

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ДИФфуЗИИ  
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА

А. Т. Онуфриев

(Новосибирск)

Имеется ряд работ, в которых критически рассматриваются полуэмпирические теории пути смешения [1]. Недостаток этих теорий связан с тем, что величина пути смешения, полагаемая при построении теории малой, оказывается на опыте сравнимой с характерными размерами области течения. Поэтому, наряду с понятием «градиентной диффузии», вводится понятие «объемной конвекции» [2-4] или «интегральной диффузии» [5], под которыми понимается такой механизм переноса, в котором величина напряжения трения не выражается через градиент скорости. Кроме того, имеется ряд экспериментальных работ [6], в которых показано, что в том месте потока, где производная скорости равна нулю, напряжение турбулентного трения может не быть равным нулю. Теория «пути смешения» не дает описания этого эффекта.

Возможно обобщение теории пути смешения [7-9], которое устраняет эти недостатки. Рассматривается течение несжимаемой жидкости.

**1. Модель турбулентного переноса.** Принята следующая схема течения. В результате неустойчивости потока порождаются вихри, имеющие размеры порядка характерного размера потока в этой области течения. Возникающий вихрь, или «моль», при своем перемещении в потоке будет «обдираться» внешней средой и в результате этого происходит обмен импульсом и теплом. Такое представление о вихрях (молях), возникающих в слоях с большим градиентом скорости и пронизывающих поток, широко распространено.

Примем, что порождение молей будет характеризоваться местным числом Рейнольдса, введенным Л. Г. Лойцянским [10], которое составляется из характерной скорости порождения пульсационного движения  $C_*'$ , характерного размера  $l'$ , который ниже отождествляется с «путем смешения» или с «длиной свободного пробега» моля и вязкости жидкости  $\nu$

$$R^+ = l' C_*' / \nu$$

Если это число больше некоторой величины  $R_0^+$ , то в потоке происходит порождение молей.

Соображения о существовании критического значения  $R_0^+$  в связи с размерами «ламинарного» подслоя высказывались в ряде работ [10-12]. Слой потока, в котором происходит порождение «молей», характеризуется большими величинами градиента скорости. В этом слое длина пробега  $l'$  может быть достаточно малой, тогда такой слой можно назвать «равновесным», в нем будет справедлива теория пути смешения Прандтля. Во вне из этого слоя будут разлетаться моли, которые в результате взаимодействия со средой создают перенос импульса и тепла. Их распространение характеризуется некоторой вероятностью взаимодействия между двумя точками, а напряжение трения или плотность потока тепла в общем случае характеризуются интегралами по всему объему от источников «молей» с учетом соответствующих вероятностей.

Рассмотрим единичную площадку около некоторой точки в потоке  $M_0$ , ориентированную перпендикулярно к оси  $y$  и движущуюся со скоростью осредненного движения в этой точке [7] (ниже используется видоизмененная схема Н. И. Булеева для построения тензора турбулентных напряжений). Моль, вышедший из окрестности точки  $M_0$ , при пролете

через эту площадку создает пульсации

$$\begin{aligned} u' &\approx C_*' \cos(s, x) + u(M) - u(M_0) \\ v' &\approx C_*' \cos(s, y) + v(M) - v(M_0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Принимается, что из точки  $M$  моли разлетаются равномерно по всем направлениям.

Пролетающий моль дает вклад в величину напряжения трения (на единицу массы)

$$\begin{aligned} d(u'v') &= [C_*' \cos(s, x) + u(M) - u(M_0)][C_*' \cos(s, y) + v(M) - \\ &\quad - v(M_0)] \exp\left(-\int_{M_0}^M \frac{ds}{l'}\right) \frac{ds}{l'} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где множитель в виде экспоненты характеризует вероятность того, что моль дойдет от точки  $M$  к  $M_0$ ; или величину той части моля, которая дошла; или величину взаимодействия моля с окружающей средой.

Полная величина напряжения трения получится в результате суммирования вклада всех «молей»

$$\rho \langle u'v' \rangle = \frac{\rho}{4\pi} \int \int_{M_0}^{\infty} d(u'v') d\Omega \quad (1.3)$$

и аналогично записываются другие составляющие тензора.

При  $l' \rightarrow 0$  можно перейти к пределу, разложив величины  $u(M)$  и  $v(M)$  в ряд Тэйлора. Получим

$$\langle u'v' \rangle = -\frac{C_*' l'}{3} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \langle u'u' \rangle = \frac{C_*'^2}{3} - 2 \frac{C_*' l'}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и т. п.}$$

т. е. приходим к обычно применяющейся форме связи между дополнительными напряжениями и тензором скоростей деформации, совпадающей с предположением об изотропности величины  $l'$  [13].

Рассматриваемая модель (1.3) и называется интегральной диффузией. Эта модель содержит анизотропию переноса по различным направлениям, так как вероятность взаимодействия зависит от «оптической толщины»

$$\int_0^s \frac{ds}{l'}$$

которая различна вдоль лучей по разным направлениям.

Величина напряжения трения не связана непосредственно с градиентом скорости. Если профиль скорости несимметричен, то напряжение трения не обязано быть равным нулю в том месте потока, где производная от скорости равна нулю.

Выражения для напряжения трения и плотности потока тепла в плоском случае имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \rho \int_{y_0}^{\infty} \frac{C_* [u(y) - u(y_0)]}{2} E_2 \left( \int_{y_0}^y \frac{dy}{l'} \right) \frac{dy}{l'} + \rho \int_{-\infty}^{y_0} \dots \\ q_y &= \rho \int_{y_0}^{\infty} \frac{C_* C_p [T(y) - T(y_0)]}{2P_1} E_2 \left( \int_{y_0}^y \frac{dy}{l'} \right) \frac{dy}{l'} + \rho \int_{-\infty}^{y_0} \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

где введено турбулентное число Прандтля  $P_1$ .

Выражение (1.4) можно упростить, если провести усреднение по углу  $\cos \theta = 2/3$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \rho \int_{-\infty}^y [u(\xi) - u(y)] \frac{C_*}{4} \exp\left(-\int_{\xi}^y \frac{dz}{l}\right) \frac{d\xi}{l} - \\ - \rho \int_y^{+\infty} [u(\xi) - u(y)] \frac{C_*}{4} \exp\left(-\int_y^{\xi} \frac{dz}{l}\right) \frac{d\xi}{l} \quad \text{и т. п.} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Во многих случаях можно не интересоваться эффектами, возникающими из-за несимметрии потока, и упростить полученные выражения, разложив разности  $\Delta u$  и  $\Delta T$  в ряд [7]

$$\tau_{xy} \approx -\rho \varepsilon \frac{du}{dy}, \quad q_y \approx -\frac{\rho C_p \varepsilon}{Pr} \frac{dT}{dy} \quad (1.6)$$

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_*}{4} |\xi - y| \exp\left(-\left|\int_{\xi}^y \frac{dz}{l}\right|\right) \frac{d\xi}{l} \quad (1.7)$$

**2. Величины «пути смещения» и скорости порождения.** В каждой точке потока имеются «моли» разных размеров. В принципе, задачу можно усложнить, введя распределение по масштабам. Пока ограничимся тем, что наиболее характерный размер как-то связан со свойствами распределения поля скорости или с характерным размером «порождающего» слоя в свободной струе и с расстоянием до стенки, ограничивающей поток, которая регулирует размер молей в потоке.

В качестве масштаба  $l$  примем зависимость, предложенную А. М. Обуховым [14]. Предполагается, что распределение масштаба определяется только геометрическими свойствами русла и используется гипотеза о локальном подобии. При этом вводится внутренняя геометрия потока, элемент которой  $d\sigma = l^{-1} ds$  совпадает с введенной в рассматриваемой модели величиной  $l^{-1} ds$ , характеризующей вероятность взаимодействия. В этой работе указано также на появляющуюся в связи с этим анизотропию в потоке.

С точностью до постоянной определяется распределение масштаба в следующих случаях:

$$\begin{aligned} l = ky & \quad \text{для полуплоскости} \\ \frac{l}{h} = \frac{2k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) & \quad \text{для плоской щели ширины } 2h \\ \frac{l}{r_0} = \frac{k}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] & \quad \text{для круглой трубы радиуса } r_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $r$  и  $z$  — расстояние от оси и средней плоскости. Эти распределения достаточно хорошо согласуются с общеупотребительными выражениями для «пути смещения».

Сравнивая выражение для  $\tau_{xy}$  в слое порождения при  $l \rightarrow 0$  с выражением по теории пути смещения Л. Прандтля, получаем, что величина  $C_*$  пропорциональна скорости трения  $V_*$ . Примем в качестве гипотезы, что для  $C_*$  справедливо соотношение

$$C_* = C_0 \sqrt{|\tau_r|/\rho} \quad (C_0 = \text{const})$$

Здесь  $\tau_r$  — Рейнольдсово напряжение трения. Это выражение может быть обобщено в пространственном случае.

Имея в виду, что теория «пути смешения» достаточно хорошо описывает турбулентный перенос в слое порождения, можно ожидать, что и в модели интегральной диффузии это допущение даст удовлетворительные результаты.

Перечисленных гипотез о зависимости для  $l$ , о зависимости для  $C_*$ , о существовании критического локального числа Рейнольдса  $R_0^+$  и использования турбулентного числа

Прандтля  $R_1$  достаточно для замыкания системы уравнений.

Входящие при этом постоянные  $k$ ,  $C_0$ ,  $R_0^+$  и  $P_1$  должны быть определены по опытным данным.

**3. Пограничный слой у плоской пластинки.** Вблизи стенки, в области, где путь смешения мал, величина напряжения трения примерно постоянна.

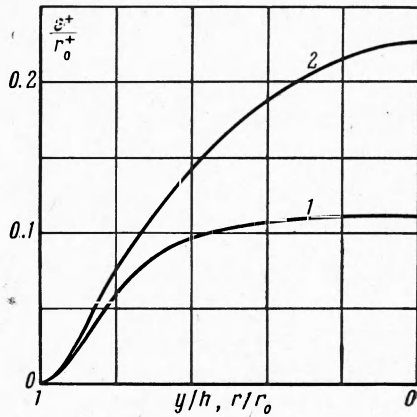
Тогда

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho} = -V_*^2 (1 + \varepsilon^+) \frac{du^+}{dy^+} = -V_*^2$$

$$y^+ = \frac{yV_*}{\nu}, \quad u^+ = \frac{u}{V_*}$$

Здесь  $y$  — расстояние от стенки ( $l = ky$ ) и величина скорости порождения постоянна при  $y^+ > y_0^+$  и равна нулю при  $y^+ < y_0^+$ .

Фиг. 1. Распределение  $\varepsilon^+/r_0^+$  поперек канала



В соответствии с этим для  $\varepsilon^+$  получаем следующие выражения

$$\frac{\varepsilon^+}{c_0} = ky^+ \left[ \left( 1 - \left( \frac{y_0^+}{y^+} \right)^{1/k} \right) \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} \right] \quad \text{при } y^+ > y_0^+ \quad (3.1)$$

$$\varepsilon^+ \rightarrow \frac{2kC_0}{(1-k^2)4} y^+ \quad \text{при } \frac{y^+}{y_0^+} \gg 1 \quad (3.2)$$

$$\frac{\varepsilon^+}{c_0} = \frac{y_0^+}{1-k} \left[ \left( \frac{y^+}{y_0^+} \right)^{1/k} - (1-k) \left( \frac{y^+}{y_0^+} \right)^{1/k+1} \right] \quad \text{при } y^+ < y_0^+ \quad (3.3)$$

$$\varepsilon^+ \rightarrow \frac{y_0^+}{1-k} \frac{C_0}{4} \left( \frac{y^+}{y_0^+} \right)^{1/k} \quad \text{при } \frac{y^+}{y_0^+} \ll 1 \quad (3.4)$$

Имеются данные (см. например [15,16]) о поведении величины турбулентного коэффициента теплопроводности

$$\frac{\varepsilon^+}{P_1} = a^4 (y^+)^4 \quad \text{при } y^+ \rightarrow 0$$

Так,  $a = 0.124$  — по Дайслеру,  $a = 0.09$  — по Сполдингу; ниже принято  $a = 0.106$ .

Сравнивая с этой зависимостью формулу (3.4) для  $\varepsilon^+$ , а формулу (3.2) для  $\varepsilon^+$  — с зависимостью  $\varepsilon^+ = 0.40 y^+$  получаем

$$k = 0.25, \quad C_0 = 3, \quad y_0^+ = 20$$

Значение  $P_1$  было принято равным 0.71.

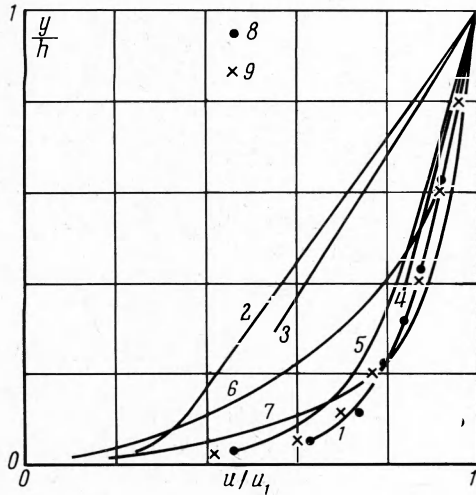
Зависимости для  $\varepsilon^+$  от  $y^+$ , профиль скорости в пограничном слое и данные по теплопередаче при больших значениях числа Прандтля удовлетворительно совпадают с данными, приведенными в работе [15]. Постоянные, определенные по этим данным будут использованы при решении и других задач.

**4. Течение в плоском канале и течение Куэтта.** Распределение пути смешения дается формулой (2.1). Для течения в плоском канале

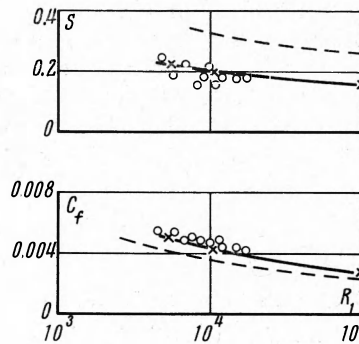
$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{y}{h}, \quad \frac{\tau_r}{\tau_w} = \frac{\varepsilon^+}{1 + \varepsilon^+} \frac{y}{h}$$

Используя это выражение и формулы (3.1) и (3.3) для  $\varepsilon^+$ , находим распределение  $\varepsilon^+$  поперек канала (фиг. 1, кривая 1 ( $h^+ = 250$ )) и распределение скорости, которое хорошо согласуется с распределением  $u^+ = 5.1 + 2.5 \ln y^+$ .

Рассмотренные до сих пор задачи решаются и при использо-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Распределение скорости: 1 — Karman (1937) — с точностью до значения постоянной  $C_f = 0,0042$ ; 2 — Pai (1952); 3 — Munk (1955); 4 — Reichardt (1955); 5 — Robertson (1957); 6 — Wu (1958); 7 — Wu — Robertson (1958); 8 — экспериментальные данные [17]; 9 — расчет изложенным методом

Фиг. 3. Производная профиля скорости и коэффициента сопротивления (сплошные кривые — расчет изложения методом, штриховые кривые — по теории пути смешения; 0 — экспериментальные точки, данные из работы [17])

вании обычной теории пути смешения при соответствующем подборе постоянных и задании зависимости  $\varepsilon^+$  ( $Y^+$ ). Поэтому в упомянутых случаях лишь проверялось то, что модель интегральной диффузии дает удовлетворительное решение.

Ниже рассматривается задача о турбулентном течении Куэтта, для которой теория пути смешения с постоянными, подобранными для задачи о пограничном слое, удовлетворительного решения не дает: необходимо постоянную, характеризующую величину турбулентной вязкости изменить почти в два раза [17].

Эта задача решена в приближении интегральной диффузии. Турбулентное напряжение трения вблизи стенки определяется по формуле

$$\frac{\tau_r}{\tau_w} = \frac{\varepsilon^+}{1 + \varepsilon^+}$$

величина  $\varepsilon^+$  снова определяется по формулам (3.1) и (3.3), она приведена на фиг. 1 (кривая 2,  $h^+ = 250$ ). В ядре потока величина  $\varepsilon^+$  для течения Куэтта почти вдвое превышает величину  $\varepsilon^+$  для течения в плоском канале. Различие появляется в результате различного распределения в этих случаях скорости порождения  $C_*$  в поперечном сечении.

