

УДК 532.529 + 539.4

## ОБ ИМПУЛЬСНОЙ ДИНАМИКЕ ПОВРЕЖДАЕМЫХ ОБОЛОЧЕК, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. А. Петушков, А. Н. Мельситов

Институт машиноведения РАН, 101990 Москва  
E-mail: pva\_imash@bk.ru

Изучены особенности распространения ударных волн в системе, состоящей из деформируемой среды с повреждениями и двухфазной жидкости с пузырьками газа или пара. Моделируются нелинейные процессы взаимодействия сред с учетом фазовых превращений в жидкости и кинетики повреждаемости деформируемой среды.

**Ключевые слова:** двухфазная жидкость, повреждаемость деформируемой среды, метод конечных элементов.

**Введение.** Кавитационные процессы и кипение превращают жидкость в двухфазную газо- и парожидкостную среду. Появление в сплошной жидкости подобных дисперсных “частиц” даже малой концентрации существенно меняет характер распространения в ней ударных волн и волновые процессы в целом, приводит к возникновению дополнительных, локальных механизмов нагружения и разрушения взаимодействующих с ней конструкций.

Материал самих конструкций также неоднороден и включает рассеянные микродефекты — как начального, технологического происхождения (микропоры, микротрещины, жесткие включения и т. п.), так и появляющиеся в процессе деформирования.

Все эти микроповреждения оказывают влияние на реологические и прочностные свойства материала и, объединяясь в кластеры, приводят к появлению магистральных трещин и катастрофическому разрушению конструкций. Рассматривая их в виде тех же самых дисперсных частиц, деформируемую среду, по существу, также можно представить в виде двухфазной жидкости с очень вязкой несущей фазой [1].

При высокоскоростных ударных взаимодействиях динамическая реакция таких двухфазных сред представляет собой совокупность взаимосвязанных межфазовых и внутрифазовых явлений и процессов разной физической природы и различных пространственно-временных масштабов.

Из-за отсутствия последовательного экспериментального изучения этих явлений и процессов в настоящее время нет надлежащего обоснования предлагаемых для их описания теоретических моделей. Постановка таких экспериментов оказывается чрезвычайно сложной проблемой [2, 3].

В этой связи построение адекватной общепринятой системы уравнений для описания нестационарных течений двухфазных жидкостей все еще остается нерешенной проблемой механики гетерогенных сред. Не менее сложным на практике оказывается использование полной системы нелинейных уравнений динамики многофазных сред из-за математических трудностей, связанных с их численным решением [1, 3–5].

На практике для изучения подобных систем к традиционно используемым в механике сплошных сред подходам добавляется аппроксимация двухфазной среды ее составляющими в однофазном состоянии с известными физическими, термодинамическими и механическими параметрами.

Поведение сплошной жидкости и паровых (газовых) пузырьков, конструкций и микроповреждений описывается отдельно на основе решения соответствующих краевых задач, а взаимодействие между ними — уравнениями связи, реально отражающими процессы, происходящие на границах раздела фаз и сред и обеспечивающие требуемую точность моделирования.

В данной работе предлагается единый подход для описания взаимодействия двухфазной жидкости с пузырьками газа или пара и деформируемой среды с микродефектами. При этом деформируемая среда также представляется в виде двухфазной жидкости, а отдельный микродефект — пузырьком газа. Разрушение материала конструкции рассматривается как эволюция микроповреждений в результате его пластического течения до образования макротрещины.

Связь между объемом дисперсной фазы и процессами в жидкости устанавливается по скоростям и давлению, а в деформируемом теле — с использованием соответствующих реологических уравнений.

Краевая задача динамики двухфазных сред, включающая уравнения взаимодействия фаз и фазовых превращений, является нелинейной. Ее решение строится на основе метода конечных элементов (МКЭ), который в силу своей дискретной природы хорошо сочетается с используемым в работе подходом для схематизации двухфазных сред [6–8].

Согласно этому подходу в каждой макроскопической точке среды выделяется ячейка (конечный элемент), содержащая пробную дисперсную частицу и приходящую на нее часть несущей фазы. Распределение основных микропараметров внутри ячейки описывается уравнениями соответствующих микропроцессов с граничными условиями на ее поверхности.

Выбор типа и размеров ячеек определяется требуемой точностью аппроксимации геометрии задачи и ее решения в рассматриваемом пространстве. Решение соответствующих полудискретных уравнений МКЭ на временном слое осуществляется затем на основе оптимальных (рациональных) конечно-разностных схем [9–11].

В работе представлены решения важной в практическом отношении задачи об ударном нагружении конструкции, заполненной двухфазной сжимаемой жидкостью (водой) с пузырьками газа (воздуха) при нормальных условиях или пара в начальной стадии ее кипения, которые получены с учетом повреждаемости материала конструкции в процессе нелинейного деформирования.

**1. Краевая задача динамики гетерогенных сред.** В пространстве  $\mathbb{R}^3$  рассматривается движение двухфазной жидкости, заполняющей область  $D$  в канале с деформируемыми стенками, при распространении в ней ударных волн.

Двухфазная среда в момент времени  $t = 0$  принимается состоящей из жидкости (несущая фаза,  $i = 1$ , область  $D_1$ ) объемной концентрации  $\alpha_1$  с плотностью  $\rho_1^0$  (скорость звука  $\bar{C}_1$ ) и из пузырьков газа или пара (дисперсная фаза,  $i = 2$ , область  $D_2$ ) с объемной концентрацией  $\alpha_2$  ( $\alpha_2^2 \ll 1$ ), содержащих вещество с истинной плотностью  $\rho_2^0$ . В таком случае  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , а истинная и приведенная плотности  $\rho_i$  вещества  $i$ -й фазы связаны соотношением  $\rho_i^0 = \rho_i / \alpha_i$ . Тем самым рассматривается лишь относительная доля объема, занимаемого каждой фазой, и не отслеживается взаимное положение фаз.

Необходимость учета движения пузырьков относительно жидкости, приводящего к изменению их формы и разрушению, возникает для достаточно вязких жидкостей при резком изменении скорости движения частиц среды, что можно оценить по значениям чисел Вебера и Бонда [1].

Принимается [12, 13], что в любой единице объема жидкости содержится  $n$  пузырьков сферической формы радиуса  $R$ , в таком случае их объемная концентрация составит  $\alpha_2 = (4/3)\pi R^3 n$ .

Материал стенок деформируемого канала или любой другой конструкции, взаимодействующей с пузырьковой жидкостью, может быть представлен также в виде аналогичной жидкости с очень вязкой несущей фазой истинной плотностью  $\rho_3^0$ , вязкостью  $\mu_3$  и дисперсной фазой в виде микродефектов с объемной концентрацией  $\alpha_3$  ( $\alpha_3^2 \ll 1$ ).

Пусть двухфазная среда занимает ограниченное пространство  $\Omega = D \cup S$ , где  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ;  $D = D_1 \cup D_2$ ;  $S(x^k, t)$  — поверхность стенок канала, взаимодействующих со средой. При одновременном рассмотрении деформируемой конструкции, например тех же стенок канала, поверхность  $S$  становится внутренней границей контактного разрыва сред.

Полагая, что конструкция занимает открытую область  $D_3$ , для всей системы в целом можно принять  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ ,  $S^*(x^k, t) = \Omega \setminus \mathbb{R}^3$  — граница открытой области,  $t \in D_t = (0, \tau)$ , где  $\tau$  — интервал времени. Положение точек в пространстве определяется в декартовой системе координат  $x^k \in \Omega$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Математическая модель для описания гидродинамических течений рассматриваемых жидкостей может быть получена как частный случай из уравнений сохранения для гетерогенных сред, учитывающих поведение каждой фазы и взаимодействия между ними [1, 4, 5].

Эти уравнения включают осредненные функции и их производные по координатам и времени в пространстве  $\Omega \times D_t$ . Осреднение мгновенных значений параметров процесса выполняется по микрообъему  $\delta V_i$ , ограниченному поверхностью  $\delta S_i$  с нормалью  $n_i$  и занятому веществом  $i$ -й фазы.

Далее рассмотрим уравнения сохранения для многофазной среды.

*Уравнение сохранения массы:*

$$\frac{\partial \rho_i^0 \alpha_i}{\partial t} + \nabla^k \rho_i^0 \alpha_i v_i^k = J_{ji}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{v}_i = \{v_i^k\}$  — вектор скорости макроскопического движения вещества фазы  $i$ ;  $J_{ji}$  — скорость изменения массы вещества  $j$ -й фазы при его переходе в вещество фазы  $i$ . Для двухфазной среды  $i, j = 1, 2$ ;  $i \neq j$ .

*Уравнение сохранения импульсов:*

$$\rho_i^0 \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} = \nabla^k \sigma_i^k + \mathbf{R}_{ji} + J_{ji}(\mathbf{v}_{ji} - \mathbf{v}_i) + \rho_i^0 \mathbf{g}_i. \quad (1.2)$$

Тензор напряжений  $\sigma_i^{kl}$  для вещества  $i$ -й фазы в смеси будем считать симметричным, а составляющие шарового тензора напряжений  $\sigma_i^{kk}$  — пропорциональными объемной концентрации:

$$\sigma_i^{kl} = -\alpha_i p_i \delta^{kl} + \tau_i^{kl}, \quad (1/3)\sigma_i^{kk} = -\alpha_i p_i, \quad \tau_i^{kl} = \tau_i^{lk}, \quad \tau_i^{kk} = 0.$$

Здесь  $\nabla^k \sigma_i^k$  — главный вектор поверхностных сил вещества  $i$ -й фазы;  $\mathbf{v}_{ji} = \{v_{ji}^k\}$  — вектор скорости макроскопического движения вещества фазы  $j$ , претерпевающего переход в вещество  $i$ -й фазы;  $\mathbf{g}_i = \{g_i^k\}$  — вектор массовых сил.

При малом объемном содержании вещества дисперсной фазы и малых скоростях относительного движения фаз  $|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|/v_i \leq 1$  переносом пульсационного импульса пренебрегают по сравнению с макроскопическим.

Силы межфазового взаимодействия  $\mathbf{R}_{ji}$  зависят от предыстории нагружения, поэтому их сложно записать в явном виде. В самом общем случае они могут быть представлены в виде  $\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{R}_{ji}^{(p)} + \mathbf{R}_{ji}^{(\tau)} + \Delta \mathbf{R}_{ji}$  и охарактеризованы действием сил давления  $\mathbf{R}_{ji}^{(p)}$ , сдвиговыми напряжениями  $\mathbf{R}_{ji}^{(\tau)}$ , маломасштабными пульсациями давления  $\Delta \mathbf{R}_{ji}$ .

*Уравнение сохранения энергии.* Термодинамические процессы в многофазных средах будем рассматривать в рамках гипотезы локального термодинамического равновесия в

пределах вещества каждой отдельной фазы. Это позволяет ввести в каждой точке фазы локальную температуру  $T_i$  и использовать все термодинамические функции: внутреннюю энергию  $u_i$ , энтропию  $s_i$ , энтальпию  $i_i$ , свободную энергию  $\varphi_i$ , термодинамический потенциал  $z_i$ , которые связаны уравнениями, обычными в равновесной термодинамике однофазных сред.

Все эти функции можно представить зависящими от двух термодинамических параметров состояния, например  $p_i = p_i(\rho_i^0, T_i)$ , и для вещества каждой фазы смеси считать справедливыми соотношения Гиббса

$$T_i \frac{d_i s_i}{dt} = \frac{d_i u_i}{dt} + p_i \frac{d_i}{dt} \frac{1}{\rho_i^0},$$

где  $d_i/dt = \partial_i/\partial t + v_i^k \partial/\partial x^k$  — субстанциональная производная.

Полная удельная энергия  $E_i = u_i + v_i^2/2 + k_i$  вещества  $i$ -й фазы кроме средней внутренней энергии  $u_i$  включает среднюю кинетическую энергию макроскопического движения —  $v_i^2/2$  и среднюю кинетическую энергию пульсационного движения —  $k_i$ . По аналогии полная удельная энергия всей смеси определяется выражением  $E = u + K_i + k$ , составляющие которой для двухфазной среды могут быть представлены в виде

$$\rho u = \rho_1^0 u_1 + \rho_2^0 u_2, \quad \rho K_i = \rho_1^0 v_1^2/2 + \rho_2^0 v_2^2/2, \quad \rho k = \rho_1^0 k_1 + \rho_2^0 k_2,$$

где  $v_i$  — приведенная скорость движения вещества  $i$ -й фазы.

Осредненный межфазовый поток энергии на поверхности  $S_{12}$  за счет фазового перехода вещества  $j$ -й фазы в вещество  $i$ -й фазы записывается в виде

$$E_{ji} = W_{ji} + Q_{ji} + J_{ji}(u_{ji} + (v_{ji})^2/2 + (\delta v_i)^2/2)$$

и включает работу межфазовых сил  $W_{ji}$ , внутреннюю энергию  $J_{ji}u_{ji}$ , кинетическую энергию макроскопического движения вещества фазы  $i$ , претерпевающего фазовый переход в вещество  $i$ -й фазы,  $J_{ji}((v_{ji})^2/2)$ , кинетическую энергию пульсационного (маломасштабного) движения вещества  $i$ -й фазы  $J_{ji}((\delta v_i)^2/2)$ , межфазовый поток тепла  $Q_{ji}$ , где  $v_{ji}$  — приведенная скорость макроскопического движения вещества  $j$ -й фазы, претерпевающего фазовый переход в вещество  $i$ -й фазы;  $\delta v_i$  — приведенная скорость пульсационного (маломасштабного) движения вещества фазы  $i$ .

С учетом введенных понятий условие сохранения энергии для вещества  $i$ -й фазы может быть представлено:

уравнением изменения полной энергии  $E_{21} + E_{12} = 0$

$$\rho_i \frac{d_i}{dt} \left( u_i + k_i + \frac{v_i^2}{2} \right) = \nabla^k (\mathbf{c}_i^k - \mathbf{q}_i^k) + E_{ji} - J_{ji} \left( u_i + k_i + \frac{v_i^2}{2} \right) + \rho_i g_i^l v_i^l, \quad (1.3a)$$

где  $\{\mathbf{q}_i^k\}$  — вектор осредненного теплового потока;  $\{\mathbf{c}_i^k\}$  — вектор осредненного потока энергии вдоль поверхности  $\delta S_i$  выделенного объема  $\delta V_i$ ;

уравнением изменения средней внутренней энергии

$$\rho_i \frac{d_i u_i}{dt} = \rho_i A_i - \nabla^k \mathbf{q}_i^k + Q_{ji} - \nabla^k \mathbf{\Gamma}_i^k + J_{ji}(u_{ji} - u_i), \quad (1.3b)$$

где  $\{\mathbf{\Gamma}_i^k\}$  — вектор изменения внутренней энергии вещества  $i$ -й фазы за счет притока массы в результате пульсационного движения;

уравнением энергии пульсационного (маломасштабного) движения

$$\rho_i \frac{d_i k_i}{dt} = \sigma_i^{kl} \nabla^k v_i^l - \rho_i A_i + W_{ji} - R_{ji}^l v_i^l + \nabla^l \mathbf{\Lambda}_i^k + \rho_i h_i + J_{ji}(k_{ji} - k_i), \quad (1.3b)$$

где  $\rho_i A_i$  определяется работой внутренних сил за единицу времени в единице массы вещества  $i$ -й фазы;  $\{\Lambda_i^k\}$  — вектор, который определяет поток энергии пульсационного (маломасштабного) движения и работы поверхностных сил в этом направлении в веществе  $i$ -й фазы;

$$k_{ji} = (v_{ji} - v_i)^2/2 + (\delta v_i^2)/2.$$

*Уравнение сохранения энтропии.* Необратимость процессов взаимодействия компонентов смеси учитывается диссипативной функцией, определяющей изменение энтропии  $s$  смеси в результате внутренних процессов при фиксированной массе смеси.

Для малых температурных неравновесностей между веществами  $i$ -й и  $j$ -й фаз, когда  $(T_i - T_j)/T_i \ll 1$  и  $(T_i - T_s)/T_s \ll 1$ , эта функция существенно упрощается. Для двухфазных сред справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} i_i &= i_{is} + c_{is}(T_i - T_s), & i_{2s} - i_{1s} &= i_{12s}, \\ s_i &= s_{is} + c_{is}(T_i - T_s)/T_s, & s_{2s} - s_{1s} &= l_{12}(p)/T_s, \quad T = T_1 = T_2 = T_s(p), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где индекс  $s$  означает, что вещество  $i$ -й фазы находится в состоянии насыщения;  $c_i$  — теплоемкость вещества  $i$ -й фазы при постоянном давлении;  $i_{12}$  — энтальпия вещества одной из фаз, претерпевающей фазовый переход;  $l_{12}(p)$  — теплота фазового перехода.

Краевая задача (1.1)–(1.4) динамики многофазных сред должна быть дополнена соотношениями, описывающими внутрифазовые ( $\tau_i^{kl}$ ,  $q_i^k$ ) и межфазовые взаимодействия ( $F_{ij}$ ,  $Q_{ij}$ ,  $J_{ij}$ ), условия конечности дивергенции скорости вещества дисперсной фазы и потока тепла в центре дисперсной частицы (т. е.  $\nabla v_2 = 0$ ,  $\nabla q_2 = 0$ ) и осредненные условия на границе раздела фаз.

Кроме того, должны быть заданы внешние воздействия на рассматриваемые среды в виде массовых ( $g_i$ ) и поверхностных ( $F_\Delta$ ) сил, потоков тепла ( $Q_\Delta$ ) и диффузии ( $J_\Delta$ ) вещества фаз, а также соответствующие краевые и начальные условия, определяемые конкретной задачей.

При распространении ударных волн в многофазной среде нарушается ее структура, и приведенные выше уравнения оказываются неприменимыми. В этом случае зона среды на фронте ударной волны рассматривается как поверхность разрыва, по обе стороны от которой выполняются условия непрерывности параметров движения среды [1, 11].

**2. Математические модели для двухфазных жидкостей и деформируемых сред.** Учитывая особенности структуры и процессов, происходящих в рассматриваемых двухфазных средах, приведенные выше уравнения (1.1)–(1.4) можно существенно упростить. Упрощения касаются главным образом схематизации сред и описания дисперсной фазы, что позволяет построить эффективные модели для численного моделирования распространения волн в двухфазных жидкостях с пузырьками газа или пара [5–7].

Уравнения движения деформируемой среды с повреждениями также являются частным случаем из сформулированной краевой задачи. Для деформируемой конструкции ее материал как несущая фаза принимается в виде очень вязкой жидкости, а дисперсная фаза — это микродефекты в нем в виде очень мелких пузырьков газа сферической формы. Такие условия реализуются при очень малых значениях чисел Рейнольдса  $Re_p = \sqrt{p_3/\rho_3^0} R/(\mu_3/\rho_3^0) \ll 1$ , где  $p_3$  — давление несущей фазы среды.

Поведение газа в пузырьке можно принять изотермическим и пренебречь инерционными эффектами от движения стенок пузырьков и движением пузырьков относительно жидкости. Разница между давлениями в несущей и дисперсной фазах уравнивается вязкими силами в несущей фазе, которая в самом общем случае принимается сжимаемой.

Соответствующая краевая задача распадается на систему уравнений, описывающих деформирование рассматриваемой среды (конструкции), и уравнение кинетики микроповреждений [14].

Волновые процессы в материале твердого тела при наличии микрповреждений приводят к релаксационным эффектам, вызывают переход упругих деформаций в пластические и рассматриваются как фазовые переходы первого рода, если связаны с изменением внутренней энергии, и второго рода, если связаны с изменением физико-механических свойств [1, 14].

Для материала с повреждениями модуль сдвига  $\bar{\mu}$ , модуль объемного сжатия  $\bar{K}$  и коэффициент Пуассона  $\bar{\nu}$  могут быть представлены через соответствующие им значения для сплошного материала в виде

$$\bar{\mu} = \mu(1-d) \left(1 - \frac{6K+12\mu}{9K+8\mu} d\right), \quad \bar{K} = \frac{4\bar{\mu}K(1-d)}{4\mu+3Kd}, \quad \bar{\nu} = \frac{3\bar{K}-2\bar{\mu}}{2(3\bar{K}+\bar{\mu})}, \quad (2.1)$$

где  $d$  — относительный объем микропор, или параметр повреждаемости  $d = (\delta V - \delta V_S) / \delta V$ , причем  $\delta V$  — это, как и выше, элементарный объем, а  $\delta V_S$  — объем микропор в элементе объема деформируемой среды.

Изменение повреждаемости  $d$  рассматривается как сочетание процессов случайного зарождения новых ( $d_n(t)$ ) и развития существующих ( $d_g(t)$ ) микродефектов:

$$\dot{d}(t) = \dot{d}_n(t) + \dot{d}_g(t). \quad (2.2)$$

Скорости протекания этих процессов с достаточной точностью определяются соотношениями

$$\dot{d}_n(t) = 8\pi R_0 N_0 \exp \frac{p-p_0}{p_1} \quad \text{и} \quad \dot{d}_g(t) = (1-d(t)) \frac{d\varepsilon^T}{dt},$$

где  $R_0$  — параметр нормального закона распределения;  $N_0$ ,  $p_1$  — константы материала;  $p_0$  — предельное давление образования микродефектов;  $d\varepsilon^T/dt$  — скорость изменения эффективной пластической деформации, которая определяется первым инвариантом тензора скоростей пластической деформации  $\dot{\varepsilon}_{kl}$ .

Для сжимаемого материала процесс зарождения новых и эволюции существующих микрповреждений в результате действия ударной волны разрежения может быть описан на основе модели, используемой в [15].

Фактом разрушения материала конструкции является достижение параметром повреждаемости  $d$  предельного уровня  $d_F$ . Для большинства металлов  $d_F = 18 \div 28$  %, причем начальный (исходный) уровень поврежденности обычно не превышает 4 %.

Вследствие сжимаемости пор материал твердого тела, охваченный пластическим течением, также сжимается. Поэтому функция текучести принимает вид [15]

$$f = f(I_1, I_2, d) = I_2^{1/2} + ndI_1^2, \quad (2.3)$$

где  $I_1 = \text{tr}(T)$  и  $I_2 = (1/2)\text{tr}(T' \cdot T')$  — инварианты тензора напряжения  $T \approx \sigma_{kl}$ ;  $I$  — единичный тензор Кронекера;  $n$  — параметр материала.

**3. Схема численного решения задачи.** Краевая задача (1.1)–(1.4), (2.1)–(2.3), описывающая высокоскоростные волновые процессы в жидкости с пузырьками газа или пара и в деформируемой среде с повреждениями, является нелинейной и решается численно по схемам, хорошо апробированным ранее и представленным, например, в [6–8, 14].

В силу разного характера, а также различных пространственных и временных масштабов явлений и процессов, происходящих в такой системе, используется известный подход, основанный на разложении решения по процессам, или метод “расщепления” [16].

Деформируемая среда и взаимодействующая с ней жидкость аппроксимируются системой объемных конечных элементов  $\Delta_k$  таким образом, что  $\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{k=1}^M \Delta_k$ , где  $M$  —

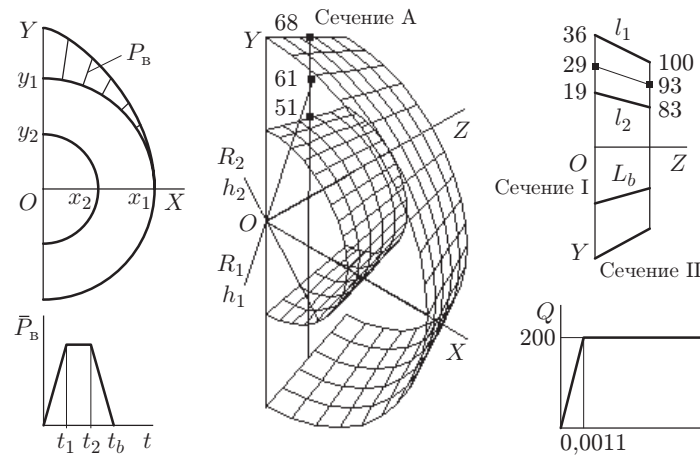


Рис. 1. Нелинейное деформирование конических оболочек с двухфазной жидкостью, подверженных импульсному давлению

общее число конечных элементов в жидкости и деформируемой среде;  $\Delta_l/\Delta_m = \emptyset$ , если  $l \neq m$ .

Конечные элементы, примыкающие к границе контактного разрыва  $S(x^k, t)$ , имеют совпадающие узлы конечно-элементной сетки.

Отрезок времени  $D_t$  протекания каждого исследуемого процесса равномерно разбивается на  $N$  промежутков продолжительностью  $\Delta t$ . Интегрирование по времени осуществляется с использованием односторонней разностной схемы, в результате получаем явную расчетную схему.

Каждый из объемных конечных элементов в жидкости рассматривается в качестве ячейки, содержащей пробную дисперсную частицу (условный пузырек газа или пара), объем которой равен суммарному объему реально находящихся в нем пузырьков. При этом полагается, что все пузырьки, содержащиеся в такой ячейке, колеблются одинаково. Изменение давления в жидкости обусловлено изменением объема находящейся в ней дисперсной фазы.

Шаг интегрирования по времени  $\Delta t$  для выбранной конечно-элементной сетки определяется с использованием известных критериев и уточняется в процессе численного эксперимента. Интегрирование “внутренних” уравнений краевой задачи (1.2)–(1.4), описывающих взаимодействия фаз и фазовых превращений, осуществляется методом Рунге — Кутты. Шаг интегрирования по времени  $\Delta t$  для этой численной схемы находится по критериям, принятым в данном методе.

Выбранные значения шагов интегрирования на временном слое  $D_t$  уточняются в процессе численного эксперимента, в том числе на примере решения волновой задачи для жидкости в однофазном состоянии.

**4. Результаты решения прикладной задачи.** Моделируется воздействие ударной волны на коаксиально расположенные деформируемые конические оболочки, образующие канал, заполненный жидкой средой со сжимаемой несущей фазой и дисперсной фазой в виде пузырьков газа или пара (рис. 1).

Сечения  $I$ ,  $A$ ,  $II$  лежат в плоскостях, перпендикулярных оси симметрии  $OZ$  оболочек. Сечения  $I$ ,  $II$  являются граничными. Сечение  $A$  делит конструкцию на две равные части.

Радиус внешней оболочки у основания  $R_1 = 1,0$  м, конусность  $l_1 = 0,75$ , толщина стенки постоянная ( $h_1 = 0,005$  м); радиус внутренней оболочки у основания  $R_2 = 0,5$  м, конусность  $l_2 = 0,75$ , толщина стенки постоянная ( $h_2 = 0,003$  м). Длина оболочек вдоль образующей  $L_b = 3$  м.

Оболочки изготовлены из стали плотностью  $\rho = 7810 \text{ кг/м}^3$ , с объемным модулем  $K = 150 \text{ ГПа}$ , модулем сдвига  $\mu = 70 \text{ ГПа}$ , коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$  и пределом текучести  $\sigma_{0,2} = 200 \text{ МПа}$ . Диаграмма деформирования материала оболочек представлена на рис. 1. Принимается, что в начальный момент времени микрповреждения в материале распределены равномерно с концентрацией  $d = 0,04$ .

Внешнее воздействие (рис. 1) осуществляется импульсным давлением сжатия, приложенным снаружи к поверхности  $S^*(x^i, t)$  внешней оболочки, постоянным по ее длине и распределенным по полупериметру в соответствии с соотношением

$$P_B = \bar{P}_B \cos \phi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (3.1)$$

Давление  $\bar{P}_B$  меняется в течение времени  $t_b = 0,39 \text{ мс}$  как

$$\bar{P}_B = \begin{cases} k_p t, & t < t_1, \\ k_p t_1, & t_1 < t < t_2, \\ k_p (t_2 - t), & t_2 < t < t_b, \end{cases} \quad (3.2)$$

достигая максимального значения  $\bar{P}_B = 20 \text{ МПа}$  в момент времени  $t = t_1$ . Здесь  $t_1 = 0,13 \text{ мс}$ ,  $t_2 = 0,26 \text{ мс}$ ,  $k_p = 0,75 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Пространство в канале между коаксиально расположенными оболочками заполнено двухфазной средой — водой с пузырьками воздуха при нормальных условиях или пара в начальной стадии ее кипения.

Сжимаемость несущей фазы полагается малой и рассматривается в акустическом приближении. Дисперсная фаза представляет собой пузырьки сферической формы одинакового размера, распределенные в жидкой среде равномерно. Принимается, что объемная концентрация дисперсной фазы в соответствии с (1.1) составляет  $\alpha_2 = 0,01$ . Начальный размер каждого пузырька  $R_0 = 0,134 \text{ мм}$ .

В начальный момент времени при нормальных условиях ( $p_0 = 0,1 \text{ МПа}$ ) сплошная жидкая среда и двухфазная газожидкостная среда находятся при комнатной температуре  $T_0 = 293 \text{ К}$ , а парожидкостная среда — при температуре насыщения  $T_0 = Ts(p_0) = 373 \text{ К}$ . При этом начальная плотность пара совпадает с плотностью насыщенного пара  $\rho_{20}^0 = \rho_{2S}^0$ .

Значения теплофизических параметров для рассматриваемых сред заимствованы из [1] и считаются постоянными. Эффективные значения чисел Нуссельта для вещества каждой из фаз приняты, как в [6, 7]. Для жидкости при  $T_0 = 373 \text{ К}$   $Nu_1 = 195,0$ , для пара при тех же условиях  $Nu_2 = 14,0$ , для воздуха при  $T_0 = 293 \text{ К}$   $Nu_2 = 16,5$ .

В силу симметрии задачи рассматривается половина конструкции (сечение  $A$  на рис. 1) с известными граничными условиями на торцах и относительно плоскости симметрии  $YOZ$  оболочек.

Начальное состояние для оболочек и жидкости в момент времени  $t = 0$  принимается свободным от деформации.

Условия на границе контактного разрыва — поверхности  $S(x^k, t)$  канала, соприкасающейся с жидкостью, следующие:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2)n_j &= 0, & x_k^1 &= x_k^2, & x_k &\in S \times D_t, \\ v_i^1 - v_i^2 &= 0, & t &\in D_t \end{aligned} \quad (3.3)$$

(верхними индексами 1, 2 обозначены соответственно деформируемая среда и двухфазная жидкость, находящиеся по обе стороны от границы  $S(x^k, t)$  с нормалью  $n_j$ ).

Для моделирования условий (3.3) в зоне контакта используется алгоритм последовательного пересчета [8, 11], который позволяет не только корректно реализовывать условия контактного разрыва, но и сочетать при этом различные методы решения сопряженных задач механики сплошных сред.



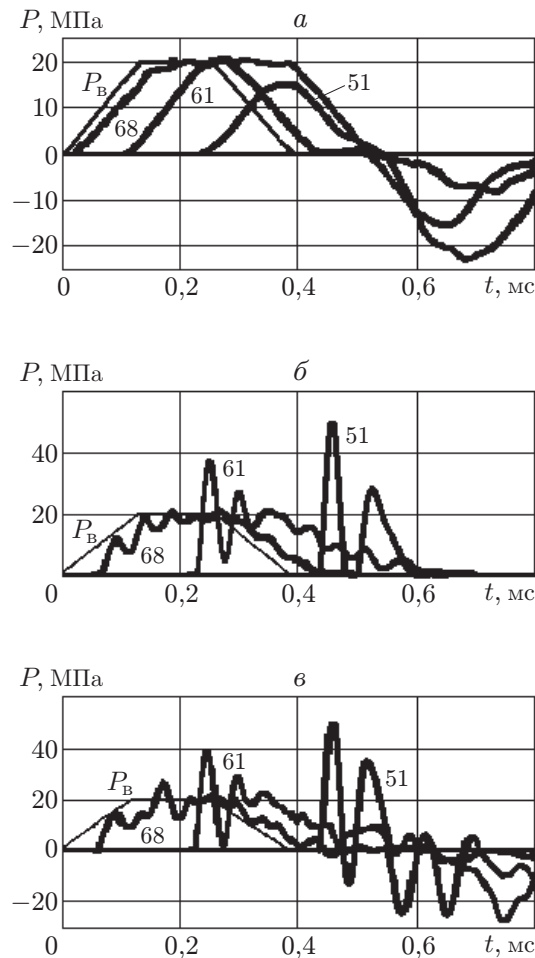


Рис. 2. Изменения во времени давления в средах, заполняющих канал между коаксиальными оболочками:

*a* — сплошная жидкость; *б* — газожидкостная среда; *в* — парожидкостная среда

При распространении ударных волн в паро- и газожидкостной среде пузырьки воздуха и пара могут изменять свою первоначальную форму, переходить в неустойчивое состояние и разрушаться.

Учет этих явлений оказывается чрезвычайно сложным для моделирования. Обычно вводится ограничение на минимальные размеры газового ( $R_{\min} = 50$  мкм) и парового ( $R_{\min} = 5$  мкм) пузырьков, по достижении которых они разрушаются. Так, для разрушения парового пузырька в результате обжатия внешним давлением оказывается достаточным 10-кратное уменьшение его первоначального размера [17]. Возможность перехода пузырьков в неустойчивое состояние в дальнейшем контролируется по текущим значениям чисел Рейнольдса, Бонда и Вебера [1].

Волновые процессы, происходящие в рассматриваемой системе под действием импульса давления в форме (3.1), представлены на рис. 2 для трех точек сечения *A* оболочек, приведенных в табл. 1.

В сплошной среде волны давления, как следует из рисунка, мало отличаются по форме от внешнего воздействия. Волна давления с максимальной амплитудой  $P_{\max} = \bar{P}_B^m$  достигает внутреннего из коаксиальных конусов (точка 51) за время  $t = 0,25$  мс и отражается

Таблица 1

Сечение $A$ ( $z = 0,25$ м)	
Номер точки	Расстояние от оси $OZ$ , м
68	$l_{68} = 0,862$
61	$l_{61} = 0,71$
51	$l_{51} = 0,47$

от его поверхности в момент времени  $t = 0,54$  мс. Скорость распространения волны в среде между точками 68 и 61 составляет 1750 м/с, а на участке между точками 61 и 51 — 1630 м/с.

Наличие пузырьков газа даже малой концентрации в сжимаемой жидкости существенно меняет характер распространения волн по сравнению со сплошной средой. Волна давления у поверхности внешней оболочки (точка 68) является одинарной, а по мере продвижения в глубь среды распадается на две волны. Так, к внутренней оболочке (точка 51) в момент времени  $t = 0,43$  мс подходит волна давления сжатия с амплитудой  $P_{\max} = 2,54\bar{P}_B^m$  и средней скоростью 1100 м/с, а следом за ней с интервалом 0,07 мс — вторая волна давления сжатия с максимальной амплитудой  $P_{\max} = 1,5\bar{P}_B^m$  и скоростью 875 м/с.

Наличие газовой дисперсной фазы делает невозможным отражение волны сжатия от внутреннего из деформируемых коаксиальных конусов, так как возникающая в результате волна разрежения исчезает за счет вызванного ею увеличения объема дисперсной фазы. Внешняя оболочка не догружается, а внутренняя не разгружается отраженной волной. Аналогичное явление было обнаружено и в ряде других работ (см., например, [18]).

Несколько иная картина распространения волн давления в сжимаемой жидкости возникает при наличии в ней паровой дисперсной фазы (рис. 2). До момента времени  $t = 0,27$  мс имеет место сходство волновых процессов для рассматриваемых сред. Однако с течением времени начинают проявляться существенные отличия, главными из которых являются отсутствие явного разделения волны, появление разрежения в результате схлопывания паровых пузырьков в среде и отражения волны давления от поверхности внутреннего из коаксиальных конусов.

Волна давления в парожидкостной среде с максимальной амплитудой  $P_{\max} = 2,56\bar{P}_B^m$  распространяется со скоростью 1050 м/с и достигает внутреннего из коаксиальных конусов (точка 51) практически за то же время  $t = 0,43$  мс, что и в жидкости с пузырьками газа.

В результате схлопывания паровые пузырьки исчезают, среда у поверхности оболочки становится сплошной, волна давления сжатия отражается от ее поверхности волной разрежения в момент времени  $t = 0,56$  мс.

Особенности взаимодействия указанных сред с оболочками хорошо отражаются эпюрами распределения давления по их поверхности в сечении  $A$  (рис. 3).

Давление сжатия со стороны жидкости на внешнюю оболочку начинает действовать практически сразу с момента ее нагружения импульсом. К внутренней оболочке волна сжатия подходит в различные моменты времени для разных сред. Действие парожидкостной среды на оболочки оказывается более продолжительным, чем газожидкостной.

Деформированное состояние оболочек в полной мере определяется характером их нагружения (рис. 4). Перемещения точек  $y_1$ ,  $y_2$  и  $x_1$  сечения  $I$  оболочек (рис. 1, 4) представлены в табл. 2 для различных сред.

При наличии в жидкости пузырьков газа внешняя коаксиальная оболочка деформируется в меньшей степени, чем в случае сплошной жидкости. При этом внутренняя оболочка сильнее продавливается в направлении действия импульса давления и выпучивается в цен-

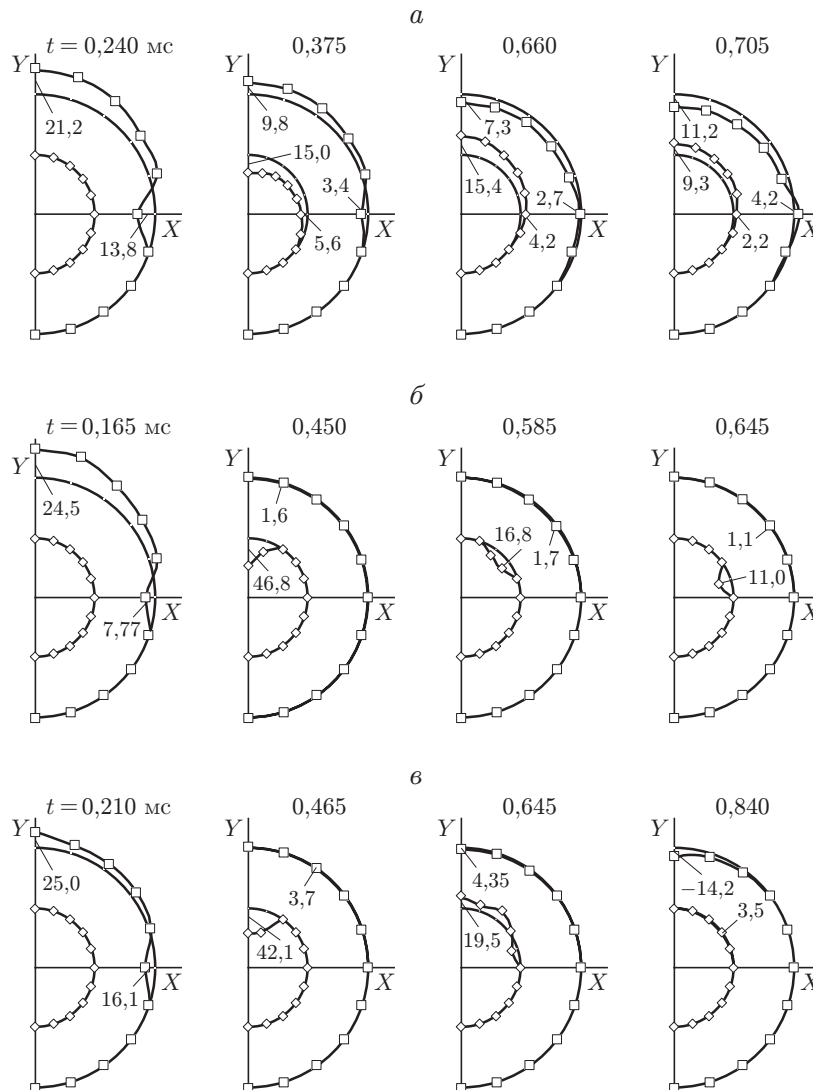


Рис. 3. Распределения давления вдоль контуров оболочек в сечении А для различных сред и моментов времени:

*a* — сплошная жидкость; *б* — газожидкостная среда; *в* — парожидкостная среда

тральной части вдоль оси  $OX$  из-за отсутствия разгрузки отраженной волной давления разрезания.

Для жидкости с пузырьками пара внешняя оболочка подвергается деформированию в большей степени, чем для сплошной среды, а внутренняя оболочка — в меньшей степени, чем для газожидкостной среды, вследствие более продолжительной разгрузки отраженной волной. Таким образом, рассматриваемая парожидкостная среда играет роль своеобразного экрана, защищающего от разрушения внутреннюю оболочку.

Различия в характере и уровнях динамического нагружения оболочек в рассмотренных выше случаях обуславливают различия в кинетике накопления и уровнях поврежденности их материала (рис. 5).

Для оболочек, заполненных сплошной средой, накопленные к моменту времени  $t = 0,9$  мс повреждения материала внешней оболочки незначительны по уровню ( $d \approx 5\%$ ) и охватывают небольшую ее часть. В материале внутренней оболочки в слое, прилега-

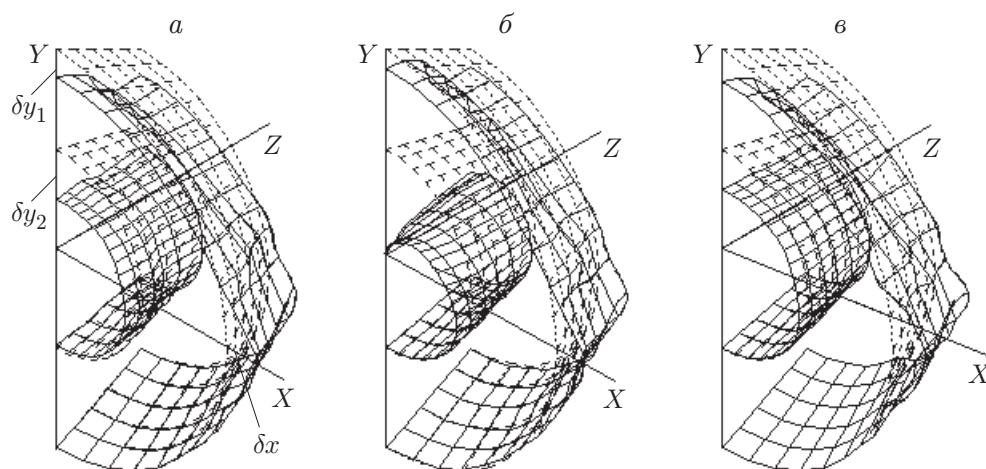


Рис. 4. Деформированные состояния оболочек для различных сред в момент времени  $t = 0,9$  мс от начала нагружения:

$a$  — сплошная жидкость;  $b$  — газожидкостная среда;  $c$  — парожидкостная среда

Таблица 2

Среда	$\delta y_1$ , мм	$\delta y_2$ , мм	$\delta y_3$ , мм
Сплошная жидкость	6,3	11,5	8,0
Газожидкостная	4,3	24,0	7,6
Парожидкостная	7,4	9,3	10,0

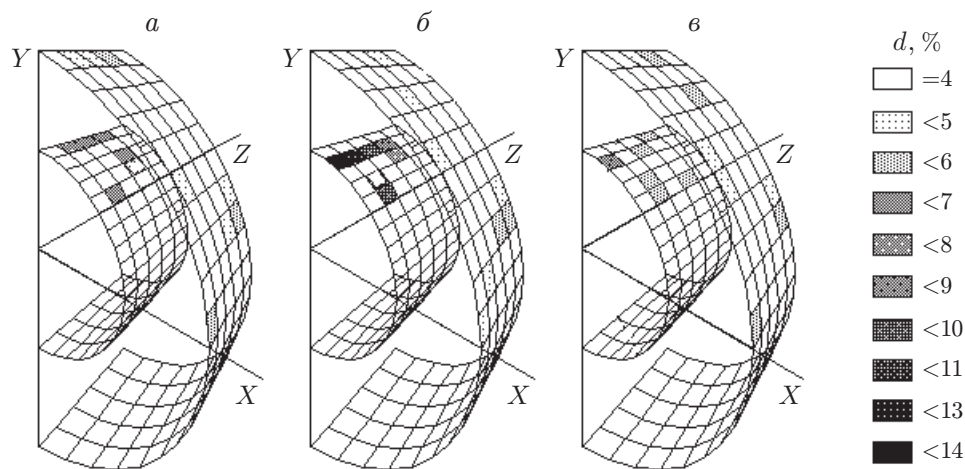


Рис. 5. Уровни поврежденности материала оболочек для различных сред в канале в момент времени  $t = 0,9$  мс от начала нагружения:

$a$  — сплошная жидкость;  $b$  — газожидкостная среда;  $c$  — парожидкостная среда

ющем к ее внутренней поверхности, происходит интенсивное накопление повреждений с примерно постоянным уровнем вдоль образующей, который к тому же моменту времени достигает максимального значения  $d \approx 7\%$ .

При наличии дисперсных частиц поврежденное состояние материала внешней оболочки к моменту времени  $t = 0,9$  мс по характеру и уровню остается практически таким же, как и для сплошной среды.

В случае газожидкостной среды отсутствие разгрузки приводит к интенсивному накоплению повреждений материала внутренней оболочки, максимальный уровень которых к моменту времени  $t = 0,9$  мс достигает значения  $d \approx 14\%$  во внешнем ее слое с образованием явно выраженной магистральной трещины.

Существенно более низкие уровни воздействия на внутреннюю оболочку в случае парожидкостной среды обуславливают явно меньшие уровни повреждаемости ее материала по сравнению даже со случаем жидкости в однофазном состоянии. К моменту времени  $t = 0,9$  мс повреждения в оболочке носят фрагментарный характер, их максимальный уровень не превышает  $d \approx 6\%$ .

**Выводы.** Представлена математическая модель ударного взаимодействия повреждаемой деформируемой среды с двухфазными паро- и газожидкостными средами. Выполнено численное моделирование нелинейных процессов деформирования и разрушения конструкции, составленной из оболочек, заполненных двухфазной сжимаемой жидкостью с пузырьками газа или пара.

Получены физически достоверные картины моделируемых явлений и оценены количественно их основные параметры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
2. **Hewitt G. F.** Measurements of two-phase flow parameters. London: Acad. Press, 1978.
3. **Bergles A. E., Collier J. G., Delhaye J. H., et al.** Two-phase flows and heat transfer in the power and process industries. N. Y.: Hemisphere P. C., 1981.
4. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатом, 1990.
5. **Stewart H. V., Wendroff V.** Two-phase flows: models and methods // J. Comput. Phys. 1984. V. 56, N 3. P. 363–409.
6. **Мельситов А. Н., Петушков В. А.** Высокоскоростная динамика двухфазной газожидкостной среды с теплообменом между фазами // Мат. моделирование. 2000. Т. 12, № 12. С. 35–54.
7. **Петушков В. А., Мельситов А. Н.** Двухфазное парожидкостное течение в переходных режимах // Мат. моделирование. 2003. Т. 15, № 10. С. 109–128.
8. **Петушков В. А., Мельситов А. Н.** Взаимодействие деформируемых сред с двухфазной газожидкостной средой при высокоскоростном ударном нагружении // Мат. моделирование. 1998. Т. 10, № 11. С. 3–18.
9. **Петушков В. А.** Численные исследования нелинейных волновых процессов в жидкости и деформируемом теле при высокоскоростном ударном взаимодействии // ПМТФ. 1991. № 2. С. 134–143.
10. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
11. **Петушков В. А., Фролов К. В.** Динамика гидроупругих систем при импульсном возбуждении // Динамика конструкций гидроаэроупругих систем. М.: Наука, 2002. С. 162–202.
12. **Гаврилов П. Р.** О распределении газовых пузырьков в воде по их размерам // Акуст. журн. 1969. Т. 15, вып. 1. С. 25–27.
13. **Когарко Б. С.** Движение смеси жидкости с паровыми пузырьками // Междунар. семинар по неустановившимся движениям воды с большими скоростями. М.: Наука, 1973. С. 243–246.

14. Мельситов А. Н., Петушков В. А. Разрушение упругопластических сред высокоскоростным ударом газожидкостной среды // Мат. моделирование. 2000. Т. 12, № 10. С. 95–109.
15. Петушков В. А., Надарейшвили А. И. Математическое моделирование нелинейных процессов деформирования и разрушения объемных тел при высокоскоростном соударении // Мат. моделирование. 2004. Т. 16, № 5. С. 17–29.
16. Марчук Г. И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
17. Florschuetz L. W., Chao V. T. Destruction mechanisms of vapor bubbles // Trans. ASME. Ser. C. 1965. N 2. P. 58–72.
18. Галиев Ш. У., Бабич Ю. Н., Жураховский С. В. и др. Численное моделирование волновых процессов в ограниченных средах. Киев: Наук. думка, 1989.

*Поступила в редакцию 22/III 2004 г.,  
в окончательном варианте — 15/XI 2004 г.*