

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА

A. T. Onufriev

(*Новосибирск*)

Имеется ряд работ, в которых критически рассматриваются полуэмпирические теории пути смещения [1]. Недостаток этих теорий связан с тем, что величина пути смещения, полагаемая при построении теории малой, оказывается на опыте сравнимой с характерными размерами области течения. Поэтому, наряду с понятием «градиентной диффузии», вводится понятие «объемной конвекции» [2-4] или «интегральной диффузии» [5], под которыми понимается такой механизм переноса, в котором величина напряжения трения не выражается через градиент скорости. Кроме того, имеется ряд экспериментальных работ [6], в которых показано, что в том месте потока, где производная скорости равна нулю, напряжение турбулентного трения может не быть равным нулю. Теория «пути смещения» не дает описания этого эффекта.

Возможно обобщение теории пути смещения [7-9], которое устраняет эти недостатки. Рассматривается течение несжимаемой жидкости.

1. Модель турбулентного переноса. Принята следующая схема течения. В результате неустойчивости потока порождаются вихри, имеющие размеры порядка характерного размера потока в этой области течения. Возникающий вихрь, или «моль», при своем перемещении в потоке будет «обдираться» внешней средой и в результате этого происходит обмен импульсом и теплом. Такое представление о вихрях (молях), возникающих в слоях с большим градиентом скорости и пронизывающих поток, широко распространено.

Примем, что порождение молей будет характеризоваться местным числом Рейнольдса, введенным Л. Г. Лойцянским [10], которое составляется из характерной скорости порождения пульсационного движения C_*' , характерного размера l' , который ниже отождествляется с «путем смещения» или с «длиной свободного пробега» моля и вязкости жидкости ν

$$R^+ = l' C_*' / \nu$$

Если это число больше некоторой величины R_0^+ , то в потоке происходит порождение молей.

Соображения о существовании критического значения R_0^+ в связи с размерами «ламинарного» подслоя высказывались в ряде работ [10-12]. Слой потока, в котором происходит порождение «молей», характеризуется большими величинами градиента скорости. В этом слое длина пробега l' может быть достаточно малой, тогда такой слой можно назвать «равновесным», в нем будет справедлива теория пути смещения Прандтля. Во вне из этого слоя будут разлетаться моли, которые в результате взаимодействия со средой создают перенос импульса и тепла. Их распространение характеризуется некоторой вероятностью взаимодействия между двумя точками, а напряжение трения или плотность потока тепла в общем случае характеризуются интегралами по всему объему от источников «молей» с учетом соответствующих вероятностей.

Рассмотрим единичную площадку около некоторой точки в потоке M_0 , ориентированную перпендикулярно к оси y и движущуюся со скоростью осредненного движения в этой точке [7] (ниже используется видоизмененная схема Н. И. Булеева для построения тензора турбулентных напряжений). Моль, вышедший из окрестности точки M_0 , при пролете

через эту площадку создает пульсации

$$\begin{aligned} u' &\approx C_*' \cos(s, x) + u(M) - u(M_0) \\ v' &\approx C_*' \cos(s, y) + v(M) - v(M_0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Принимается, что из точки M моли разлетаются равномерно по всем направлениям.

Пролетающий моль дает вклад в величину напряжения трения (на единицу массы)

$$d(u'v') = [C_*' \cos(s, x) + u(M) - u(M_0)][C_*' \cos(s, y) + v(M) - v(M_0)] \exp\left(-\int_{M_0}^M \frac{ds}{l'}\right) \frac{ds}{l'} \quad (1.2)$$

где множитель в виде экспоненты характеризует вероятность того, что моль дойдет от точки M к M_0 ; или величину той части моля, которая дошла; или величину взаимодействия моля с окружающей средой.

Полная величина напряжения трения получится в результате суммирования вклада всех «молей»

$$\rho \langle u'v' \rangle = \frac{\rho}{4\pi} \int_{M_0}^{\infty} d(u'v') d\Omega \quad (1.3)$$

и аналогично записываются другие составляющие тензора.

При $l' \rightarrow 0$ можно перейти к пределу, разложив величины $u(M)$ и $v(M)$ в ряд Тейлора. Получим

$$\langle u'v' \rangle = -\frac{C_*' l'}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \langle u'u' \rangle = \frac{C_*'^2}{3} - 2 \frac{C_*' l'}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и т. п.}$$

т. е. приходим к обычно применяемой форме связи между дополнительными напряжениями и тензором скоростей деформации, совпадающей с предположением об изотропности величины l' [13].

Рассматриваемая модель (1.3) и называется интегральной диффузией. Эта модель содержит анизотропию переноса по различным направлениям, так как вероятность взаимодействия зависит от «оптической толщины»

$$\int_0^s \frac{ds}{l'}$$

которая различна вдоль лучей по разным направлениям.

Величина напряжения трения не связана непосредственно с градиентом скорости. Если профиль скорости несимметричен, то напряжение трения не обязано быть равным нулю в том месте потока, где производная от скорости равна нулю.

Выражения для напряжения трения и плотности потока тепла в плоском случае имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \rho \int_{y_0}^{\infty} \frac{C_* [u(y) - u(y_0)]}{2} E_2 \left(\int_{y_0}^y \frac{dy}{l'} \right) \frac{dy}{l'} + \rho \int_{-\infty}^{y_0} \dots \\ q_y &= \rho \int_{y_0}^{\infty} \frac{C_* C_p [T(y) - T(y_0)]}{2P_1} E_2 \left(\int_{y_0}^y \frac{dy}{l'} \right) \frac{dy}{l'} + \rho \int_{-\infty}^{y_0} \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

где введено турбулентное число Прандтля P_1 .

Выражение (1.4) можно упростить, если провести усреднение по углу $\cos \theta = 2/3$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \rho \int_{-\infty}^y [u(\xi) - u(y)] \frac{C_*}{4} \exp \left(- \int_{\xi}^y \frac{dz}{l} \right) \frac{d\xi}{l} - \\ &- \rho \int_y^{\infty} [u(\xi) - u(y)] \frac{C_*}{4} \exp \left(- \int_y^{\xi} \frac{dz}{l} \right) \frac{d\xi}{l} \quad \text{и т. п.} \end{aligned} \quad (1.5)$$

В многих случаях можно не интересоваться эффектами, возникающими из-за несимметрии потока, и упростить полученные выражения, разложив разности Δu и ΔT в ряд [7]

$$\tau_{xy} \approx -\rho \varepsilon \frac{du}{dy}, \quad q_y \approx -\frac{\rho C_p \varepsilon}{P_1} \frac{dT}{dy} \quad (1.6)$$

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_*}{4} |\xi - y| \exp \left(- \left| \int_{\xi}^y \frac{dz}{l} \right| \right) \frac{d\xi}{l} \quad (1.7)$$

2. Величины «пути смешения» и скорости порождения. В каждой точке потока имеются «моли» разных размеров. В принципе, задачу можно усложнить, введя распределение по масштабам. Пока ограничимся тем, что наиболее характерный размер как-то связан со свойствами распределения поля скорости или с характерным размером «порождающего» слоя в свободной струе и с расстоянием до стенки, ограничивающей поток, которая регулирует размер молей в потоке.

В качестве масштаба l примем зависимость, предложенную А. М. Обуховым [14]. Предполагается, что распределение масштаба определяется только геометрическими свойствами русла и используется гипотеза о локальном подобии. При этом вводится внутренняя геометрия потока, элемент которой $d\sigma = l^{-1} ds$ совпадает с введенной в рассматриваемой модели величиной $l^{-1} ds$, характеризующей вероятность взаимодействия. В этой работе указано также на появляющуюся в связи с этим анизотропию в потоке.

С точностью до постоянной определяется распределение масштаба в следующих случаях:

$$\begin{aligned} l &= ky && \text{для полуплоскости} \\ \frac{l}{h} &= \frac{2k}{\pi} \cos \left(\frac{\pi z}{2h} \right) && \text{для плоской щели ширины } 2h \\ \frac{l}{r_0} &= \frac{k}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] && \text{для круглой трубы радиуса } r_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь r и z — расстояние от оси и средней плоскости. Эти распределения достаточно хорошо согласуются с общеупотребительными выражениями для «пути смешения».

Сравнивая выражение для τ_{xy} в слое порождения при $l \rightarrow 0$ с выражением по теории пути смешения Л. Прандтля, получаем, что величина C_* пропорциональна скорости трения V_* . Примем в качестве гипотезы, что для C_* справедливо соотношение

$$C_* = C_0 \sqrt{|\tau_t| / \rho} \quad (C_0 = \text{const})$$

Здесь τ_t — Рейнольдсово напряжение трения. Это выражение может быть обобщено в пространственном случае.

Имея в виду, что теория «пути смешения» достаточно хорошо описывает турбулентный перенос в слое порождения, можно ожидать, что и в модели интегральной диффузии это допущение даст удовлетворительные результаты.

Перечисленных гипотез о зависимости для l , о зависимости для C_* , о существовании критического локального числа Рейнольдса R_0^+ и использования турбулентного числа Прандтля R_1 достаточно для замыкания системы уравнений.

Входящие при этом постоянные k , C_0 , R_0^+ и P_1 должны быть определены по опытным данным.

3. Пограничный слой у плоской пластиинки. Вблизи стенки, в области, где путь смешения мал, величина напряжения трения примерно постоянна.

Тогда

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho} = -V_*^2 (1 + \varepsilon^+) \frac{du^+}{dy^+} = -V_*^2$$

$$y^+ = \frac{yV_*}{\nu}, \quad u^+ = \frac{u}{V_*}$$

Здесь y — расстояние от стенки ($l = ky$) и величина скорости порождения постоянна при $y^+ > y_0^+$ и равна нулю при $y^+ < y_0^+$.

В соответствии с этим для ε^+ получаем следующие выражения

$$\frac{\varepsilon^+ 4}{c_0} = k y^+ \left[\left(1 - \left(\frac{y_0^+}{y^+} \right)^{1/k} \right) \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} \right] \quad \text{при } y^+ > y_0^+ \quad (3.1)$$

$$\varepsilon^+ \rightarrow \frac{2kC_0}{(1-k^2)4} y^+ \quad \text{при } \frac{y^+}{y_0^+} \gg 1 \quad (3.2)$$

$$\frac{\varepsilon^+ 4}{c_0} = \frac{y_0^+}{1-k} \left[\left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^{1/k} - (1-k) \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^{1/k+1} \right] \quad \text{при } y^+ < y_0^+ \quad (3.3)$$

$$\varepsilon^+ \rightarrow \frac{y_0^+}{1-k} \frac{C_0}{4} \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^{1/k} \quad \text{при } \frac{y^+}{y_0^+} \ll 1 \quad (3.4)$$

Имеются данные (см. например [15, 16]) о поведении величины турбулентного коэффициента теплопроводности

$$\frac{\varepsilon^+}{P_1} = a^4 (y^+)^4 \quad \text{при } y^+ \rightarrow 0$$

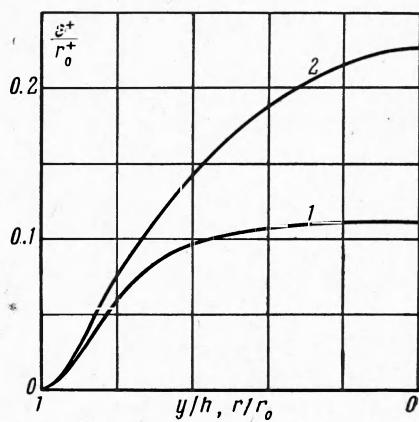
Так, $a = 0.124$ — по Дайслеру, $a = 0.09$ — по Спелдингу; ниже принято $a = 0.106$.

Сравнивая с этой зависимостью формулу (3.4) для ε^+ , а формулу (3.2) для ε^+ — с зависимостью $\varepsilon^+ = 0.40 y^+$ получаем

$$k = 0.25, \quad C_0 = 3, \quad y_0^+ = 20$$

Значение P_1 было принято равным 0.71.

Зависимости для ε^+ от y^+ , профиль скорости в пограничном слое и данные по теплопередаче при больших значениях числа Прандтля удовлетворительно совпадают с данными, приведенными в работе [15]. Постоянные, определенные по этим данным будут использованы при решении и других задач.



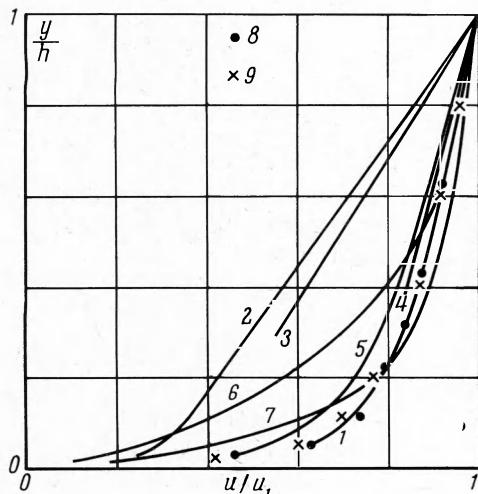
Фиг. 1. Распределение ε^+/r_0^+ по длине канала

4. Течение в плоском канале и течение Күэтта. Распределение пути смешения дается формулой (2.1). Для течения в плоском канале

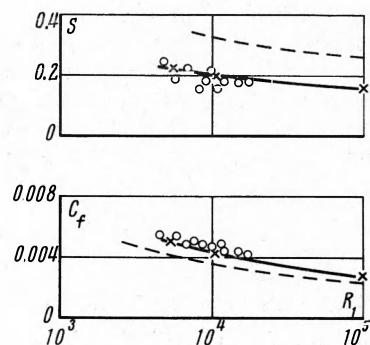
$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{y}{h}, \quad \frac{\tau_T}{\tau_w} = \frac{\varepsilon^+}{1 + \varepsilon^+} \frac{y}{h}$$

Используя это выражение и формулы (3.1) и (3.3) для ε^+ , находим распределение ε^+ поперек канала (фиг. 1, кривая 1 ($h^+ = 250$)) и распределение скорости, которое хорошо согласуется с распределением $u^+ = 5.1 + 2.5 \ln y^+$.

Рассмотренные до сих пор задачи решаются и при использо-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Распределение скорости: 1 — Kármán (1937) — с точностью до значения постоянной $C_f = 0,0042$; 2 — Pai (1952); 3 — Munk (1955); 4 — Reichardt (1955); 5 — Robertson (1957); 6 — Wu (1958); 7 — Wu — Robertson (1958); 8 — экспериментальные данные [17]; 9 — расчет изложенным методом

Фиг. 3. Производная профиля скорости и коэффициента сопротивления (сплошные кривые — расчет изложением методом, штриховые кривые — по теории путей смешения; 0 — экспериментальные точки, данные из работы [17])

вании обычной теории пути смешения при соответствующем подборе постоянных и задании зависимости $\varepsilon^+(Y^+)$. Поэтому в упомянутых случаях лишь проверялось то, что модель интегральной диффузии дает удовлетворительное решение.

Ниже рассматривается задача о турбулентном течении Күэтта, для которой теория пути смешения с постоянными, подобранными для задачи о пограничном слое, удовлетворительного решения не дает: необходимо постоянную, характеризующую величину турбулентной вязкости изменить почти в два раза [17].

Эта задача решена в приближении интегральной диффузии. Турбулентное напряжение трения вблизи стенки определяется по формуле

$$\frac{\tau_T}{\tau_w} = \frac{\varepsilon^+}{1 + \varepsilon^+}$$

величина ε^+ снова определяется по формулам (3.1) и (3.3), она приведена на фиг. 1 (кривая 2, $h^+ = 250$). В ядре потока величина ε^+ для течения Күэтта почти вдвое превышает величину ε^+ для течения в плоском канале. Различие появляется в результате различного распределения в этих случаях скорости порождения C_* в поперечном сечении.

Имея распределение ε^+ , можно получить выражение для наклона скорости в центре

$$S = \frac{h^+}{u_1^+} \left(\frac{du^+}{dy^+} \right)_1$$

и коэффициента сопротивления

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_1^2} = \frac{2}{(u_1^+)^2}$$

от $R_1 = u_1^+ h^+$, где U — значение скорости потока на оси.

На фиг. 2 приведено распределение скорости при $R_1 = 10^4$ и показано сравнение полученной зависимости с экспериментальными данными и различными решениями [17]. На фиг. 3 приведено сравнение зависимостей S и C_f .

Из сопоставления полученного решения с опытными данными видно, что совпадение профиля скорости и величины S достаточно хорошее, величина C_f в расчетах получилась примерно на 10% меньше, чем экспериментальная зависимость. Принимая во внимание, что значения постоянных не менялись, согласие можно считать удовлетворительным.

Поступила 29 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. Note on Free Turbulent Flows with Special Reference to the Two-Dimensional Wake. J. Aeronat. Sci., 1950, vol. 17, No 3. p. 441—445.
2. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. Изд. иностр. лит., 1959.
3. Шуба Г. Б., Чен К. М. Турбулентное течение. В кн. «Турбулентное течение и теплопередача», гл. II (под ред. Линь Ц. Ц.), Изд. иностр. лит., 1963, стр. 83—205.
4. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория. Физматгиз, 1963.
5. Schöfield I. C. Integral Diffusivity. J. Geophys. Res., 1962, vol. 67, No 8, p. 3187—3199.
6. Schwarz W. H., Cosart W. P. The Two-Dimensional Turbulent Wall-Jet. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, part 4. p. 481—495.
7. Булеев Н. И. Теоретическая модель механизма турбулентного обмена в потоках жидкости. Сб. «Теплопередача», Изд-во АН СССР, 1962, стр. 64—98.
8. Онуфриев А. Т. Модель неравновесных процессов в некоторых задачах механики сплошных сред. ПМТФ, 1963, № 1, стр. 47—56.
9. Spiegel E. A. A generalization of the mixing-length theory of turbulent convection. Astrophys. J., 1963, vol. 138, N 1, p. 216—225.
10. Лойцянский Л. Г. Турбулентное движение жидкости и внутренняя задача. Изв. Н.-и. ин-та гидротехн., 1933, т. 9, стр. 1—30.
11. Великанов М. А. Динамика русловых потоков, ч. I. Гостехиздат, 1954.
12. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. Сб. «Проблемы механики», Изд. иностр. лит., 1959, вып. II, стр. 297—340.
13. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. II. Изд-во «Наука», 1965.
14. Обухов А. М. О распределении масштаба турбулентности в потоках произвольного сечения. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3, стр. 209—220.
15. Лойцянский Л. Г. Перенос тепла в турбулентном движении. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, стр. 637—646.
16. Солдин Д. Б. Исследование теплообмена изотермической плоской пластины с турбулентным потоком жидкости, Инж.-физ. ж., 1963, № 3.
17. Robertson I. M. On Turbulent Plane-Couette Flow. Proc. of the Sixth mid-western Conference of fluid mechanics. The University of Texas, USA, 1959, p. 169—182.