УДК 514.75; 517.9

РЕШЕНИЕ ТИПА УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Р. Абазари

Филиал Исламского университета Азад в г. Ардабил, 56169-54184 Ардабил, Иран
E-mails: abazari-r@uma.ac.ir, abazari.r@gmail.com

С использованием метода (G'/G)-расширения получены точные решения в виде уединенных и периодических волн для нелинейных эволюционных уравнений математической физики с помощью символических вычислений, а именно для уравнения Клейна — Гордона с нелинейностью пятого порядка. С помощью метода (G'/G)-расширения можно получить не только более общие формы решений, но и периодические и уединенные волны. Получены решения с параметрами в гиперболических и тригонометрических функциях. Метод может быть использован при решении нелинейных эволюционных уравнений математической физики.

Ключевые слова: нелинейность пятого порядка уравнения Клейна — Гордона, метод (G'/G)-расширения, решения в гиперболических функциях, решения в тригонометрических функциях.

Введение. В последнее время большое внимание уделяется исследованию нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) математической физики, в том числе в задачах физики, биологии, химии и т. д. Так как многие физико-математические модели описываются НЭУ, аналитические решения таких уравнений имеют большое значение в математической физике. Среди возможных решений НЭУ некоторые решения специального вида, такие как солитоны, могут зависеть только от одной комбинации переменных. В математике и физике солитон является самоподдерживающейся уединенной волной, пакетом волн или импульсом, который сохраняет форму при перемещении с постоянной скоростью. Появление солитонов обусловлено наличием нелинейных и дисперсионных эффектов в среде. Дисперсионные эффекты возникают в средах, в которых скорость волн зависит от частоты. Солитоны представляют собой решения широкого класса слабонелинейных дисперсионных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих физические системы. Впервые явление солитона было описано Д. С. Расселом, который наблюдал уединенную волну в канале Юнион в Шотландии. Он воспроизвел это явление в волновом резервуаре и назвал его “волна трансляции” (решение для бегущих волн или солитонов) [1]. Как правило, решения для солитона получаются путем преобразования обратной задачи рассеяния [2] и являются устойчивыми в силу интегрируемости уравнений поля.

При построении решения для бегущей волны используются различные подходы к решению нелинейных задач, такие как метод обратной задачи рассеяния [2], преобразование Бэклунда [3], билинейный метод Хироты [4] и метод с использованием вронскиана [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Клуба молодых исследователей Филиала Исламского университета Азад в г. Ардабил.

Появление и развитие программных продуктов позволило улучшить большинство указанных методов и предложить новые алгебраические методы, такие как метод эллиптической функции Якоби [6], метод однородного баланса [7], методы представления решения с помощью тригонометрических [8], гиперболических [9] и экспоненциальных [10] функций, метод первого интеграла [11] и метод, предложенный в работе [12].

В последнее время для получения точных решений НЭУ используется метод расширения (G'/G) [13–17], разработанный в [13]. Преимуществом метода (G'/G)-расширения является то, что он позволяет получить более общие решения с некоторыми свободными параметрами. При подходящем выборе параметров эти решения оказываются известными решениями, полученными с помощью существующих методов. Кроме того, при использовании численных методов, таких как метод конечных разностей и метод конечных элементов, необходимо иметь начальные и граничные условия, в то время как в методе (G'/G)-расширения на начальном этапе решения не требуются начальное и граничное условия или начальная пробная функция. Получается общее решение со свободными параметрами, которые могут быть определены с помощью граничных и (или) начальных условий. При использовании большинства методов решения получаются в виде рядов (так называемые полуаналитические методы), поэтому необходимо исследовать сходимость рядов аппроксимации. Например, метод разложения Адомиана зависит только от начальных условий и дает решение в виде ряда, который сходится к точному решению задачи. Однако с помощью метода (G'/G)-расширения можно получить общее решение, не используя приближения. Этот метод является мощным методом интегрирования НЭУ, в том случае если критерий интегрируемости Пенлеве не выполняется. Процедура решения с использованием системы компьютерной алгебры типа Maple является очень простой.

Главная идея данного метода состоит в том, что решения нелинейных уравнений для бегущей волны могут быть выражены многочленом от G'/G, где функция $G = G(\xi)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \tag{1}$$

($\xi = kx + \omega t$; k, ω — произвольные постоянные). Степень этого многочлена можно определить из условия одинаковой степени однородности членов с производными высшего порядка и нелинейных членов нелинейных уравнений (из условия однородного баланса). Для большинства нелинейных уравнений степень этого многочлена является положительным целым числом. Однако существуют нелинейные уравнения в частных производных, в которых эта степень дробная, например уравнение Клейна — Гордона с нелинейностью пятого порядка (так называемое уравнение Клейна — Гордона II)

$$u_{tt} - p^2 u_{xx} + au - bu^3 + cu^5 = 0, \tag{2}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $c = 3b^2/(16a)$, $ab \neq 0$. Уравнение Клейна — Гордона играет важную роль в математической физике. Это уравнение используется при изучении солитонов и в физике конденсированного вещества [18], при исследовании взаимодействия солитонов в бесстолкновительной плазме, рекурсии начальных состояний, а также при изучении нелинейных волновых уравнений [19].

Уравнение (1) моделирует различные физические явления. Для таких уравнений получено много решений в различных функциональных формах различными методами [20–22]. При этом исследованию уравнений с нелинейностью пятого порядка посвящено небольшое количество работ (см., например, [20, 23]).

В данной работе показана эффективность метода (G'/G)-расширения для получения решений нелинейных уравнений. Также весьма важным является построение точных решений уравнения Клейна — Гордона II для бегущей волны (1).

1. Описание метода (G'/G)-расширения. В данном пункте излагаются основные идеи метода (G'/G)-расширения, используемого для решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Предположим, что имеется нелинейное уравнение с двумя независимыми переменными x и t:

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{x,t}, u_{tt}, \ldots) = 0. \tag{3}$$

Здесь $u(x,t)$ — неизвестная функция; P — многочлен от функции $u(x,t)$ и ее различных частных производных. В этом уравнении содержатся производные высшего порядка и нелинейные члены. Основными шагами метода (G'/G)-расширения являются следующие шаги:

Шаг 1. Вместо независимых переменных x, t введем переменную $\xi = kx + \omega t$, предполагая, что

$$u(x,t) = U(\xi). \tag{4}$$

Представление решения в виде (4) позволяет привести уравнение (3) к обыкновенному дифференциальному уравнению для $u(x,t) = U(\xi)$:

$$P(U, kU', \omega U', k^2U'', k\omega U'', \omega^2 U'', \ldots) = 0 \tag{5}$$

(штрих обозначает производную по переменной ξ).

Шаг 2. Предположим, что решение уравнения (5) можно представить в виде многочлена от G'/G:

$$U(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Big(\frac{G'}{G}\Big)^i + \alpha_0. \tag{6}$$

Здесь $\alpha_m \neq 0$; m — число баланса; α_0, α_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — константы, которые будут определены ниже; функция $G(\xi)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2G(\xi)}{d\xi^2} + \lambda \frac{dG(\xi)}{d\xi} + \mu G(\xi) = 0, \tag{7}$$

λ, μ — произвольные постоянные. Положительное целое число m может быть определено из условия однородного баланса между производными высшего порядка и нелинейными членами в (5).

Шаг 3. Подставляя (6) в уравнение (5), используя линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (7) и собирая члены одного и того же порядка G'/G, левую часть уравнения (5) преобразуем в другой многочлен от G'/G. Приравнивая каждый коэффициент этого многочлена к нулю, получаем систему алгебраических уравнений для k, ω, λ, μ, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Шаг 4. Предположим, что константы k, ω, λ, μ, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ определены из решений алгебраических уравнений, полученных на шаге 3. Поскольку общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (7) известно:

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\, \dfrac{C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\,\xi/2) + C_2 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\,\xi/2)}{C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\,\xi/2) + C_2 \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\,\xi/2)} - \dfrac{\lambda}{2}, & \lambda^2 - 4\mu > 0, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\, \dfrac{-C_1 \sin(\sqrt{4\mu - \lambda^2}\,\xi/2) + C_2 \cos(\sqrt{4\mu - \lambda^2}\,\xi/2)}{C_1 \cos(\sqrt{4\mu - \lambda^2}\,\xi/2) + C_2 \sin(\sqrt{4\mu - \lambda^2}\,\xi/2)} - \dfrac{\lambda}{2}, & \lambda^2 - 4\mu < 0, \end{cases} \tag{8}$$

подставляя k, ω, λ, μ, $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ и общие решения (8) в (6), получаем большое семейство решений нелинейного эволюционного уравнения (3) для бегущей волны.

При сравнении метода (G'/G)-расширения с модифицированным методом представления решения с помощью гиперболических функций [21], сначала кратко опишем последний метод. Предположим, что решение уравнения (5) представляется в виде конечного ряда

$$u(\xi) = \alpha_0 + \sum_{l=1}^{m} \{\alpha_l Y^l(\xi) + \beta_l Y^{-l}(\xi)\}, \tag{9}$$

где $Y(\xi)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{dY(\xi)}{d\xi^2} + Y^2(\xi) + \lambda Y(\xi) + \mu = 0, \tag{10}$$

параметр m может быть определен из условия однородного баланса. Подставляя (9) в (5) и используя (10), получаем систему алгебраических уравнений, которые можно разрешить относительно k, ω, α_l, β_l, λ, μ $(l = 1, 2, \ldots, m)$. Общее решение уравнения (10) известно. Зная эти параметры, построим аналитические решения $u(x, t)$ в замкнутой форме. Полагая $\beta_l = 0$ и $Y(\xi) = G'(\xi)/G(\xi)$ в (9) и (10), получаем (6) и (7) соответственно.

Таким образом, метод (G'/G)-расширения является более эффективным и удобным, чем модифицированный метод представления решения с помощью гиперболических функций, по следующим причинам:

1) в случае метода (G'/G)-расширения используются решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (7), которые проще получить, чем решения уравнения Риккати (10);

2) точные решения уравнения (3), полученные с использованием метода (G'/G)-расширения, содержат больше произвольных постоянных по сравнению с точными решениями, полученными с помощью модифицированного метода представления решения с помощью гиперболических функций.

Сравним метод (G'/G)-расширения и метод представления решения с помощью экспоненциальных функций. Применяя последний метод для решения уравнения (1), получаем следующие два решения:

$$G(\xi) = \frac{A_0}{B_0} \exp\Big(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\,\xi\Big), \qquad G(\xi) = \frac{A_0}{B_0} \exp\Big(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\,\xi\Big) \tag{11}$$

(A_0, B_0 — свободные параметры). Так как уравнение (1) является линейным уравнением, то линейная комбинация решений (11) представляет собой его общее решение:

$$G(\xi) = \tilde C_1 \frac{A_0}{B_0} \exp\Big(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\,\xi\Big) + \tilde C_2 \frac{A_0}{B_0} \exp\Big(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\,\xi\Big)$$

($\tilde C_1$, $\tilde C_2$ — произвольные постоянные). Поэтому

$$\frac{G'}{G} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\,\frac{\tilde C_1 \,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\,\xi/2} - \tilde C_2 \,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\,\xi/2}}{\tilde C_1 \,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\,\xi/2} + \tilde C_2 \,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\,\xi/2}} - \frac{\lambda}{2}.$$

Полагая $\tilde C_1 = C_1 + C_2$, $\tilde C_2 = C_1 - C_2$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$, получаем

$$\frac{G'}{G} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\,\frac{C_1 \,\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\,\xi/2) + C_2 \,\mathrm{ch}\,(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\,\xi/2)}{C_1 \,\mathrm{ch}\,(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\,\xi/2) + C_2 \,\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\,\xi/2)} - \frac{\lambda}{2}, \tag{12}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Полагая $\tilde C_1 = C_1 - iC_2$, $\tilde C_2 = C_1 + iC_2$ $(i \equiv \sqrt{-1}\,)$, $\lambda^2 - 4\mu < 0$, имеем

$$\frac{G'}{G} = \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\,\frac{-C_1 \sin(\sqrt{4\mu - \lambda^2}\,\xi/2) + C_2 \cos(\sqrt{4\mu - \lambda^2}\,\xi/2)}{C_1 \cos(\sqrt{4\mu - \lambda^2}\,\xi/2) + C_2 \sin(\sqrt{4\mu - \lambda^2}\,\xi/2)} - \frac{\lambda}{2}. \tag{13}$$

С использованием уравнения (1), решений (12), (13) и метода представления решения с помощью экспоненциальных функций, можно получить те же решения, что и с использованием метода (G'/G)-расширения.

Существуют следующие модификации метода (G'/G)-расширения. В [14] рассматривается представление (6), где α_i — функции; функция $G = G(\xi)$ удовлетворяет (7). В [24] рассматривается разностная форма представления (6), где α_i — константы; функция $G = G(\xi)$ удовлетворяет (7), что позволяет получить решение типа бегущей волны нелинейного дифференциально-разностного уравнения.

В п. **2** показана эффективность метода (G'/G)-расширения для решения уравнения Клейна — Гордона с нелинейностью пятого порядка (1), в случае когда число баланса не является положительным целым числом.

2. Применение метода (G'/G)-расширения для решения уравнения Клейна — Гордона с нелинейностью пятого порядка. Чтобы найти решение типа бегущей волны для уравнения Клейна — Гордона с нелинейностью пятого порядка (2), используем калибровочное преобразование

$$u(x,t) = U(\xi), \tag{14}$$

где $\xi = kx + \omega t$; k, ω — константы. Подставляя (14) в уравнение (2), получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\omega^2 - p^2k^2)U'' + aU - bU^3 + cU^5 = 0. \tag{15}$$

Согласно шагу 1 $m + 2 = 5m$, следовательно, $m = 1/2$. Предположим, что уравнение (15) имеет следующие формальные решения:

$$U = \alpha_1 (G'/G)^{1/2}, \qquad \alpha_1 \neq 0 \tag{16}$$

(α_1 — неизвестные константы, которые будут определены ниже). Тогда

$$\begin{gathered} U' = -\frac{1}{2}\,\alpha_1\Big(\frac{G'}{G}\Big)^{3/2} - \frac{1}{2}\,\alpha_1\lambda\Big(\frac{G'}{G}\Big)^{1/2} - \frac{1}{2}\,\alpha_1\mu\Big(\frac{G'}{G}\Big)^{-1/2}, \\ U'' = \frac{3}{4}\,\alpha_1\Big(\frac{G'}{G}\Big)^{5/2} + \alpha_1\lambda\Big(\frac{G'}{G}\Big)^{3/2} + \frac{1}{2}\,\alpha_1\Big(\mu + \frac{1}{2}\,\lambda^2\Big)\Big(\frac{G'}{G}\Big)^{1/2} - \frac{1}{4}\,\alpha_1\mu^2\Big(\frac{G'}{G}\Big)^{-3/2}. \end{gathered} \tag{17}$$

Подставляя уравнения (16), (17) в уравнение (15) и собирая члены одного и того же порядка величины G'/G, выражение в левой части уравнения (15) преобразуем в многочлен от G'/G. Полагая каждый коэффициент каждого многочлена равным нулю, получаем систему алгебраических уравнений для k, ω, λ, μ, α_1 в виде

$$\begin{gathered} p^2(2\mu + \lambda^2)k^2 - (2\omega^2\mu + \omega^2\lambda^2 + 4a) = 0, \\ (p^2k^2 - \omega^2)\lambda + b\alpha_1^2 = 0, \qquad 4a(p^2k^2 - \omega^2) - b^2\alpha_1^4 = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Решая систему уравнений (18) с помощью пакета Maple, получаем следующие два решения:

$$\lambda = -\frac{b}{p^2k^2 - \omega^2}\,\Big(\frac{4a(p^2k^2 - \omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}, \quad \mu = 0, \quad \alpha_1 = \pm\Big(\frac{4a(p^2k^2 - \omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}; \tag{19}$$

$$\lambda = \frac{b}{p^2k^2 - \omega^2}\,\Big(\frac{4a(p^2k^2 - \omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}, \quad \mu = 0, \quad \alpha_1 = \pm i\Big(\frac{4a(p^2k^2 - \omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4} \tag{20}$$

(k, ω — произвольные постоянные параметры, такие что $\omega \neq \pm k$).

2.1. *Первое решение.* Подставляя решения (19) в (16), находим

$$U = \pm\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big(\frac{G'}{G}\Big)^{1/2}, \tag{21}$$

где $\omega \neq \pm k$. Подставляя общие решения обыкновенного дифференциального уравнения (7) в уравнение (21), получаем два решения типа бегущей волны уравнения (2) в зависимости от знака $\lambda^2 - 4\mu$ (положительного или отрицательного).

При $D = \lambda^2 - 4\mu = a/(p^2k^2-\omega^2) > 0$, используя общие решения обыкновенного дифференциального уравнения (7), находим представление решения U_H уравнения Клейна — Гордона с нелинейностью пятого порядка (2) через гиперболические функции в виде

$$U_H(\xi) = \pm\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{D}}{2}\,\frac{C_1\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{D}\,\xi/2)+C_2\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{D}\,\xi/2)}{C_1\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{D}\,\xi/2)+C_2\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{D}\,\xi/2)} + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2}, \tag{22}$$

где $\xi = kx + \omega t$ ($\omega \neq \pm k$); C_1, C_2 — произвольные постоянные. Заметим, что при $C_1^2 > C_2^2$ гиперболическое решение (22) можно записать следующим образом:

$$u_H(x,t) = \pm\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{D}}{2}\,\mathrm{th}\,\Big(\frac{\sqrt{D}}{2}\,\xi+\eta_H\Big)+\frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2},$$

в то время как при $C_1^2 < C_2^2$ получаем

$$u_H(x,t) = \pm\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{D}}{2}\,\mathrm{ch}\,\Big(\frac{\sqrt{D}}{2}\,\xi+\eta_H\Big)+\frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2},$$

где $\xi = kx + \omega t$; $\eta_H = \mathrm{th}^{-1}\,(C_1/C_2)$; k, ω — произвольные постоянные, такие что $\omega \neq \pm k$.

При $D = \lambda^2 - 4\mu = 4a/(a^2k^2-\omega^2) < 0$ получаем решения уравнения (2) для тригонометрической функции U_T:

$$U_T(\xi) = \pm\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{-D}}{2}\,\frac{-C_1\sin\,(\sqrt{-D}\,\xi/2)+C_2\cos\,(\sqrt{-D}\,\xi/2)}{C_1\cos\,(\sqrt{-D}\,\xi/2)+C_2\sin\,(\sqrt{-D}\,\xi/2)} + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2}. \tag{23}$$

Здесь $\xi = kx+\omega t$ ($\omega \neq \pm k$); C_1, C_2 — произвольные постоянные. Так же как в предыдущем случае, при $C_1^2 > C_2^2$ и $C_1^2 < C_2^2$ решение (23) можно записать следующим образом:

$$u_T(x,t) = \pm\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{-D}}{2}\,\mathrm{tg}\,\Big(\frac{\sqrt{-D}}{2}\,\xi+\eta_T\Big) + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2},$$

$$u_T(x,t) = \pm\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{-D}}{2}\,\mathrm{ctg}\,\Big(\frac{\sqrt{-D}}{2}\,\xi+\eta_T\Big) + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2}.$$

Здесь $\xi = kx+\omega t$; $\eta_T = \mathrm{tg}^{-1}\,(C_1/C_2)$; k, ω — произвольные постоянные, такие что $\omega \neq \pm k$.

2.2. *Второе решение.* Подставляя (20) в (16), получаем

$$U=\pm i\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big(\frac{G'}{G}\Big)^{1/2},$$

поэтому при $D=\lambda^2-4\mu=a/(p^2k^2-\omega^2)>0$ имеем следующие решения уравнения Клейна — Гордона с нелинейностью пятого порядка (2) для гиперболической функции U_H:

$$U_H(\xi)=\pm i\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{D}}{2}\,\frac{C_1\operatorname{sh}(\sqrt{D}\,\xi/2)+C_2\operatorname{ch}(\sqrt{D}\,\xi/2)}{C_1\operatorname{ch}(\sqrt{D}\,\xi/2)+C_2\operatorname{sh}(\sqrt{D}\,\xi/2)}-\\ -\frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2}. \quad (24)$$

Здесь $\xi=kx+\omega t$ ($\omega\neq\pm k$); C_1, C_2 — произвольные постоянные. При $C_1^2>C_2^2$ и $C_1^2<C_2^2$ решение (24) можно записать в виде

$$u_H(x,t)=\pm i\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{D}}{2}\operatorname{th}\Big(\frac{\sqrt{D}}{2}\,\xi+\eta_H\Big)-\\ -\frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2},$$

$$u_H(x,t)=\pm i\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{D}}{2}\operatorname{ch}\Big(\frac{\sqrt{D}}{2}\,\xi+\eta_H\Big)-\\ -\frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2},$$

где $\xi=kx+\omega t$; $\eta_H=\operatorname{th}^{-1}(C_1/C_2)$; k, ω — произвольные постоянные, такие что $\omega\neq\pm k$.

При $D=\lambda^2-4\mu=4a/(a^2k^2-\omega^2)<0$ получаем следующие решения уравнения (2) для тригонометрической функции U_T:

$$U_T(\xi)=\pm i\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{-D}}{2}\,\frac{-C_1\sin(\sqrt{-D}\,\xi/2)+C_2\cos(\sqrt{-D}\,\xi/2)}{C_1\cos(\sqrt{-D}\,\xi/2)+C_2\sin(\sqrt{-D}\,\xi/2)}-\\ -\frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2}.$$

При $C_1^2>C_2^2$ и $C_1^2<C_2^2$ эти решения можно записать в виде

$$u_T(x,t)=\pm i\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{-D}}{2}\operatorname{tg}\Big(\frac{\sqrt{-D}}{2}\,\xi+\eta_T\Big)-\\ -\frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2},$$

$$u_T(x,t)=\pm i\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{\sqrt{-D}}{2}\operatorname{ctg}\Big(\frac{\sqrt{-D}}{2}\,\xi+\eta_T\Big)-\\ -\frac{1}{2}\,\frac{b}{p^2k^2-\omega^2}\Big(\frac{4a(p^2k^2-\omega^2)}{b^2}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2},$$

где $\xi=kx+\omega t$; $\eta_T=\operatorname{tg}^{-1}(C_1/C_2)$; k, ω — произвольные постоянные, такие что $\omega\neq\pm k$.

Заключение. Результаты проведенного исследования показывают, что метод (G'/G)-расширения является эффективным и может быть использован для получения точных решений уравнения Клейна — Гордона с нелинейностью пятого порядка, числа баланса которого не являются положительными целыми числами. Решения получены в более общем виде, и многие известные решения этих уравнений являются их частными случаями. Сравнение метода (G'/G)-расширения и других методов, таких как модифицированный метод представления решения с помощью гиперболических функций и метод представления решения с помощью экспоненциальных функций, показывает, что метод (G'/G)-расширения является обобщением этих методов. Данный метод нетрудно реализовать с помощью известных программных пакетов типа Maple, что позволяет решать сложные нелинейные эволюционные уравнения математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Scott Russell J.** Report on waves // Rep. of the 14th meeting of the British association for the advancement of science, York, Sept. 1844. L.: S. n., 1845. P. 311–390.
2. **Ablowitz M. J.** Solitons and inverse scattering transform / M. J. Ablowitz, H. Segur. Philadelphia: SIAM, 1981.
3. **Tam H. W., Hu X. B.** Soliton solutions and Backlund transformation for the Kupershmidt five-field lattice: a bilinear approach // Appl. Math. Lett. 2002. V. 15. P. 987–993.
4. **Hirota R.** The direct method in soliton theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
5. **Freeman N. C., Nimmo J. J. C.** Soliton solutions of the KdV and KP equations: the Wroanskian technique // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1983. V. 389. P. 319–329.
6. **Liu G. T., Fan T. Y.** New applications of developed Jacobi elliptic function expansion methods // Phys. Lett. A. 2005. V. 345. P. 161–166.
7. **Wang M. L.** Exact solutions for a compound KdV — Burgers equation // Phys. Lett. A. 1996. V. 213. P. 279–287.
8. **Yan C. T.** A simple transformation for nonlinear waves // Phys. Lett. A. 1996. V. 224. P. 77–84.
9. **Malfliet W., Hereman W.** The tanh method I: Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations // Phys. Scripta. 1996. V. 54. P. 563–568.
10. **Fei Xu.** Application of Exp-function method to symmetric regularized long wave (SRLW) equation // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 252–257.
11. **Tascan F., Bekir A., Koparan M.** Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using the first integral method // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 1810–1815.
12. **Wu Guo-cheng, Xia Tie-cheng.** A new method for constructing soliton solutions and periodic solutions of nonlinear evolution equations // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 604–609.
13. **Wang M., Li X., Zhang J.** The (G'/G)-expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 417–423.
14. **Zhang J., Wei X., Lu Y. J.** A generalized (G'/G)-expansion method and its applications // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 36–53.
15. **Abazari R.** Application of (G'/G)-expansion method to travelling wave solutions of three nonlinear evolution equation // Comput. Fluids. 2010. V. 39. P. 1957–1963.
16. **Abazari R.** The (G'/G)-expansion method for Tzitzéica type nonlinear evolution equations // Math. Comput. Model. 2010. V. 52. P. 1834–1845.
17. **Abazari R.** The (G'/G)-expansion method for the coupled Boussinesq equations // Procedia Engng. 2011. V. 10. P. 2845–2850.

18. **Caudrey P. J., Eilbeck I. C., Gibbon J. D.** The sine-Gordon as a model classical field theory // Nuovo Cimento. 1975. V. 25. P. 497–511.
19. **Dodd R. K.** Solitons and nonlinear wave equations / R. K. Dodd, I. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris. L.: Acad. Press, 1982.
20. **Wazwaz A. M.** Compactons, solitons and periodic solutions for some forms of nonlinear Klein — Gordon equations // Chaos Solitons Fractals. 2006. V. 28. P. 1005–1013.
21. **Sassaman R., Biswas A.** Soliton perturbation theory four phi-four model and nonlinear Klein — Gordon equations // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 3239–3249.
22. **Sassaman R., Biswas A.** Topological and non-topological solitons of the generalized Klein — Gordon equations // Appl. Math. Comput. 2009. V. 215. P. 212–220.
23. **Bratsos A. G., Petrakis L. A.** A modified predictor-corrector scheme for the Klein — Gordon equation // Intern. J. Comput. Math. 2010. V. 87, N 8. P. 1892–1904.
24. **Sheng Zhang, Ling Dong, Jin-Mei Ba, Ying-Na Sun.** The (G'/G)-expansion method for nonlinear differential-difference equations // Phys. Lett. A. 2009. V. 372. P. 905–910.

Поступила в редакцию 9/XII 2011 г.