

УДК 519.853.6, 517.97, 539.376

## ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. Бормотин, А. И. Олейников

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,  
681013 Комсомольск-на-Амуре  
E-mail: cvmi@knastu.ru

Показано, что обратные задачи изгиба пластин теории установившейся ползучести как в геометрически линейной, так и в нелинейной постановке можно представить в вариационной формулировке. В результате применения процедуры метода конечных элементов к полученным функционалам определяются их стационарные значения, соответствующие решениям двух задач: неупругого деформирования и упругой разгрузки. С использованием критерия минимизации поврежденности в функционалах обратных задач формулируются оптимальные законы деформирования при ползучести. Поставленные задачи сведены к задачам, решаемым методом конечных элементов с помощью комплекса MSC.Marc.

Ключевые слова: обратная задача ползучести, поврежденность, вариационные принципы, задача многокритериальной оптимизации, оптимальное управление.

**1. Случай малых прогибов.** Обратная задача изгиба пластины при ползучести формулируется в следующем виде [1, 2]: определить прогибы или внешние нагрузки при  $0 < t < t_*$  ( $t$  — время), которые нужно приложить к пластине, чтобы в момент снятия внешних нагрузок при  $t = t_*$  получить заданные значения остаточных прогибов  $\tilde{w}^*$ .

Рассмотрим пластину постоянной толщины  $h$ . В срединной плоскости введем декартову систему координат  $x_k$  ( $k = 1, 2$ ), ось  $z$  направлена перпендикулярно этой плоскости. Область, занятую пластиной, обозначим через  $S$ , контур пластины — через  $\gamma$ . Будем считать, что прогиб  $w = w(x_1, x_2)$  мал по сравнению с толщиной  $h$ .

При деформировании пластины под действием изменяющихся во времени внешних нагрузок возникают деформации  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(t)$  и напряжения  $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(t)$  ( $k = 1, 2, l = 1, 2$ ), которые связаны соотношениями

$$\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \eta_{kl}), \quad (1)$$

где  $c_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих констант;  $\eta_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^c$  — скорости деформаций ползучести; точка означает дифференцирование по времени  $t$ ; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Скорость полных деформаций представляет собой сумму скоростей деформаций упругости и ползучести:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \eta_{kl}.$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-08-00845-а), а также в рамках целевой программы Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы” (код проекта 2.1.1/9725) и государственного задания Министерства образования РФ (код проекта 1.2582.2011).

Модель ползучести определяется потенциалом скоростей деформаций [3]

$$\eta_{ij} = \frac{\partial \Phi(\sigma_{et})}{\partial \sigma_{ij}},$$

где  $\Phi(\sigma_{et}) = \sigma_{et}^{n+1}/(n+1)$ ;  $\sigma_{et} = \sqrt{3T/2}$  — приведенное напряжение [3, 4];  $T = aJ_1^2 + bJ_2 + cJ_3$  ( $a > 0, b > 0, c > 0$ );  $J_1 = \sigma_{33} - (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$ ;  $J_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2$ ;  $J_3 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$ .

При описании деформирования изотропных сред с различными характеристиками материала на стадии установившейся ползучести при чистом растяжении и сжатии необходимо рассмотреть потенциал скоростей ползучести в виде [3]

$$\Phi = \frac{f_1(\xi, \eta, \zeta)}{n_1 + 1} \sigma_{et1}^{n_1+1} + \frac{f_2(\xi, \eta, \zeta)}{n_2 + 1} \sigma_{et2}^{n_2+1},$$

где

$$\sigma_{etm} = \sqrt{3T_m/2}, \quad T_m = a_m J_1^2 + b_m J_2 + c_m J_3 \quad (a_m > 0, b_m > 0, c_m > 0, m = 1, 2),$$

$$\xi = \frac{J_1}{\sqrt{J}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{J_3}{J}}, \quad \zeta = \frac{J_4^{1/3}}{J},$$

$$J_4 = 4\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} + (\sigma_{22} - \sigma_{11})(\sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2), \quad J = J_1^2 + J_2 + J_3 + j_4^{2/3},$$

$$f_1(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^3 \prod_{l=1, l \neq k}^6 \frac{\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_{kl}}{\mathbf{r}_{kl} \cdot \mathbf{r}_{kl}}, \quad f_2(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=4}^6 \prod_{l=1, l \neq k}^6 \frac{\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_{kl}}{\mathbf{r}_{kl} \cdot \mathbf{r}_{kl}},$$

$$\mathbf{r}_l = (\xi - \xi_l)\mathbf{e}_1 + (\eta - \eta_l)\mathbf{e}_2 + (\zeta - \zeta_l)\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_{kl} = (\xi_k - \xi_l)\mathbf{e}_1 + (\eta_k - \eta_l)\mathbf{e}_2 + (\zeta_k - \zeta_l)\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

Постоянные  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  определяются в результате обработки данных аналогичных экспериментов при одноосном сжатии и растяжении соответственно.

При малых прогибах  $w$  пластины полные деформации определяются следующим образом [5]:

$$\varepsilon_{kl} = -zw_{,kl} \quad (k = 1, 2, \quad l = 1, 2). \quad (2)$$

Уравнения равновесия имеют вид [5]

$$Q_k = M_{kl,l}, \quad Q_{k,k} = -q, \quad (3)$$

$$Q_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3k} dz, \quad M_{kl} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl} z dz \quad (k = 1, 2, \quad l = 1, 2),$$

где  $Q_k, M_{kl}$  — перерезывающие силы и моменты;  $q$  — интенсивность внешней нагрузки.

В момент времени  $t_*$  снятия внешних нагрузок и соответствующей упругой разгрузки образуются поля остаточных деформаций  $\tilde{\varepsilon}_{kl} = \tilde{\varepsilon}_{kl}(t_*)$  и остаточных напряжений  $\rho_{kl} = \rho_{kl}(t_*)$ . Определяющие соотношения разгрузки записываются в виде [1]

$$\dot{\rho}_{ij} = c_{ijkl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - \eta_{kl}). \quad (4)$$

Аналогично (2) остаточные деформации выражаются через остаточный прогиб  $\tilde{w}$  пластины:

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = -z\tilde{w}_{,kl} \quad (k = 1, 2, \quad l = 1, 2). \quad (5)$$

В задаче разгрузки внешняя нагрузка должна отсутствовать, поэтому в данном случае уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k &= \tilde{M}_{kl,l}, & \tilde{Q}_{k,k} &= 0, \\ \tilde{Q}_k &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho_{3k} dz, & \tilde{M}_{kl} &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho_{kl} z dz \quad (k = 1, 2, l = 1, 2). \end{aligned} \quad (6)$$

Используя теорию многокритериальной оптимизации [6, 7] и принимая в качестве критериев качества функционалы квазистатических вариационных принципов задачи деформирования [8] и разгрузки, функционал вариационного принципа обратной задачи теории ползучести можно представить в виде

$$J(\dot{w}, \dot{\tilde{w}}) = c_1 \left( \int_V W(\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}) dV - \int_S \dot{q} \dot{w} dS \right) + c_2 \int_V W(\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}) dV,$$

где  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  — весовые коэффициенты;  $W(\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}) = c_{ijkl} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{kl} / 2 - c_{ijkl} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} \eta_{kl} = \dot{\sigma}_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}$ ;  $W(\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}) = c_{ijkl} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{kl} / 2 - c_{ijkl} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} \eta_{kl} = \dot{\rho}_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}$ .

С учетом соотношений (1)–(6) выражение для вариации функционала  $J(\dot{w}, \dot{\tilde{w}})$  принимает вид

$$\delta J(\dot{w}, \dot{\tilde{w}}) = c_1 \left( - \int_S \dot{M}_{ij} \delta \dot{w}_{,ij} dx_1 dx_2 - \int_S \dot{q} \delta \dot{w} dx_1 dx_2 \right) - c_2 \int_V \dot{M}_{ij} \delta \dot{\tilde{w}}_{,ij} dx_1 dx_2.$$

Интегрируя первый член выражения в скобках по частям, находим [1, 9]

$$\int_S \dot{M}_{ij} \delta \dot{w}_{,ij} dx_1 dx_2 = \int_\gamma \dot{M}_{ni} \delta \dot{w}_{,i} ds - \int_S \dot{Q}_i \delta \dot{w}_{,i} dx_1 dx_2,$$

где  $\dot{M}_{ni} = \dot{M}_{ij} n_j$ ,  $n_j$  ( $j = 1, 2$ ) — компоненты единичного вектора внешней нормали.

Аналогичное выражение можно получить для интеграла с множителем  $c_2$ . Подставляя в полученные соотношения формулы, позволяющие перейти от дифференцирования по  $x_1$ ,  $x_2$  к дифференцированию по  $n$ ,  $s$  ( $s$  — длина дуги контура  $\gamma$ ):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = n_1 \frac{\partial}{\partial n} - n_2 \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = n_2 \frac{\partial}{\partial n} + n_1 \frac{\partial}{\partial s},$$

можно записать выражение для вариации функционала  $J(\dot{w}, \dot{\tilde{w}})$  в окончательном виде

$$\begin{aligned} \delta J(\dot{w}, \dot{\tilde{w}}) &= c_1 \left[ - \int_S [\dot{Q}_{i,i} + \dot{q}] \delta \dot{w} dx_1 dx_2 + \int_\gamma \left( \dot{Q} + \frac{\partial \dot{H}}{\partial s} \right) \delta \dot{w} ds - \int_\gamma \dot{G} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial n} ds \right] - \\ &- c_2 \left[ \int_S \dot{Q}_{i,i} \delta \dot{\tilde{w}} dx_1 dx_2 - \int_\gamma \left( \dot{Q} + \frac{\partial \dot{H}}{\partial s} \right) \delta \dot{\tilde{w}} ds + \int_\gamma \dot{G} \frac{\partial \delta \dot{\tilde{w}}}{\partial n} ds \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\dot{Q} = \dot{Q}_k n_k$ ;  $\dot{\tilde{Q}} = \dot{\tilde{Q}}_k n_k$ ;  $\dot{H} = \dot{M}_{kl} n_k t_l$ ;  $\dot{\tilde{H}} = \dot{\tilde{M}}_{kl} n_k t_l$ ;  $\dot{G} = \dot{M}_{kl} n_k n_l$ ;  $\dot{\tilde{G}} = \dot{\tilde{M}}_{kl} n_k n_l$ ;  $t_k$  — компоненты единичного касательного к  $\gamma$  вектора, положительное направление которого выбирается таким образом, чтобы при обходе области  $S$  она оставалась слева [1, 9].

Возможны следующие граничные условия задачи деформирования и разгрузки:

$$1) \dot{w} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial n} = 0, \quad \dot{\tilde{w}} = \frac{\partial \dot{\tilde{w}}}{\partial n} = 0 \text{ (край зашпемлен);}$$

$$2) \dot{w} = \dot{G} = 0, \quad \dot{\tilde{w}} = \dot{\tilde{G}} = 0 \text{ (край свободно оперт);}$$

$$3) \dot{G} = \dot{Q} + \frac{\partial \dot{H}}{\partial s} = 0, \quad \dot{\tilde{G}} = \dot{\tilde{Q}} + \frac{\partial \dot{\tilde{H}}}{\partial s} = 0 \text{ (свободный край).}$$

В случае зашпемленного края при деформировании пластины и разгрузке из выражения  $\delta J(\dot{w}, \dot{\tilde{w}}) = 0$  следуют уравнения равновесия

$$\dot{Q}_{i,i} + \dot{q} = 0, \quad \dot{\tilde{Q}}_{i,i} = 0.$$

Задача оптимального деформирования формулируется в следующем виде [1]: найти способ деформирования элемента среды в течение заданного времени  $t_*$ , так чтобы в момент  $t = t_*$  были получены заданные значения деформации ползучести  $\varepsilon_{kl}^c$ , а параметр поврежденности  $\Omega$  был минимальным.

При учете диссипируемой работы параметр поврежденности описывается уравнением

$$\dot{\Omega} = \frac{dA}{A^* dt} = \frac{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^c}{A^* dt} = \frac{\sigma_{ij} \eta_{ij}}{A^*},$$

где  $A^*$  — критическое значение работы разрушения напряжений при деформациях ползучести (рассеянная энергия в момент разрушения) [10].

Таким образом, минимизируя диссипируемую работу  $A = \sigma_{ij} \eta_{ij}$  для каждого момента времени, получаем минимальный параметр поврежденности. С помощью метода весовых коэффициентов [6, 7] записывается задача оптимального деформирования с использованием функционала

$$J_{opt}(\dot{w}, \dot{\tilde{w}}) = \int_V W(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV - \int_S \dot{q} \dot{w} dS + c_1 \int_V W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) dV + c_2 \int_V \sigma_{ij} \eta_{ij} dV,$$

где  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  (количество весовых коэффициентов уменьшено путем деления на один из них [7]).

Из равенства  $\delta J = 0$  помимо уравнений равновесия и граничных условий для текущих и остаточных скоростей напряжений следует уравнение относительно напряжений и скоростей деформаций для текущей и остаточной конфигураций

$$c_2 \sigma_{ij} = c_{klij} \dot{\varepsilon}_{kl} + c_1 c_{klij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}. \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по времени, заменяя скорости напряжений с помощью формулы (1) и учитывая симметрию тензора упругих констант, находим уравнение

$$c_{ijkl} [\ddot{\varepsilon}_{kl} + c_1 \ddot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - c_2 (\dot{\varepsilon}_{kl} - \eta_{kl})] = 0. \quad (8)$$

Из условий равновесия для остаточных напряжений (6) получаем

$$\int_{-h/2}^{h/2} \dot{\rho}_{ij,ij} z dz = 0.$$

Подставляя определяющие соотношения (4) в последний интеграл, имеем

$$\int_{-h/2}^{h/2} c_{ijkl} (\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl,ij} - \eta_{kl,ij}) z dz = 0, \quad (9)$$

или

$$\int_{-h/2}^{h/2} c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl,ij} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} c_{ijkl} \eta_{kl,ij} z dz.$$

Продифференцировав (8) по  $x_1, x_2$ , умножив на  $z$  и проинтегрировав по толщине пластины, получаем

$$\int_{-h/2}^{h/2} c_{ijkl} [\ddot{\tilde{\varepsilon}}_{kl,ij} + c_1 \ddot{\tilde{\varepsilon}}_{kl,ij} - c_2 (\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl,ij} - \eta_{kl,ij})] z dz = 0.$$

Используя (9), находим

$$\int_{-h/2}^{h/2} c_{ijkl} [\ddot{\tilde{\varepsilon}}_{kl,ij} + c_1 \dot{\eta}_{kl,ij} - c_2 (\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl,ij} - \eta_{kl,ij})] z dz = 0.$$

При большом времени деформирования компонентами скоростей упругих деформаций  $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}^e$  можно пренебречь вследствие их малости по сравнению с развитыми деформациями ползучести, как, например, при решении задач теории ползучести [11]. В этом случае  $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} = \eta_{kl}$ .

Пусть выражение для искомого прогиба имеет вид

$$w(t, x_1, x_2) = f(t)w^*(x_1, x_2). \quad (10)$$

Тогда

$$(1 + c_1)c_{ijkl} \int_{-h/2}^{h/2} \ddot{\tilde{\varepsilon}}_{kl,ij} z dz = 0,$$

или

$$(1 + c_1)c_{ijkl} \ddot{f} w_{,kl,ij}^* = 0,$$

откуда следует  $\ddot{f} = 0$ , в силу того что  $c_{ijkl}$  — положительные константы, а на форму прогиба  $w^*$  ограничения не накладывались.

Интегрируя уравнение  $\ddot{f} = 0$ , находим  $f(t) = C_1 t + C_2$ , но так как  $f(0) = 0$ ,  $f(t_*) = 1$ , то  $f(t) = t/t_*$ .

Таким образом, в случае малых прогибов оптимальное деформирование происходит по линейному закону  $w = (t/t_*)w^*$ .

**2. Обратные задачи изгиба мембраны при ползучести.** В случае тонкой пластины, прогибы которой могут во много раз превышать ее толщину, сопротивлением пластины изгибу можно пренебречь. Иными словами, жесткость пластины при изгибе можно приравнять к нулю. Тогда решение задачи сведется к нахождению прогиба гибкой мембраны [5]. В этом случае выражения для деформаций и скоростей деформаций соответственно принимают вид (аналогичные выражения имеют место для остаточных деформаций)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl} &= \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) + \frac{1}{2} w_{,k} w_{,l}; \\ \dot{\varepsilon}_{kl} &= \frac{1}{2} (\dot{u}_{k,l} + \dot{u}_{l,k}) + \frac{1}{2} \dot{w}_{,k} w_{,l} + \frac{1}{2} w_{,k} \dot{w}_{,l} \quad (k = 1, 2, l = 1, 2). \end{aligned} \quad (11)$$

Обратная задача для вязкоупругой мембраны, занимающей в плоскости  $x_1Ox_2$  область  $S$ , ограниченную контуром  $\gamma$ , формулируется в следующем виде: определить внешние силы  $q = q(x_1, x_2, t)$ , нормальные к области  $S$ , и силы  $p_k = p_k(s, t)$  ( $k = 1, 2$ ;  $s$  — длина дуги контура  $\gamma$ ), действующие в плоскости  $S$  при  $0 \leq t \leq t_*$ , которые нужно приложить к мембране, находящейся при  $t < 0$  в естественном недеформированном состоянии, чтобы после их снятия и соответствующей упругой разгрузки при  $t = t_*$  получить заданные значения остаточных прогибов  $\tilde{w}^*$  [1].

В случае существования решения доказана его единственность для геометрически нелинейных задач формоизменения неупругих пластин [2].

Рассмотрим функционал вариационной формулировки обратной задачи изгиба вязкоупругой мембраны в виде многокритериальной задачи оптимизации:

$$J(\dot{w}, \dot{u}_k, \dot{\tilde{w}}, \dot{\tilde{u}}_k) = c_1 \left[ \int_S \left( \dot{N}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{2} N_{ij} \dot{w}_{,i} \dot{w}_{,j} \right) dS - \int_{\gamma} \dot{p}_i \dot{u}_i ds - \int_S \dot{q} \dot{w} dS \right] + \\ + c_2 \int_S \left( \dot{\tilde{N}}_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} + \frac{1}{2} \tilde{N}_{ij} \dot{\tilde{w}}_{,i} \dot{\tilde{w}}_{,j} \right) dS.$$

Здесь

$$c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad \dot{N}_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \dot{\sigma}_{ij} dz, \quad \dot{\tilde{N}}_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \dot{\rho}_{ij} dz, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

С учетом соотношений (1), (4), (11) выражение для вариации функционала  $J(\dot{w}, \dot{u}_k, \dot{\tilde{w}}, \dot{\tilde{u}}_k)$  принимает вид

$$\delta J(\dot{w}, \dot{u}_k, \dot{\tilde{w}}, \dot{\tilde{u}}_k) = c_1 \left( \int_{\gamma} (\dot{N}_{ij} n_j - \dot{p}_i) \delta \dot{u}_i ds - \int_S \dot{N}_{ij,j} \delta \dot{u}_i dS + \int_{\gamma} (\dot{N}_{ni} w_{,i} + N_{ni} \dot{w}_{,i}) \delta \dot{w} ds \right) - \\ - c_1 \int_S [(\dot{N}_{ij} w_{,j})_{,i} + (N_{ij} \dot{w}_{,j})_{,i} + \dot{q}] \delta \dot{w} dS - c_2 \int_S [(\dot{\tilde{N}}_{ij} \tilde{w}_{,j})_{,i} + (\tilde{N}_{ij} \dot{\tilde{w}}_{,j})_{,i}] \delta \dot{\tilde{w}} dS + \\ + c_2 \left( \int_{\gamma} \dot{\tilde{N}}_{ij} n_j \delta \dot{\tilde{u}}_i ds - \int_S \dot{\tilde{N}}_{ij,j} \delta \dot{\tilde{u}}_i dS + \int_{\gamma} (\dot{\tilde{N}}_{ni} \tilde{w}_{,i} + \tilde{N}_{ni} \dot{\tilde{w}}_{,i}) \delta \dot{\tilde{w}} ds \right),$$

где  $\dot{N}_{ni} = \dot{N}_{ij} n_j$ ;  $\dot{\tilde{N}}_{ni} = \dot{\tilde{N}}_{ij} n_j$ . Тогда из уравнения  $\delta J = 0$  следуют условия равновесия в области  $S$

$$(\dot{N}_{ij} w_{,j})_{,i} + (N_{ij} \dot{w}_{,j})_{,i} + \dot{q} = 0, \quad \dot{N}_{ij,j} = 0, \\ (\dot{\tilde{N}}_{ij} \tilde{w}_{,j})_{,i} + (\tilde{N}_{ij} \dot{\tilde{w}}_{,j})_{,i} = 0, \quad \dot{\tilde{N}}_{ij,j} = 0$$

и граничные условия на контуре  $\gamma$

$$\dot{N}_{ij} n_j = \dot{p}_i, \quad \dot{N}_{ni} w_{,i} + N_{ni} \dot{w}_{,i} = 0, \\ \dot{\tilde{N}}_{ij} n_j = 0, \quad \dot{\tilde{N}}_{ni} w_{,i} + \tilde{N}_{ni} \dot{w}_{,i} = 0.$$

При решении обратной задачи для вязкоупругой мембраны с учетом минимизации параметра поврежденности  $\Omega$  строится функционал задачи оптимального деформирования в виде

$$J_{opt}(\dot{w}, \dot{u}_k, \dot{\tilde{w}}, \dot{\tilde{u}}_k, \eta_{kl}) = \int_S \left( \dot{N}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{2} N_{ij} \dot{w}_{,i} \dot{w}_{,j} \right) dS - \int_{\gamma} \dot{p}_i \dot{u}_i ds - \int_S \dot{q} \dot{w} dS + \\ + c_1 \int_S \left( \dot{\tilde{N}}_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} + \frac{1}{2} \tilde{N}_{ij} \dot{\tilde{w}}_{,i} \dot{\tilde{w}}_{,j} \right) dS + c_2 \int_S N_{ij} \eta_{ij} dS.$$

Из уравнения  $\delta J_{opt} = 0$ , в котором независимыми переменными являются  $\dot{w}$ ,  $\dot{u}_k$ ,  $\dot{\tilde{w}}$ ,  $\dot{\tilde{u}}_k$ ,  $\eta_{kl}$ , следуют условия равновесия в области  $S$  и граничные условия на контуре  $\gamma$ , а также дополнительное уравнение для мембраны

$$c_2 \sigma_{ij} = c_{kl ij} \dot{\epsilon}_{kl} + c_1 c_{kl ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{kl}. \quad (12)$$

Дифференцируя по времени уравнение (12) и заменяя скорости напряжений с помощью формулы (1), с учетом симметрии тензора упругих констант находим

$$c_{ijkl} [\ddot{\epsilon}_{kl} + c_1 \ddot{\tilde{\epsilon}}_{kl} - c_2 (\dot{\epsilon}_{kl} - \eta_{kl})] = 0. \quad (13)$$

В предположении выпуклости поверхности после деформирования с учетом результатов расчетов [1] имеем  $\rho_{kl} = 0$ . Таким образом, из определяющих соотношений (4) следует  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{kl} = \eta_{kl}$ . Кроме того, при большом времени деформирования компонентами скоростей упругих деформаций  $\dot{\epsilon}_{kl}^e$  можно пренебречь вследствие их малости по сравнению с развитыми деформациями ползучести. В этом случае  $\dot{\epsilon}_{kl} = \eta_{kl}$ . В результате выражение (13) принимает вид

$$(1 + c_1) c_{ijkl} \ddot{\epsilon}_{kl} = 0.$$

При нулевых граничных условиях для скоростей перемещений  $\dot{u}_k$ ,  $\dot{\tilde{u}}_k$  вследствие незначительности этих перемещений можно исключить их из соотношений (11). Тогда, используя представление прогиба в виде (10), из последнего уравнения находим

$$(f^2 + f \ddot{f}) c_{ijkl} w_{,k}^* w_{,l}^* = 0.$$

В силу того что  $c_{ijkl}$  — положительные константы, это уравнение справедливо при

$$\dot{f}^2 + f \ddot{f} = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение по каждому слагаемому (второе слагаемое интегрируется по частям), находим

$$\int \dot{f}^2 dt + f \dot{f} - \int \dot{f}^2 dt = C_1,$$

или  $f \dot{f} = C_1$ . Интегрируя еще раз, получаем

$$f^2/2 = C_1 t + C_2,$$

или  $f = \sqrt{2(C_1 t + C_2)}$ , но так как  $f(0) = 0$ ,  $f(t_*) = 1$ , то  $f = \sqrt{t/t_*}$ .

Таким образом, в случае больших прогибов с учетом принятых допущений оптимальное деформирование проводится по нелинейному закону  $w = \sqrt{t/t_*} w^*$ .

Покажем, что при  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{kl} = \dot{\eta}_{kl} = 0$  процесс деформирования является оптимальным. При известном потенциале скоростей ползучести можно записать выражение для напряжений [4]

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}},$$

причем функция  $U(\eta_{ij})$  будет выпуклой.

В силу выпуклости поверхности выполняется неравенство для любых двух значений скоростей деформирования  $\eta_{ij}$ ,  $\eta_{ij}^0$ :

$$U - U_0 \geq \frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}^0} (\eta_{ij} - \eta_{ij}^0).$$

Через  $\eta_{ij}^0$  обозначена обеспечивающая заданные остаточные деформации скорость деформирования, при которой  $\dot{\eta}_{ij}^0 = 0$  или  $\eta_{ij}^0 = \text{const}$ . Диссипируемую работу и напряжения, соответствующие данному виду деформирования, обозначим  $A_0$ ,  $\sigma_{ij}^0$ . Тогда для любой скорости деформирования  $\eta_{ij}$ , которой соответствуют диссипируемая работа  $A$  и напряжения  $\sigma_{ij}$ , в конечный момент времени  $\varepsilon_{ij}^c(t_*) = \tilde{\varepsilon}_{ij}(t_*)$  получаем

$$\begin{aligned} A - A_0 &= \int_0^{t_*} \int_V (\sigma_{ij} \eta_{ij} - \sigma_{ij}^0 \eta_{ij}^0) dV dt = \int_0^{t_*} \int_V \left( \frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}} \eta_{ij} - \frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}^0} \eta_{ij}^0 \right) dV dt \geq \\ &\geq \frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}^0} \int_0^{t_*} \int_V (\eta_{ij} - \eta_{ij}^0) dV dt = \frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}^0} \int_V (\varepsilon_{ij}^c - \varepsilon_{ij}^{0c}) dV = 0. \end{aligned}$$

Таким образом  $A \geq A_0$ , что свидетельствует об оптимальности пути деформирования при  $\dot{\eta}_{ij}^0 = 0$ . Данный вывод справедлив и в случае малых прогибов.

### 3. Методы решения обратных задач на основе вариационных принципов.

Применяя процедуру метода конечных элементов [12] к функционалам вариационных принципов обратных задач, получаем два векторных уравнения

$$K \dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{F}}, \quad \tilde{K} \dot{\tilde{\mathbf{w}}} = 0, \tag{14}$$

где  $K$ ,  $\tilde{K}$  — матрицы жесткости для задач деформирования и разгрузки;  $\dot{\mathbf{w}}$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}$  — векторы скоростей узловых параметров, описывающих функции прогиба при неупругом деформировании  $w(x_1, x_2)$  и остаточного прогиба  $\tilde{w}(x_1, x_2)$ ;  $\dot{\mathbf{F}}$  — вектор скорости внешних сил.

В частности, векторы скоростей прогибов принимаются в виде  $\dot{\mathbf{w}} = (\dot{\mathbf{w}}_1, \dot{\mathbf{w}}_2, \dots, \dot{\mathbf{w}}_N)^T$ ,  $\dot{\mathbf{w}}_i = (u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})^T$ , где  $N$  — количество узлов в пластине;  $u_i, v_i, w_i$  — узловые перемещения в направлениях осей  $x_1, x_2, x_3$  соответственно;  $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$  — углы поворота в узлах относительно соответствующих осей. Аналогично вводятся векторы  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}$ .

Выражая остаточный прогиб через прогиб разгрузки  $w^e$  в виде  $\tilde{w} = w - w^e$  или  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = \dot{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{w}}^e$  и подставляя в векторные уравнения метода конечных элементов (14), получаем

$$K \dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{F}}, \quad \tilde{K} \dot{\mathbf{w}}^e = \dot{\tilde{\mathbf{F}}}(\dot{\sigma}_0). \tag{15}$$

Второе уравнение в (15) представляет собой уравнение разгрузки с начальными напряжениями и деформациями, полученными при решении задачи неупругого деформирования.

При решении уравнений (15) применяются обычные процедуры пошагового интегрирования нелинейных уравнений механики деформирования твердого тела и уточнения решений [8].

Используя алгоритм решения обратных задач, предложенный в [13], введем оператор  $\Psi$  решения двух задач (15), с помощью которого по заданному прогибу определяется остаточный прогиб. Тогда (15) можно представить в виде

$$\Psi \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}}. \tag{16}$$



Для нахождения решения данной обратной задачи построим следующий итерационный процесс:

$$\mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{w}^i + k(\tilde{\mathbf{w}}^0 - \tilde{\mathbf{w}}^i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad \mathbf{w}^1 = \tilde{\mathbf{w}}^0, \quad (17)$$

или  $\mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{w}^i + k(\tilde{\mathbf{w}}^0 - \Psi \mathbf{w}^i)$ . Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется неравенство  $\|\Psi \mathbf{w}^i - \tilde{\mathbf{w}}^0\| < r$ , где  $r$  — заданная точность решения;  $\tilde{\mathbf{w}}^0$  — глобальный вектор заданных остаточных перемещений узлов. В частности, в качестве нормы можно выбрать наибольшее значение одной из компонент перемещений. Для ускорения процесса приближения к решению подбирается значение коэффициента  $k > 1$ , для уточнения приближения — значение  $0 < k < 1$ .

**4. Результаты решений.** Рассмотрим квадратную пластину толщиной  $h$  с длиной стороны  $a$ . Известен прогиб пластины при кручении [14] в виде узловых перемещений по координате, нормальной к поверхности пластины. Выше была показана оптимальность пути деформирования  $w = \sqrt{t/t_*} w^*$  при учете потенциального закона ползучести. Используя численные методы, проверим оптимальность этого пути деформирования в случае неассоциированного закона ползучести. Чтобы провести более полный анализ напряженно-деформированного состояния, необходимо рассмотреть объемную постановку задачи.

В расчетах используются характеристики материала АК4-1Т (алюминиевого сплава) пластины. Материал изотропен, и его параметры упругости, одинаковые при растяжении и сжатии, принимают следующие значения: модуль Юнга  $E = 7000 \text{ кг/мм}^2$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,4$ . В экспериментах на сжатие и растяжение стадия установившейся ползучести описывается законом Нортона при различных значениях коэффициента  $B$  для каждого из этих видов деформирования: при сжатии  $B_1 = 0,25 \cdot 10^{-14} (\text{кг/мм}^2)^{-n_1} \cdot \text{ч}^{-1}$ ,  $n_1 = 8$ ; при растяжении  $B_2 = 0,5 \cdot 10^{-14} (\text{кг/мм}^2)^{-n_2} \cdot \text{ч}^{-1}$ ,  $n_2 = 8$ .

Результаты расчетов при ползучести по закону Нортона (рис. 1) и по закону разносопротивляемости (рис. 2) с использованием линейной и нелинейной функций  $f(t)$  показывают, что в случае нелинейной функции поле повреждаемости уменьшается.

На рис. 3 представлены результаты исследования сходимости алгоритма (17) по норме прогибов  $p = \left( \sum_{k=1}^N (\tilde{w}_k - \tilde{w}_k^*)^2 \right)^{1/2}$  ( $N$  — количество узлов на нижней поверхности пластины) для четырех задач. Видно, что сходимость данных задач практически одинакова.

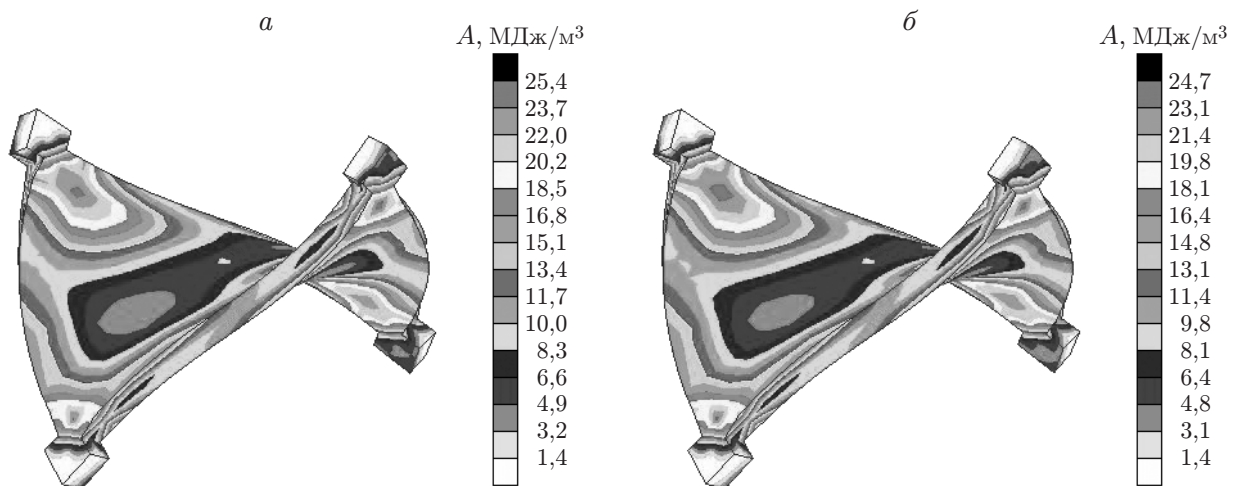


Рис. 1. Поле диссипируемой работы при деформировании пластины по закону ползучести Нортона с использованием линейной (а) и нелинейной (б) функций  $f(t)$

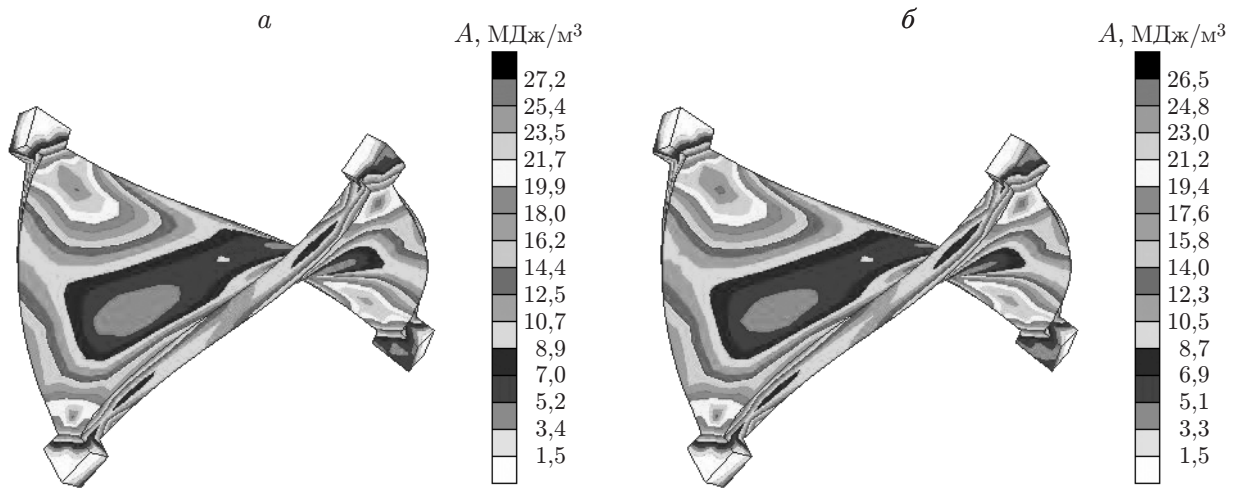


Рис. 2. Поле диссипируемой работы при деформировании пластины по закону разносопротивляемости с использованием линейной (а) и нелинейной (б) функций  $f(t)$

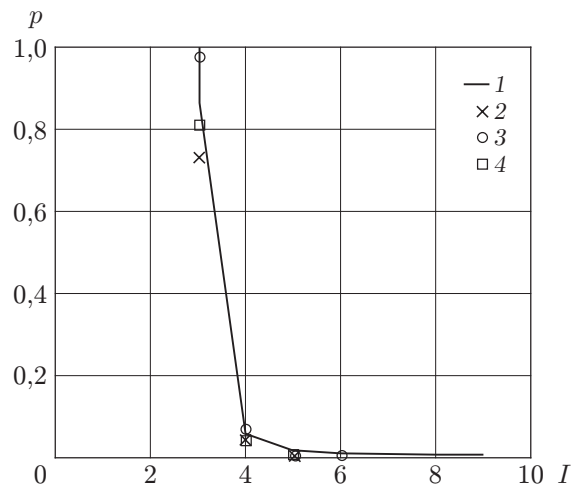


Рис. 3. Отклонение остаточного прогиба пластины от прогиба, заданного на итерациях:

1, 2 — решение задачи для закона ползучести Нортона (1 — с использованием линейной функции  $f(t)$ , 2 — с использованием нелинейной функции  $f(t)$ ), 3, 4 — решение задачи для закона разносопротивляемости (3 — с использованием линейной функции  $f(t)$ , 4 — с использованием нелинейной функции  $f(t)$ );  $I$  — номер итерации

В данной работе получена общая формулировка обратных задач изгиба пластин с использованием функционалов вариационных принципов, в которых можно учитывать параметр повреждаемости. При заданных ограничениях найдены оптимальные законы деформирования пластин, которые согласуются с данными работы [1]. С использованием вариационных принципов, лежащих в основе метода конечных элементов, решены обратные задачи при различных законах ползучести и зависимостях деформации от времени.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
2. **Цвелодуб И. Ю.** Некоторые геометрически нелинейные задачи формоизменения неупругих пластин и пологих оболочек // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 2. С. 151–157.
3. **Олейников А. И.** Модели установившейся ползучести трансверсально-изотропных материалов с разными характеристиками при растяжении и сжатии // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, № 3. С. 52–59.
4. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
5. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Физматгиз, 1963.
6. **Баничук Н. В.** Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986.
7. **Liu G. P.** Multiobjective optimisation and control / G. P. Liu, J. B. Yang, J. F. Whidborne. Baldock: Res. Studies Press, 2003.
8. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
9. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
10. **Соснин О. В.** Энергетический вариант теории ползучести / О. В. Соснин, Б. В. Горев, А. Ф. Никитенко. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986.
11. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975.
12. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
13. **Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С.** Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 155–165.
14. **Олейников А. И., Коробейников С. Н., Горев Б. В., Бормотин К. С.** Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычисл. методы и программирование. 2008. Т. 9. С. 346–365.

*Поступила в редакцию 16/1 2012 г.*