

## ЛОКАЛЬНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФАЗ В СУСПЕНЗИЯХ МЕЛКИХ ЧАСТИЦ

Ю. А. Бувич

(Москва)

Приведены выражения для средних величин, характеризующих случайные псевдотурбулентные пульсации в монодисперсной суспензии твердых сферических частиц при малых числах Рейнольдса. Рассмотрено влияние этих пульсаций на эффективное гидравлическое сопротивление, оказываемое частицами несущему потоку жидкости.

Параметры, характеризующие случайное хаотическое движение (псевдотурбулентность) фаз в локально-однородных течениях суспензии мелких частиц, рассчитывались ранее в [1, 2]. Однако соотношения, полученные в этих работах, нуждаются в некотором уточнении, что связано с уточнением [3] некоторых результатов спектральной теории концентрации дисперсных систем, использовавшихся в [1, 2], с более корректным определением функции, описывающей влияние стесненности обтекания частиц на силу вязкого взаимодействия каждой из них с жидкостью. Такое уточнение и предлагается в этой работе. Формулы, полученные ниже, могут быть использованы в оценках коэффициентов псевдотурбулентного переноса, флуктуаций скоростей жидкости и частиц и других величин, характеризующих локальную структуру суспензии.

1. Сформулируем основные допущения, использованные ниже. Прежде всего, число Рейнольдса  $R$ , описывающее стесненное обтекание отдельных частиц, считаем малым. В этом случае течение суспензии локально-одномерно в том смысле, что в нем не происходит образование крупно-масштабных флуктуаций концентрации, а сами частицы можно рассматривать как статистически независимые, пренебрегая их непосредственными столкновениями [1, 2]. Кроме того, полагаем, что масштабы изменения средних величин, характеризующих среднее движение суспензии, намного превышают соответствующие масштабы псевдотурбулентных пульсаций. Это позволяет рассматривать псевдотурбулентность как «равновесную», т. е. пренебречь влиянием на пульсации производных от указанных величин по координатам и времени. В пределе, когда эти производные равны нулю, движение можно интерпретировать просто как фильтрацию жидкости через облако неподвижных в среднем частиц с некоторой постоянной скоростью  $u_f$  и рассматривать его как простейшую модель псевдооживленного слоя. В этом случае уравнения для среднего движения имеют вид

$$\begin{aligned} (1 - \rho)(-\nabla p + d_0 g) - d_0 \beta \rho K(\rho) \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u}_f &= (1 - \rho) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$-\nabla p + d_1 g + d_0 \beta K(\rho) \mathbf{u} = 0, \quad \beta = 9\nu_0 / 2a^2, \quad \nu_0 = \mu_0 / d_0$$

Здесь  $d_0$ ,  $\mu_0$  — плотность и вязкость жидкости,  $a$ ,  $d_1$  — радиус и плотность материала частиц,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho$  — объемная концентрация частиц в системе, а функция  $K(\rho)$  описывает отклонение эффективной вязкой силы, действующей на частицу в условиях стесненного обтекания, от силы Стокса;  $K(0) = 1$ . Для упрощения пренебрежем также влиянием вязких напряжений в жидкой фазе на развитие псевдотурбулентных пульсаций; как явствует из [1, 2], это не приводит к существенному изменению получаемых результатов.

При указанных предположениях можно записать следующие соотношения для спектральных мер псевдотурбулентных пульсаций давления  $p'$ , скорости жидкости  $\mathbf{v}'$  и частиц  $\mathbf{w}'$  и концентрации  $\rho'$ , которые фигурируют в представлениях указанных пульсаций в виде интегралов Фурье — Стильтьеса [2]

$$\begin{aligned} dZ_p &= 0, & dZ_v &= \frac{\omega + \mathbf{uk}}{1 - \rho} \frac{\mathbf{k}}{k^2} dZ_\rho, \\ dZ_w &= \left( \frac{d \ln K}{d\rho} \mathbf{u} + \frac{\omega + \mathbf{uk}}{1 - \rho} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \right) dZ_\rho \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — частота и волновой вектор. Соотношения (1.2) позволяют выразить различные спектральные плотности, характеризующие псевдотурбулентное движение, через спектральную плотность  $\Psi_{\rho, \rho}$  случайного процесса  $\rho'$ , а затем, используя определенное представление для  $\Psi_{\rho, \rho}$ , стандартным путем найти соответствующие корреляционные функции (развернутые выражения для спектральных плотностей даны в [2]).

В качестве  $\Psi_{\rho, \rho}$  здесь использована функция [3]

$$\begin{aligned} \Psi_{\rho, \rho}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{k D k}{\pi} \frac{\Phi_{\rho, \rho}(\mathbf{k})}{\omega^2 + (k D k - T_0 \omega^2)^2}, & T_0 &= \frac{\text{tr } \mathbf{D}}{\langle w'^2 \rangle} \\ \Phi_{\rho, \rho}(\mathbf{k}) &= \frac{3}{4\pi} \frac{\rho^2}{k_0^3} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_*} \right) Y(k_0 - k), & k_0 &= \left( \frac{9\pi\rho}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{D}$  — тензор коэффициентов псевдотурбулентной диффузии частиц,  $\rho_*$  — концентрация частиц в плотноупакованном состоянии,  $Y(x)$  — функция Хевисайда.

Для определения  $K(\rho)$  используем результаты экспериментов по определению гидравлического сопротивления слоя неподвижных частиц. При этом учитываем, что в таких экспериментах определяется обычно величина  $K_e(\rho)$ , входящая в уравнение

$$-\nabla p + d_0 \mathbf{g} - d_0 \beta \rho K_e(\rho) \mathbf{u}_f = 0 \quad (1.4)$$

Сравнивая (1.4) с первым уравнением (1.1), имеем

$$K(\rho) = (1 - \rho)^2 K_e(\rho) \quad (1.5)$$

Для определенности используем эмпирическую формулу Эргана [4]

$$K_e(\rho) = 25/3 \rho (1 - \rho)^{-3} \quad (1.6)$$

справедливую при  $\rho > 0.2-0.3$ . Чтобы распространить выражение для  $K(\rho)$ , следующее из (1.5), (1.6), на область  $\rho < 0.2-0.3$ , аппроксимируем далее это выражение функцией

$$K(\rho) = \frac{2.96}{(1 - \rho)^{1.73}} - 1.96 \quad (1.7)$$

Функция (1.7) достаточно хорошо приближает указанное выражение при  $\rho > 0.2-0.3$  и при  $\rho = 0$  обращается в единицу. Ее и используем в расчетах средних псевдотурбулентных величин ниже; для  $\rho_*$  используем значение  $\rho_* = 0.6$ .

2. Очевидно, рассматриваемая «равновесная» псевдотурбулентность осесимметрична, причем ось симметрии направлена вдоль вектора  $\mathbf{u}$ . Выбирая координатную ось  $x_1$  вдоль  $\mathbf{u}$  и используя метод работы [1], для коэффициентов псевдотурбулентной диффузии частиц получим уравне-

ния

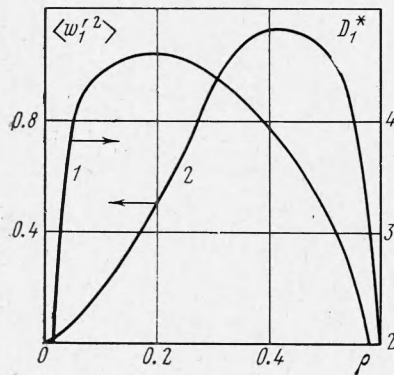
$$D_1 = \frac{1 + \gamma^2}{\gamma k_0} \frac{\rho}{1 - \rho} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right)^{1/2} (J_2 - J_4)^{1/2} au \quad (2.1)$$

$$D_2 = D_3 = N_D D_1 = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} D_1, \quad J_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{t^2 + \gamma^2}$$

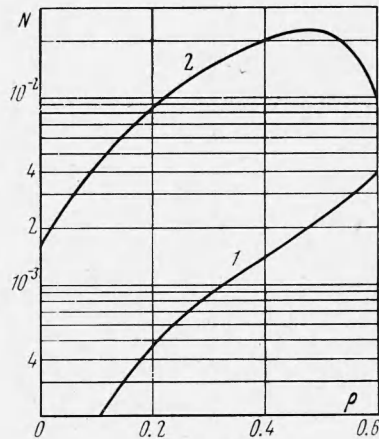
причем  $\gamma$  — единственный корень уравнения

$$\frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2} = \frac{J_2 - J_4}{l^2 J_0 + 2l J_2 + J_4}, \quad l = (1 - \rho) \frac{d \ln K}{d \rho} \quad (2.2)$$

Зависимости величин  $\bar{D}_1^* = D_1 / au$  и  $N_D$  от  $\rho$ , рассчитанные в соответствии с (2.1), (2.2), приведены на фиг. 1 и фиг. 2 соответственно (кривые 1). Величина  $\bar{D}_1^*$  оказывается меньше, а  $N_D$  — больше величин, вычисленных в [1].



Фиг. 1



Фиг. 2

Для средних квадратов компонент пульсационной скорости частиц обычным путем получим на основании (1.2), (1.3) выражения

$$\langle w_1'^2 \rangle = \varphi \left[ l^2 + \frac{2}{3} l + \frac{4}{5} \left( 1 + \frac{1 + \frac{2}{3} N_D}{1 + 2N_D} \frac{\langle w^2 \rangle}{u^2} \right) \right] u^2$$

$$\langle w_2'^2 \rangle = \langle w_3'^2 \rangle = N_w \langle w_1'^2 \rangle = \frac{\varphi}{15} \left( 1 + \frac{1 + 4N_D}{1 + 2N_D} \frac{\langle w^2 \rangle}{u^2} \right) u^2 \quad (2.3)$$

$$\langle w'^2 \rangle = \varphi \left( l^2 + \frac{2}{3} l + \frac{4}{3} \right) \left( 1 - \frac{\varphi}{3} \right)^{-1} u^2, \quad \varphi = \left( \frac{\rho}{1 - \rho} \right)^2 \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_*} \right)$$

Зависимости  $\langle w_1'^2 \rangle^* = u^{-2} \langle w_1'^2 \rangle$  и  $N_w$  от  $\rho$ , полученные из (2.3) при  $N_D \approx 0$ , также приведены на фиг. 1 и фиг. 2 (кривые 2). Эти величины весьма близки к вычисленным в [2] почти во всей области  $0 < \rho < 0.6$ , но они не обращаются в бесконечность вблизи  $\rho = 0.6$ . Функции распределения величин  $\langle w_j'^2 \rangle$  в рассматриваемом «равновесном» состоянии представляют собой гауссовы функции с дисперсиями, следующими из (2.3).

Наконец, приведем выражения для других псевдотурбулентных характеристик, представляющих интерес. Имеем

$$\begin{aligned}\langle v_1'^2 \rangle &= \frac{\Phi}{5} \left( 1 + \frac{1 + \frac{2}{3}N_D}{1 + 2N_D} \frac{\langle w'^2 \rangle}{u^2} \right) u^2 \\ \langle v_2'^2 \rangle = \langle v_3'^2 \rangle = N_v \langle v_1'^2 \rangle &= \frac{\Phi}{15} \left( 1 + \frac{1 + \frac{4}{3}N_D}{1 + 2N_D} \frac{\langle w'^2 \rangle}{u^2} \right) u^2 \\ \langle w_1'v_1' \rangle &= \frac{\Phi}{3} \left[ l + \frac{3}{5} \left( 1 + \frac{1 + \frac{2}{3}N_D}{1 + 2N_D} \frac{\langle w'^2 \rangle}{u^2} \right) \right] u^2 \\ \langle w_2'v_2' \rangle = \langle w_3'v_3' \rangle &= \frac{\Phi}{15} \left( 1 + \frac{1 + \frac{4}{3}N_D}{1 + 2N_D} \frac{\langle w'^2 \rangle}{u^2} \right) u^2 \\ \langle \rho'v_j' \rangle &= \frac{1}{3}\Phi (1 - \rho) u \delta_{1j}, \quad \langle \rho'w_j' \rangle = (1 - \rho) (l + \frac{1}{3}) u \delta_{1j}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Средние от произведений компонент  $v'$  и  $w'$  вдоль разных осей равны нулю ввиду аксиальной симметрии псевдотурбулентного движения.

Зависимости величин (2.4) от  $\rho$  имеют такой же характер, что и зависимости  $\langle w_3'^2 \rangle$ , но их максимальные значения значительно меньше. В приближении  $N_D \approx 0$  отношение  $N_v = 1/3$ , т. е. анизотропия пульсаций жидкости выражена значительно слабее, чем анизотропия пульсаций частиц.

Обсудим степень соответствия полученных соотношений известным опытным результатам. Большое число данных по пульсациям жидкости и особенно частиц получено в экспериментах с псевдооживленными слоями. Однако, к сожалению, известные автору данные о локальных пульсациях очень мелких частиц, для которых  $R < 1$ , весьма ограничены, неполны и не внушают особого доверия, что связано, по-видимому, с большими экспериментальными трудностями. Минимальные размеры частиц, продольные пульсации которых исследовались более или менее достоверно (хотя и с большим статистическим разбросом), соответствуют значениям  $R \sim 100$  и выше, когда соотношения, полученные при  $R < 1$ , нельзя, конечно, считать верными. Если вычислить все же величину  $\langle w_1'^2 \rangle$ , используя такие соотношения, получим значения, которые в 1.5—2 раза выше определенных экспериментально. Такое сравнение было проведено, например, с данными А. К. Бондаревой, приведенными в [5], по псевдооживлению воздухом частиц песка со средним диаметром 100, 153 и 233 мк. С качественной точки зрения завышение значений  $\langle w_1'^2 \rangle$ , вычисленных согласно (2.3), в данном случае вполне объяснимо. Действительно, в соответствии с (2.3) величина  $\langle w_1'^2 \rangle$  пропорциональна, грубо говоря  $l^2$ , где  $l$  определена в (2.2). Но последняя величина довольно быстро убывает с ростом  $R$ , что объясняется существенным ослаблением зависимости  $K$  от  $\rho$  при увеличении  $R$  [5, 6]. Общій же характер зависимости средних величин (2.3), (2.4) от концентрации  $\rho$  экспериментами полностью подтверждается. Чтобы обеспечить количественную проверку развитой теории с экспериментальными данными, ниже рассматриваем эффект снижения гидравлического сопротивления псевдооживленного слоя по сравнению с сопротивлением неподвижного зернистого слоя тех же частиц и той же пористости (подробное обсуждение происхождения этого эффекта имеется в [2]). Число исследований, посвященных определению эффективного сопротивления псевдооживленного слоя при малых  $R$  весьма велико, а их результаты, в отличие от результатов опытов по определению пульсаций, неплохо согласуются между собой (см., например, обзор в [5]).

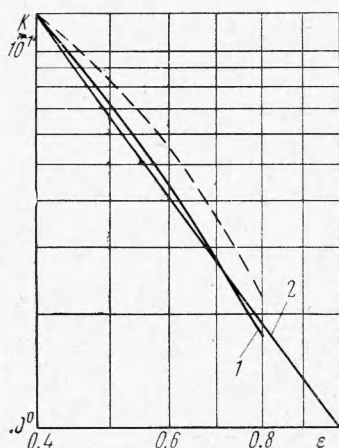
Согласно [2] имеем (звезда отмечает  $K$  для псевдооживленного слоя)

$$K^*(\rho) = (\lambda_k/\lambda_u) K(\rho), \quad K_e^*(\rho) = (\lambda_k/\lambda_u) K_e(\rho) \quad (2.5)$$

причем  $K^*$  связана с  $K_e^*$  так же, как  $K$  с  $K_e$  (т. е. при помощи формулы (1.5)). Величины  $\lambda_k$  и  $\lambda_u$  выражаются через  $K$  при помощи соотношений

$$\lambda_k = 1 - \Phi \left[ l^2 - \frac{(1 - \rho)^2}{2K} \frac{d^2 K}{d\rho^2} \right], \quad \lambda_u = 1 - \frac{\Phi}{3} \quad (2.6)$$

Результаты расчета величины  $K^*$ , проведенного в соответствии с формулами (2.5), (2.6) в области  $0.2 < \rho < 0.6$ , представлены на фиг. 3



Фиг. 3

в частности в [8], где также было получено  $n = 4.65$ . Как видно из фиг. 3, согласие между зависимостями 1 и 2 для  $K^*$  вполне удовлетворительное, что позволяет говорить не только о качественной, но и, в некоторой степени, о количественной адекватности развиваемой теории.

(кривая 1). Было использовано  $K$ , соответствующее выражению (1.6) для  $K_e$ ; это  $K$  показано на фиг. 3 пунктиром. Для сравнения использовались эмпирические зависимости Ричардсона—Заки [6, 7] и Горшко—Розенбаума—Тодеса [5], описывающие гидравлическое сопротивление псевдооживленного слоя при малых  $R$  и полученные путем обработки большого числа экспериментальных данных. Обе эти зависимости имеют вид

$$K_e^* = (1 - \rho)^{-n} \quad (2.7)$$

причем  $n = 4.65$  в первом случае и  $n = 4.75$  во втором. На фиг. 3 проведена кривая 2 для  $K^*$ , вычисленного в соответствии с (1.5) из (2.7) при  $n = 4.7$ . Отметим, что зависимости типа (2.7) предлагались и в некоторых других работах,

Поступила 18 II 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б у е в и ч Ю. А., М а р к о в В. Г. Псевдотурбулентная диффузия частиц в однородных суспензиях. ПМТФ, 1970, № 1.
2. Б у е в и ч Ю. А., И в ш и н Е. Н., М а р к о в В. Г. Локально-однородные бесстолкновительные суспензии в приближении Эйлера. ПМТФ, 1970, № 4.
3. Б у е в и ч Ю. А. Спектральная теория концентрации дисперсных систем. ПМТФ, 1970, № 6.
4. E r g u n S. Fluid flow through packed columns. Chem. Engng Progr., 1952, vol. 48, No. 2.
5. А э р о в М. Э., Т о д е с О. М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., «Химия», 1968.
6. R i c h a r d s o n J. F., Z a k i W. N. Sedimentation and fluidization, pt 1. Trans. Inst. Chem. Engrs., 1954, vol. 32, No. 1.
7. G o d a r d K., R i c h a r d s o n J. F. Correlation of data for minimum fluidising velocity and bed expansion in particulate fluidised systems. Chem. Engng Sci., 1969, vol. 24, No. 2.
8. L e w i s W. K., G i l l i l a n d E. R., B a u e r W. C. Characteristics of fluidized particles. Industr. Engng Chem., 1949, vol. 41, pp. 1104—1117.