Рейнольдса и обратно

пропорциональна коэффициенту трения. Поэтому, когда скорость растет, величина числа Рейнольдса увеличивается и коэффициент трения уменьшается при постоянстве остальных переменных.

Число Нуссельта

На рис. 10, *a* представлено распределение числа Нуссельта различных наножидкостей с $\varphi = 5\%$ для $Re = 66,7$ и $\Delta T = 20\text{ }^\circ\text{C}$ вдоль стенки вниз по потоку за уступом. Видно, что число Нуссельта быстро растет и достигает своего максимального значения вблизи стенки уступа. Это происходит из-за более холодного возвратного течения, которое покинуло область рециркуляции и контактировало с нагретой стенкой ниже по потоку и образовало вихревое течение; это внезапное сужение потока слегка уменьшает разность температур. С другой стороны, число Нуссельта слегка увеличивается до тех пор, пока оно не достигнет своего оптимального значения. После этого число Нуссельта убывает вследствие приращения разности температур до тех пор, пока оно не достигнет минимального значения там, где возвратное течение объединяется с основным отрывным течением, которое имеет более низкую температуру, как это было указано выше. В этой точке число Нуссельта снова увеличивается из-за убывания температуры в процессе перемешивания до тех пор, пока не достигнет второго пика максимума, где смешанное течение имеет равную температуру. С той точки, где заканчивается влияние рециркуляции, число Нуссельта постепенно убывает.

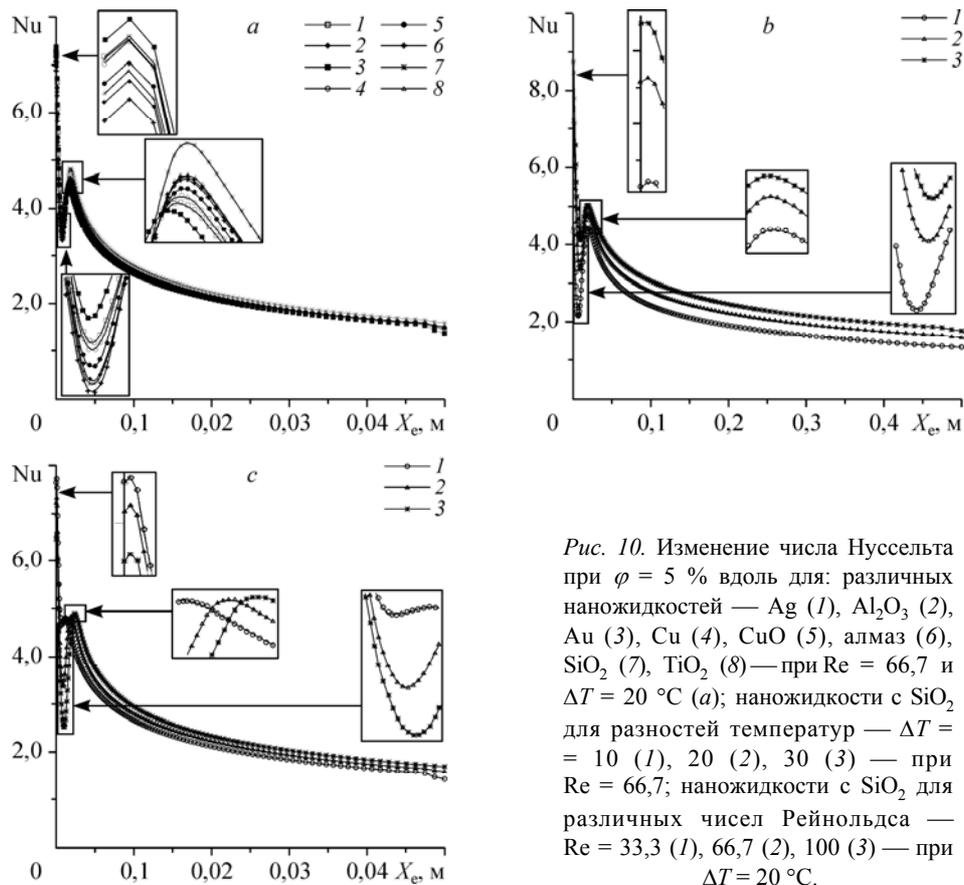


Рис. 10. Изменение числа Нуссельта при $\varphi = 5\%$ вдоль для: различных наножидкостей — Ag (1), Al_2O_3 (2), Au (3), Cu (4), CuO (5), алмаз (6), SiO_2 (7), TiO_2 (8) — при $Re = 66,7$ и $\Delta T = 20\text{ }^\circ\text{C}$ (a); наножидкости с SiO_2 для разностей температур — $\Delta T = 10$ (1), 20 (2), 30 (3) — при $Re = 66,7$; наножидкости с SiO_2 для различных чисел Рейнольдса — $Re = 33,3$ (1), 66,7 (2), 100 (3) — при $\Delta T = 20\text{ }^\circ\text{C}$.

В предыдущем разделе отмечалось, что теплопроводность и удельная теплоемкость влияют на течение и теплообмен наряду с плотностью и вязкостью. По этой причине диапазоны пиков максимума и минимума наножидкостей изменяются, когда течение меняет свою температуру. Было отмечено, что в первом пике максимума наножидкости с высокой плотностью и низкой удельной теплоемкостью имеют более высокое число Нуссельта, в то время как у наножидкости с низкой плотностью и удельной теплоемкостью более низкое число Нуссельта. Однако этот случай неприменим к наножидкости с SiO_2 , так как она имеет второй, самый высокий пик максимума числа Нуссельта, хотя у нее самая низкая плотность и самая высокая удельная теплоемкость среди других наножидкостей. Это можно объяснить большим различием в теплофизических свойствах по сравнению с другими наножидкостями. Кроме того, точка минимума числа Нуссельта показывает, что наножидкости с низкой плотностью и высокой удельной теплоемкостью обладают самым высоким минимальным пиковым числом Нуссельта, и обратное утверждение имеет место для наножидкостей с высокой плотностью и низкой удельной теплоемкостью. Однако этот случай также неприменим к жидкости с SiO_2 , которая имеет второе, самое высокое минимальное пиковое число Нуссельта. После того, как влияние рециркуляции исчезает и возникает второй пик максимума, наножидкости с высоким числом Прандтля имеют более высокое максимальное пиковое число Нуссельта, и оно убывает с уменьшением числа Прандтля. Можно заметить, что на жидкость с SiO_2 не распространяется вышеупомянутое отличие там, где имеется влияние рециркуляции.

На рис. 10, *b* показано распределение числа Нуссельта наножидкости с SiO_2 при $\phi = 5\%$ для различных разностей температур при $Re = 66,7$ вдоль нагретой стенки. Видно, что число Нуссельта увеличивается с ростом разности температур вследствие приращения градиента температуры на стенке.

На рис. 10, *c* отобрано число Нуссельта наножидкости с SiO_2 при $\phi = 5\%$ для различных чисел Рейнольдса при $\Delta T = 20\text{ }^\circ\text{C}$. Установлено, что первый пик максимума числа Нуссельта имеет место в возвратном течении, которое покидает область рециркуляции. В этом разделе отмечено, что число Нуссельта уменьшается с увеличением числа Рейнольдса. Кроме того, видно, что наножидкость с низким числом Рейнольдса имеет меньшую область рециркуляции, и возвратное течение вихря перемешивается с основным отрывным течением ближе к стенке уступа. Найдено, что течение с высоким числом Рейнольдса имеет самое низкое пиковое минимальное число Нуссельта в области перемешивания вихревого течения и основного отрывного течения. Видно, что ниже по потоку от области рециркуляции и перемешивания число Нуссельта увеличивается с ростом числа Рейнольдса.

Выводы

Представлены результаты численного моделирования двумерного ламинарного смешанного конвективного течения над обратным уступом, помещенным в вертикальный канал, с использованием различных наножидкостей. Исследовано влияние числа Рейнольдса, разности температур и состава наножидкости на характеристики течения жидкости и теплообмена. Сформулируем выводы этого исследования:

- размер рециркуляции увеличивается с ростом числа Рейнольдса;
- наножидкость с низкой плотностью (такая как SiO_2) имеет более высокую скорость течения, чем наножидкости с высокой плотностью (подобно Au) на стенке вверх по потоку от уступа поверхности;

- наножидкость с алмазными частицами, имеющая самую высокую теплопроводность, имеет самую высокую скорость в окрестности нагретой стенки за пределами области перемешивания вихря и основного отрывного течения;
- наножидкость с Au имеет самую высокую минимальную скорость в окрестности верхней стенки;
- в случае смешанной конвекции за ступенькой отсутствует зона присоединения потока, как в случае течения вынужденной конвекции;
- коэффициент трения убывает с увеличением чисел Рейнольдса и Прандтля;
- наножидкость с SiO₂ имеет самые высокие пики максимума числа Нуссельта по сравнению с другими наножидкостями вниз по потоку от области перемешивания вихревого и основного отрывного течений;
- пики максимума и минимума числа Нуссельта вверх по потоку от зоны перемешивания вихря и основного отрывного течения упорядочены на основе их плотностей и удельных теплоемкостей, однако наножидкость с SiO₂ не вписывается в эту последовательность наножидкостей вследствие особенностей изменения ее теплофизических свойств по сравнению с другими наножидкостями.

Обозначения

AR — отношение W/s ,	T — температура, К,
C_{fr} — коэффициент трения, $(\tau/(1/2) \rho u_\infty^2)$,	T_∞ — температура на входе или на верхней стенке,
C_p — удельная теплоемкость, $kJ/kg \cdot K$	U — безразмерная составляющая скорости вдоль потока,
D_h — гидравлический диаметр на входе, $2h$, м,	u — составляющая скорости в направлении оси x , м/с,
ER — отношение расширения, H/h ,	u_1 — локальная скорость на входе, м/с,
Gr — число Грасхофа, $g\beta\Delta T s^3/\nu^2$,	u_∞ — средняя скорость течения на входе, м/с,
g — ускорение силы тяжести, m/c^2	V — безразмерная поперечная составляющая скорости,
H — полная высота канала, м,	v — составляющая скорости в направлении оси y , м/с,
h — коэффициент конвективного теплопереноса, $вт/м^2 \cdot K$	W — ширина, м,
k — теплопроводность, $вт/м \cdot K$,	χ — безразмерная длина в координате x ,
L — полная длина канала, м,	X — длина в направлении оси x ,
Nu — число Нуссельта, hL/k ,	X_1, X_e — длины вверх и вниз по потоку, м,
P — безразмерное давление,	X_r — длина присоединения, м,
p — давление, Па,	x, y — координатные направления,
Pr — число Прандтля, ν/α ,	Y — безразмерная длина в координате y ,
q — тепловой поток, $вт/м^2$,	y — длина в координате y .
Re — число Рейнольдса, $\rho u_\infty D_h/\mu$,	
Ri — число Ричардсона, Gr_s/Re_s^2 ,	
s — высота ступеньки, м,	

Греческие символы

β — коэффициент теплового расширения, $1/T$,	\emptyset — угол наклона,
ρ — плотность, $кг/м^3$,	ν — кинематическая вязкость,
μ — динамическая вязкость, $н \cdot м/с$,	α — температуропроводность, $м^2/с$,
φ — объемная доля наночастиц,	θ — безразмерная температура.
Δ — величина разности,	

Нижние индексы

o — выход,	s — твердое тело,
f — базовая жидкость,	w — стенка.
nf — наножидкость,	

Список литературы

1. **Abu-Mulaweh H.I.** A review of research on laminar mixed convection flow over backward- and forward-facing steps // *Int. J. Thermal Sciences*. 2003. Vol. 42. P. 897–909.
2. **Denhum M.K., Patrick M.A.** Laminar flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel // *Trans. Instn. Chem. Engrs*. 1974. Vol. 52. P. 361–367.
3. **Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B.** Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // *J. Fluid Mech*. 1983. Vol. 127. P. 473–496.
4. **Armaly B.F., Durst F., Kottke V.** Momentum heat and mass transfer in backward-facing step flows // *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Mc Graw-Hill, 1980.
5. **Shih C., Ho C.M.** Three-dimensional recirculation flow in a backward facing step // *J. Fluids Engng*. 1994. Vol. 116. P. 228–232.
6. **Chiang T.P., Sheu T.W.H., Tsai S.F.** Topological flow structures in backward-facing step channels // *Computers and Fluids*. 1997. Vol. 26. P. 321–337.
7. **De Brederode V., Bradshaw P.** Three-dimensional flow in normally two-dimensional separation bubbles. I. flow behind a rearward-facing step // *I.C. Aero Report*. 1972. No. 72-19.
8. **Hertzberg J., Ho C.M.** Vortex dynamics in a rectangular sudden expansion // *AIAA J*. 1992. Vol. 30, No. 10. P. 2420–2425.
9. **Tylli N., Kaiktsis L., Ineichen B.** Sidewall effect in flow over a backward-facing step: experiments and numerical simulations // *American Institute of Physics*. 2002. Vol. 14. P. 3835–3845.
10. **Armaly B.F., Li A., Nie J.H.** Measurements in three-dimensional laminar separated flow // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2003. Vol. 46. P. 3573–3582.
11. **Nie J. H., Armaly B.F.** Reverse flow regions in three-dimensional backward-facing step flow // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2004. Vol. 47. P. 4713–4720.
12. **Aung W.** An experimental study of laminar heat transfer downstream of back-step // *J. Heat Transfer*. 1983. Vol. 105. P. 823–829.
13. **Sparrow E.M., Chuck W.** PC solutions for the heat transfer and fluid flow downstream of an abrupt, asymmetric enlargement in a channel // *Numerical Heat Transfer*. 1987. Vol. 12. P. 19–40.
14. **Khanfer K., Al-Azmi B., Al-Shammari A., Pop L.** Mixed convection analysis of laminar pulsating flow and heat transfer over a backward-facing step // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2008. Vol. 51. P. 5785–5793.
15. **Chen Y.T., Nie J.H., Armaly B.F., Hsieh H.** Turbulent separated convection flow adjacent to backward-facing step-effects of step height // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2006. Vol. 49. P. 3670–3680.
16. **Iwai H., Nakabe K., Suzuki K.** Flow and heat transfer characteristics of backward-facing step laminar flow in a rectangular duct // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2000. Vol. 43. P. 457–471.
17. **Nie J.H., Armaly B.F.** Three-dimensional convective flow adjacent to backward-facing step-effects of step height // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2002. Vol. 45. P. 2431–2438.
18. **Armaly B.F., Li A., Nie J.H.** Three-dimensional forced convection flow adjacent to backward-facing step // *J. Thermophysics Heat Transfer*. 2002. Vol. 16. P. 222–227.
19. **Barbosa J.G., Saldana, Anand N.K.** Forced convection over a three-dimensional horizontal backward facing step // *Int. J. Computational Engng. Sci*. 2004. Vol. 11. P. 150–162.
20. **Barbosa J.G., Saldana, Anand N.K., Sarin V.** Numerical simulation of mixed convective flow over a three-dimensional horizontal backward facing step // *J. Heat Transfer*. 2005. Vol. 127. P. 1027–1036.
21. **Lan H., Armaly B.F., Drameier J.A.** Three-dimensional simulation of turbulent forced convection in a duct with backward-facing step // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2009. Vol. 52. P. 1690–1700.
22. **Lin J.T., Armaly B.F., Chen T.S.** Mixed convection heat transfer in inclined backward-facing step flows // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1991. Vol. 34, No. 6. P. 1568–1571.
23. **Lin J.T., Armaly B.F., Chen T.S.** Heat transfer in buoyancy-assisted, vertical backward-facing step flow // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1990. Vol. 33. P. 2121–2132.
24. **Hong B., Armaly B.F., Chen T. S.** Laminar mixed convection in a duct with a backward-facing step: the effects of inclination angle and Prandtl number // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1993. Vol. 36, No. 12. P. 3059–3067.
25. **Abu-Mulaweh H.I., Armaly B.F., Chen T.S.** Measurements of laminar mixed convection in boundary-layer flow over horizontal and inclined backward-facing steps // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1993. Vol. 36, No. 7. P. 1883–1895.
26. **Iwai H., Nakabe K., Suzuki K., Matsubara K.** The effects of duct inclination angle on laminar mixed convective flows over a backward-facing step // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2000. Vol. 43. P. 473–485.
27. **Lin J.T., Armaly B.F., Chen T.S.** Mixed convection in buoyancy-assisting, vertical backward-facing step flows // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1990. Vol. 43. No. 10. P. 2121–2132.
28. **Aung W., Worku G.** Theory of fully developed, combined convection including flow reversal // *J. Heat Transfer*. 1985. Vol. 108. P. 485–488.
29. **Hong B., Armaly B.F., Chen T.S.** Mixed convection in a vertical duct with a backward-facing step: uniform wall heat flux case, in: *Fundamental of Mixed Convection* // ASME Winter Annual Meeting, in: *HTD* 1992. Vol. 213. P. 73–78.

30. **Baek B.J., Armaly B.F., Chen T. S.** Measurements in buoyancy-assisting separated flow behind a vertical backward-facing step // *J. Heat Transfer*. 1993. Vol. 115. P. 403–408.
31. **Abu-Mulaweh H.I., Armaly B.F., Chen T.S.** Measurements in buoyancy-assisting laminar boundary layer flow over a vertical backward-facing step-uniform wall heat flux case // *Experimental Thermal Fluid Sci.* 1993. Vol. 7. P. 39–48.
32. **Abu-Mulaweh H.I., Armaly B.F., Chen T.S.** Measurements in buoyancy-opposing laminar flow over a vertical backward-facing step // *J. Heat Transfer*. 1994. Vol. 116. P. 247–250.
33. **Abu-Mulaweh H.I., Armaly B.F., Chen T.S.** Effects of upstream wall heating on mixed convection in separated flows // *J. Thermophys. Heat Transfer*. 1995. Vol. 9. P. 715–721.
34. **Iwai H., Nakabe K., Suzuki K., Mastubara K.** Numerical simulation of buoyancy-assisting backward-facing step flow and heat transfer in a rectangular duct // *Heat Transfer Asian Res.* 1999. Vol. 28. P. 58–76.
35. **Abu-Nada E.** Application of nanofluids for heat transfer enhancement of separated flows encountered in a backward facing step // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2008. Vol. 29. P. 242–249.
36. **Al-aswadi A.A., Mohammed H.A., Shuaib N.H., Campo A.** Laminar forced convection flow over a backward facing step using nanofluids // *Int. Communications Heat Mass Transfer*. 2010. Vol. 37. P. 950–957.
37. **Wang X., Mujumdar A. S.** Heat transfer characteristics of nanofluids: A review // *Int. J. Thermal Sci.* 2007. Vol. 46, No. 1. P. 1–19.
38. **Kakac S., Pramuanjaroenkij A.** Review of convective heat transfer enhancement with nanofluids // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2009. Vol. 52. P. 3187–3196.
39. **Yu W., France D.M., Roubort J.L., Choi S.U.S.** Review and comparison of nanofluid thermal conductivity and heat transfer enhancements // *Heat Transfer Engng.* 2008. Vol. 29, No. 5. P. 432–460.
40. **Velagapudi V., Konijeti R.K., Aduru C.S.K.** Empirical correlations to predict thermophysical and heat transfer characteristics of nanofluids // *Thermal Sci.* 2008. Vol. 12, No. 2. P. 27–37.
41. **Brinkman H.C.** The viscosity of concentrated suspensions and solutions // *J. Chemistry Physics*. 1952. Vol. 20. P. 571–581.
42. **Khanafar K., Vafai K., Lightstone M.** Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2003. Vol. 46. P. 3639–3653.
43. **Anderson J.D.** *Computational Fluid Dynamics: The Basic with Applications*. New York: Mc Graw-Hill, 1995.
44. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 124 с.

*Статья поступила в редакцию 16 июня 2010 г.,
после доработки 6 декабря 2010 г.*