

## ТРЕХМЕРНЫЕ СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ НА НАКЛОННО СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

*С. В. Алексеенко, С. И. Шторк*

*(Красноярск)*

Сильное влияние на процессы теплопереноса в стекающих пленках жидкости оказывают волны, которые практически всегда присутствуют на поверхности пленки [1, 2]. Все существующие работы по волновым пленкам жидкости связаны с бегущими волнами, возникающими вследствие естественной неустойчивости пленочного течения или наложения искусственных возмущений. Но кроме бегущих волн на пленках наблюдаются и стоячие, образующиеся от местных возмущений на дне или боковых стенках лотка. Сложная система стоячих волн возникает при использовании искусственной шероховатости стенки с целью интенсификации теплообмена в пленках [3].

Особенность стоячих волн, образованных локализованными возмущениями, — их трехмерный характер. Волны имеют подковообразный вид и внешне соответствуют одиночным бегущим трехмерным волнам (рис. 1). Теоретическое описание трехмерного волнового движения сопряжено с большими математическими трудностями. Не меньше трудностей возникает и при экспериментальном исследовании бегущих трехмерных волн ввиду их явной нестационарности и сильного взаимодействия друг с другом. Стоячие трехмерные волны в противоположность бегущим — удобный объект для детального изучения на опыте и для проверки дву- и трехмерных волновых теорий.

В данной работе теоретически и экспериментально исследованы дисперсия и форма гребней трехмерных стоячих волн на наклонно стекающей пленке вязкой жидкости в широком диапазоне углов наклона, расходов и свойств жидкости.

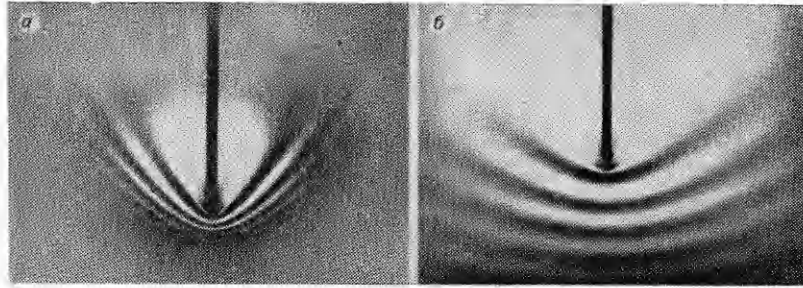
**Экспериментальная техника.** Опыты проводились на экспериментальной установке, состоящей из рабочего участка — лотка, сливного бака, центробежного насоса, ротаметров и регулировочных вентилях. Лоток представляет собой гладкую оргстеклянную пластину шириной 150 и длиной 1000 мм, по поверхности которой стекает пленка жидкости. Жидкость на поверхность пластины поступает путем перелива через закругленный край пластины из раздаточного резервуара, укрепленного на лотке. Стекающая с лотка жидкость собирается в приемном резервуаре, также укрепленном на лотке. С боковых сторон пленочное течение ограничено металлическими стенками с отшлифованной поверхностью.

Лоток установлен на стойке, позволяющей тонко регулировать наклон лотка в двух плоскостях. В опытах угол наклона лотка к горизонту менялся от 75 до 2,75°. Точность измерения угла наклона составила 0,25°.

Толщина пленки жидкости в безволновой зоне измерялась контактным способом с помощью иглы, присоединенной к индикатору часового типа с ценой деления 0,01 мм. Расход жидкости определялся по показаниям ротаметров типа РС-5. Температура жидкости фиксировалась ртутным термометром с ценой деления 0,1°C. Равномерность орошения поверхности лотка контролировалась визуально по симметрии волновой картины и по значениям толщины пленки в разных точках лотка.

Стационарные стоячие волны создавались в гладкой зоне путем касания поверхности пленки заостренным кончиком иглы. Характеристики волн (форма гребней и длина волны) определялись по фотографиям, сделанным со стороны смоченной поверхности лотка напросвет. Типичные фотографии стоячих волн показаны на рис. 1, а, б. Длина волн измерялась только в направлении течения. Точность этих измерений оценивается в пределах 2—7%. Показано, что длина волны и форма гребней не зависят от глубины погружения иглы.

В качестве рабочей жидкости использовались дистиллированная вода, растворы этилового спирта и глицерина. Физические свойства основных растворов, а также диапазоны чисел Рейнольдса  $Re$  и углов наклона лотка  $\theta$  приведены в табл. 1, где  $t$  — температура,  $\nu$  — вязкость,  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $\rho$  — плотность жидкости,  $Fi = \sigma^3/\rho^3 g \nu^4$  — пленочное число,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $Re = q/\nu$ ,  $q$  — удельный расход жидкости.



Р и с. 1

**Дисперсия стоячих волн.** Так как для стоячих волн абсолютная фазовая скорость  $c = 0$ , то под дисперсией подразумевается зависимость длины волн  $\lambda$  (или волнового числа  $k$ ) от скорости потока. При обработке данных удобнее использовать не скорость потока, а  $Re$ . Для гладкого ламинарного установившегося течения пленки жидкости справедливы соотношения Нуссельта

$$Re = gh^3 \sin \theta / 3\nu^2 = q/\nu, \quad u_s = gh^2 \sin \theta / 2\nu,$$

где  $u_s$  — скорость на поверхности пленки;  $h$  — толщина пленки. Безразмерное волновое число определим как  $\bar{k} = kh = 2\pi h/\lambda$ .

Данный эксперимент показывает, что на поверхности пленки имеются короткие стоячие волны ( $\bar{k} \gg 1$ ) и длинные ( $\bar{k} < 1$ ). Почти все существующие теории волновых пленок жидкости основаны на длинноволновом приближении, но и они в подавляющем большинстве непригодны для описания стоячих волн, так как не имеют решения  $c = 0$ .

Универсальное модельное двухволновое уравнение для длинных волн на наклонно стекающей пленке жидкости выведено в [4], оно описывает различные типы волн, в том числе и стоячие. Из него в [4] получено дисперсионное соотношение

$$(1) \quad (\bar{k} Re)^2 = \frac{B}{6} [\bar{c}^2 - 2,4\bar{c} + 1,2 - A] \times \\ \times \left\{ 1 + \left[ 1 + \frac{27(\bar{c} - 3)(\bar{c} + 0,6)}{B(\bar{c}^2 - 2,4\bar{c} + 1,2 - A)^2 (\bar{c} - 1,2)^5} \right]^{1/2} \right\}.$$

Здесь безразмерная фазовая скорость  $\bar{c} = c/u_0$ ; средняя скорость  $u_0 = gh^2 \sin \theta / 3\nu$ ;  $A = 3 \operatorname{ctg} \theta / Re$ ;  $B = Re^3 \sin \theta / We$ ; число Вебера  $We = \sigma / \rho gh^2$ .

Уравнение (1) имеет две пары непересекающихся корней, из которых лишь одна проанализирована в [4]. Полностью дисперсионные кривые изображены на рис. 2 для  $Re = 50$ ,  $\theta = 75^\circ$ ,  $Fi^{1/11} = 9,51$  (вода). Две ветви дисперсионной кривой симметричны относительно оси  $\bar{c} = 1,2$ . Из полных дисперсионных соотношений [4] следует, что волны при значениях фазовой скорости  $1,2 < \bar{c} < 3$  экспоненциально растут во време-

Т а б л и ц а 1

Жидкость	$\nu \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$	$\sigma/\rho \cdot 10^6, \text{ м}^3/\text{с}^2$	$Fi^{1/11}$	$Re$	$\theta, \text{ град}$
Вода	0,9	71,8	9,51	600 ... 90	75 ... 2,75
Водный раствор глицерина	2,0	63,4	6,9	350 ... 60	75 ... 5,25
Водный раствор этанола	1,6	42,7	6,7	450 ... 75	75 ... 5,25

ни, а при  $\bar{c} > 3$  и  $\bar{c} < 1,2$  экспоненциально затухают. Нейтральные волны существуют при  $\bar{c} = 3$ .

Линейные асимптоты дисперсионных кривых при высоких  $\bar{k}$  описываются соотношением

$$\bar{c} = 1,2 \pm \bar{k}(3We/Re \sin \theta)^{1/2}$$

или в размерном виде

$$(2) \quad c = 1,2u_0 \pm \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\sigma h}{\rho}}$$

Это закон дисперсии для капиллярных волн на мелкой воде. Слагаемое  $1,2u_0$  отражает вклад среднего течения.

Полагая  $\bar{c} = 0$ , из (1) получаем дисперсионное соотношение для стоячих волн

$$(3) \quad \bar{k} = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{B}{6} (1,2 - A) \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{27}{0,8B(1,2 - A)^2}} \right] \right\}^{1/2},$$

имеющее два корня  $\bar{k}_1$  и  $\bar{k}_2$ , которым на рис. 2 соответствуют точки 1 и 2. В точке 1 групповая скорость  $\bar{c}_r = \bar{c} + \bar{k}d\bar{c}/d\bar{k} > \bar{c}$ , так как  $d\bar{c}/d\bar{k} > 0$ , поэтому волны с  $\bar{k}_1$ , согласно теории диспергирующих волн, будут образовываться за препятствием вдоль по потоку.

В точке 2  $\bar{c}_r < \bar{c}$ . Следовательно, возмущения с  $\bar{k}_2$  возникнут перед препятствием.

Уравнение (3) можно переписать в более компактном виде

$$(4) \quad \bar{k}_S = \left[ \frac{S}{6} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{33,75}{S^2}} \right) \right]^{1/2},$$

где по-новому обезразмеренное волновое число  $\bar{k}_S = \bar{k}(Re \text{ Fi}/9 \sin \theta)^{1/2}$  является функцией только одного параметра  $S = (1,2 - 3 \text{ ctg } \theta/Re) (Re^3 \sin \theta / We)^{1/2}$ . Из уравнения (4) следует существование критического числа (или критической толщины пленки)

$$(5) \quad S^* = \sqrt{33,75},$$

при меньших значениях которого стоячие волны на поверхности пленки возникнуть не могут. Это условие аналогично существованию минимальной скорости капиллярно-гравитационных волн на поверхности идеальной жидкости [5, 6]. Для воды, например, при  $\theta = 75^\circ$   $Re^* = 19$ , а при  $\theta = 2,75^\circ$   $Re^* = 63$ . Отметим, что критическое  $Re^*$  для стоячих волн заметно отличается от критического  $Re$  образования бегущих волн, которое равно  $\text{ctg } \theta$  [1].

В проведенных опытах волны наблюдались лишь при условиях  $Re \gg \gg 3 \text{ ctg } \theta$ ,  $S \gg S^*$ . Тогда формула (3) приобретает более простой вид

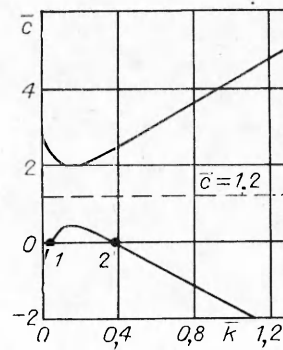
$$(6) \quad \bar{k} = 0,91(Re/F)^{5/6}$$

или

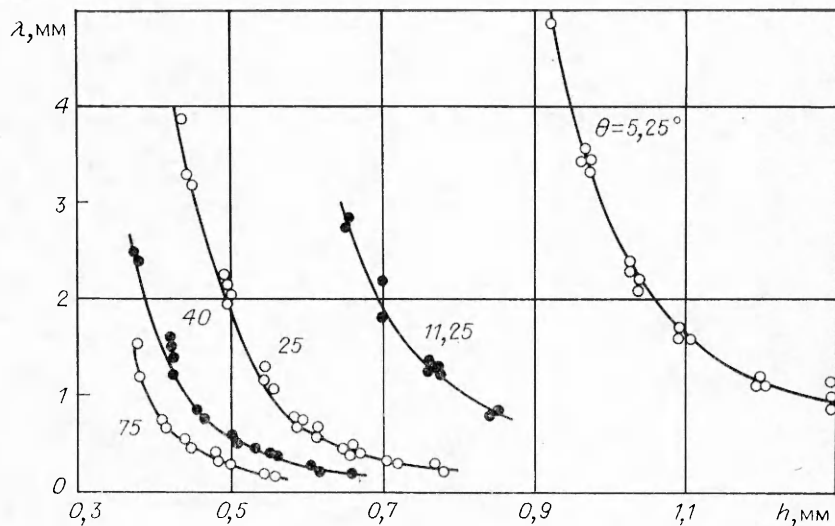
$$\lambda = \frac{6\pi\nu}{g \sin \theta} \sqrt{\frac{\sigma}{1,2\rho h^3}},$$

где комплекс  $F = (Fi/\sin \theta)^{1/5} = (\sigma^3/\rho^3 g \nu^4 \sin \theta)^{1/5}$ .

Соотношение (6) справедливо при  $h/\lambda \ll 1$ . Но опыт показывает, что на пленке существуют и короткие стоячие волны с  $h/\lambda \gg 1$ . Поскольку короткие поверхностные волны малой амплитуды практически не «чувствуют» стенку, а значит, и вязкость, то естественно попытки описать такие волны с помощью теории идеальной жидкости. Для капиллярных волн на



Р и с. 2



Р и с. 3

глубокой воде имеет место закон дисперсии [5]

$$(7) \quad c = \sqrt{\sigma k / \rho}.$$

Приравнивая фазовую скорость волны поверхностной скорости жидкости  $u_s$ , находим

$$\lambda = \frac{\sigma}{\rho} \frac{8\pi\nu^2}{g^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{h^4}$$

или в безразмерном виде

$$(8) \quad \bar{k} = 1,56(\text{Re}/F)^{5/3}.$$

Как и в случае длинных волн на вязкой жидкости, волновое число зависит только от одного комплекса  $\text{Re}/F$ .

Из закона дисперсии  $c = k\sqrt{\sigma h / \rho}$  для капиллярных волн на мелкой воде [5] аналогично получается формула

$$(9) \quad \bar{k} = 1,25(\text{Re}/F)^{5/6},$$

которую полезно сравнить с выражением (6). Видно, что при прочих равных условиях влияние вязкости заметно лишь в числовом коэффициенте.

Экспериментально измеренные значения длины стоячих волн вдоль направления течения пленки воды приведены на рис. 3. Толщина пленки определена по теоретической формуле Нуссельта  $h = (3q\nu/g \sin \theta)^{1/3}$ . Необходимость использования расчетной толщины вместо измеренной обусловлена тем, что практически всегда гладкая зона находится в пределах начального участка пленки, в котором толщина пленки меняется с расстоянием (и всегда больше расчетной для данного типа входного устройства). Поэтому все измерения проводились в конце гладкой зоны вблизи линии волнообразования, где отклонения измеренной толщины от теоретической были минимальными и не превышали 10%.

Экспериментальные данные получены в условиях ламинарного течения, т. е. при  $\text{Re} \leq 400-600$ . Минимальные  $\text{Re}$ , при которых еще можно наблюдать стоячие волны, ограничены либо критическими значениями, следующими из (5), либо существованием бегущих волн, которые при малых  $\text{Re}$  покрывают практически всю поверхность пленки. Отметим, что реальные значения  $\text{Re}^*$  существенно превышают теоретические. Как видно из рис. 3, длина волны уменьшается с ростом толщины пленки. Увеличение угла наклона течения при фиксированной толщине также приводит к уменьшению длины волны.

На рис. 4 экспериментальные данные обобщены в безразмерных координатах  $[\bar{k}, Re/F]$ , которые следуют из теоретического рассмотрения. Экспериментальные точки 1—3 относятся соответственно к воде, растворам глицерина и спирта, свойства которых и другие данные указаны в табл. 1. Влияние  $Re$ , угла  $\theta$  и расстояния  $x$  на графике не показано, поскольку в использованных координатах все точки обобщаются в пределах точности измерений.

При  $\bar{k} \geq 5$  экспериментальные точки располагаются вдоль зависимости I, полученной в коротковолновом приближении для волн на поверхности идеальной жидкости (формула (8)). Систематическое смещение точек вниз от теоретической зависимости объясняется, по-видимому, тем, что течение пленки не полностью стабилизировано. Действительно, при стабилизированном течении поверхностная скорость была бы несколько больше, а длина стоячих волн — меньше. В целом это привело бы к увеличению экспериментально измеренных значений  $\bar{k}$ , а следовательно, к улучшению корреляции между теорией и экспериментом.

При  $\bar{k} < 5$  начинается отклонение экспериментальных точек от зависимости I, и при  $\bar{k} \leq 1$  они ложатся уже вдоль линии III, полученной для длинных волн на поверхности вязкой жидкости (формула (6)). Минимальные значения  $\bar{k}$ , надежно измеренные в эксперименте, достигают 0,6. Для сравнения на рис. 4 проведена кривая II, построенная по формуле (9) для идеальной жидкости и проходящая на 37% выше линии III.

Таким образом, при  $\bar{k} \geq 5$  стоячие волны описываются коротковолновым приближением теории волн на поверхности идеальной жидкости. При  $1 \leq \bar{k} \leq 5$  происходит переход от коротких волн к длинным, сопровождающийся увеличением влияния вязкости. При  $0,6 \leq \bar{k} \leq 1$  справедлива теория длинных волн на поверхности стекающей вязкой пленки жидкости. А при  $\bar{k} < 0,6$  стоячие волны не наблюдаются.

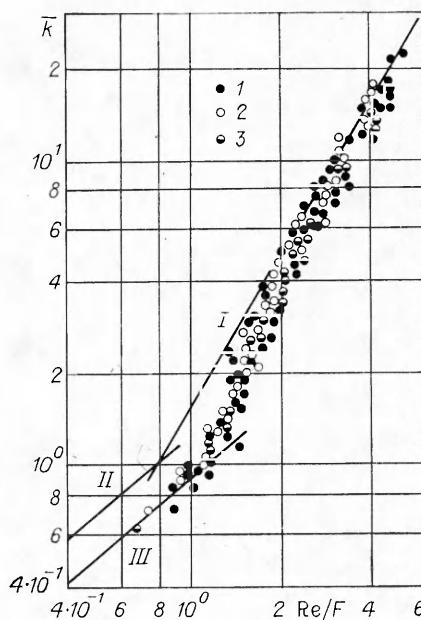
**Форма гребней трехмерных стоячих волн.** Простой подход для построения формы гребней диспергирующих волн, генерируемых движущимся источником, предложен в [5]. Показано, что в случае постоянной скорости источника форма гребней определяется лишь отношением групповой скорости к фазовой. В частности, этот подход применен в теориях корабельных волн и волн на поверхности слоя идеальной жидкости [5, 6].

Для наклона стекающей вязкой пленки жидкости в зависимости от диапазона волновых чисел существуют различные законы дисперсии (см. формулы (1), (7), а также рис. 2). Поэтому применим подход Лайтхилла к довольно общему случаю, когда дисперсионные соотношения аппроксимируются степенным законом

$$c = c_1 k^\gamma - 1,$$

где  $\gamma > 1$ ;  $c_1$  — константа. Групповая скорость  $c_g = c + kdc/dk = \gamma c$ , т. е.  $\gamma$  есть отношение групповой скорости к фазовой. Так, для закона дисперсии (7)  $\gamma = 3/2$ , для капиллярных волн на мелкой воде  $\gamma = 2$ , а для бездисперсионных волн  $\gamma = 1$ .

Схема построения гребней трехмерных волн приведена на рис. 5. Пусть источник возмущения движется со скоростью  $u$  в сторону отрица-



Р и с. 4

тельных значений  $x$  и в момент времени  $\tau$  находится в начале координат. Найдем положение волн, неподвижных относительно источника и возникших в момент времени  $\tau = 0$ , когда источник находился в точке  $(X, O)$ . Условие неподвижности фронта волн, движущихся в направлении  $\varphi$ , запишется в виде  $c = u \cos \varphi$ . Тогда волна, распространяющаяся под углом  $\varphi$ , пройдет расстояние  $CB' = u \cos \varphi \tau$ . Но в действительности, согласно теории диспергирующих волн, она будет наблюдаться на расстоянии  $CB = c_1 \tau = \gamma u \tau = \gamma u \cos \varphi \tau$ , т. е. в  $\gamma$  раз дальше. Аналогично  $CA = \gamma u \tau$ . Из двух последних соотношений вытекает, что  $BC = AC \cos \varphi$  и поэтому угол  $ABC$  прямой. Следовательно, геометрическое место точек  $B$  есть окружность.

Найдем форму гребня. Образующая гребня перпендикулярна направлению распространения волны  $CB$ . Из геометрических построений найдем координаты точки  $B$ :

$$(10) \quad x = \gamma X \sin 2\varphi/2, \quad y = X(1 - \gamma \cos^2 \varphi).$$

Угол наклона фронта волны в точке  $B$  к оси  $x$  определяется выражением

$$(11) \quad dy/dx = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Подставляя (10) в (11) и решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, имеем  $X = b/(\cos \varphi)^{\gamma/(\gamma-1)}$ , где  $b$  — константа интегрирования. Исключая  $X$  из (10), получаем уравнения

$$y = \gamma b \sin \varphi / (\cos \varphi)^{1/(\gamma-1)}, \quad x = b(1 - \gamma \cos^2 \varphi) / (\cos \varphi)^{\gamma/(\gamma-1)},$$

которые в параметрическом виде описывают форму гребней стоячих волн. Константа  $b$  в рамках линейной теории остается неопределенной.

Удобней использовать безразмерные уравнения. С этой целью введем безразмерные координаты  $\bar{x} = x/a$ ,  $\bar{y} = y/a$ , где  $a = -x/\varphi=0 = |1 - \gamma|$  — расстояние от источника до гребня волны вдоль оси  $y$ . Для упрощения записи положим  $\cos^2 \varphi \equiv \alpha$ . Тогда окончательно

$$(12) \quad \bar{y} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\alpha^{1/2(\gamma-1)}};$$

$$(13) \quad \bar{x} = \frac{1-\gamma\alpha}{\gamma-1} \frac{1}{\alpha^{\gamma/2(\gamma-1)}}.$$

В случае длинных капиллярных волн ( $\gamma = 2$ ) система (12), (13) сводится к одной формуле

$$(14) \quad \bar{x} = -1 + \bar{y}^2/4,$$

которая дает параболическую форму гребня. При  $\bar{x} = 0$   $\bar{y} = \bar{y}_0 = 2$  ( $\bar{y}_0$  — характеристика формы гребня).

Для коротких капиллярных волн  $\gamma = 3/2$  и уравнения (12), (13) принимают вид

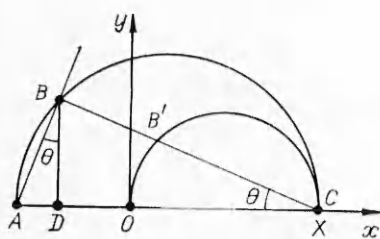
$$(15) \quad \bar{x} = (2 - 3\alpha)/\alpha^{3/2};$$

$$(16) \quad \bar{y} = 3\sqrt{1-\alpha}/\alpha.$$

Форма гребня, построенная по (15) и (16), показана на рис. 6 (линия 1). В асимптотике при  $\bar{y} \rightarrow \infty$  получаем степенной закон  $\bar{x} = 2(\bar{y}/3)^{3/2}$ .

В табл. 2 в зависимости от закона дисперсии приведены значения характеристик формы гребня — расстояния  $\bar{y}_0$  и угла  $\psi$ , который обозначен на рис. 6.

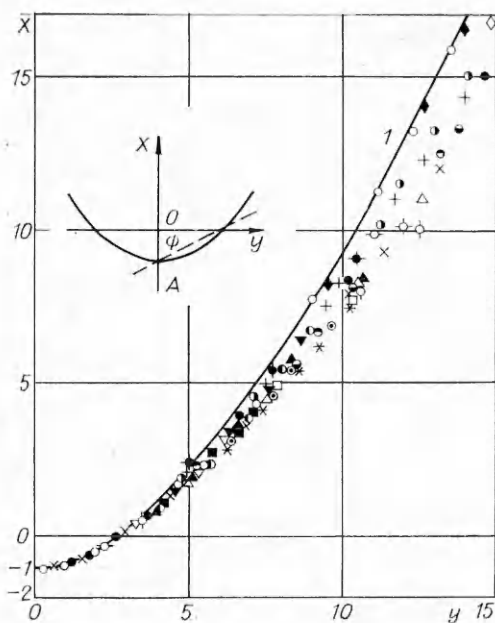
Обработка наблюдаемых в эксперименте трехмерных стоячих, а также бегущих волн производилась следующим образом. Вначале выбирался предполагаемый закон дисперсии. Затем с помощью угла  $\psi$  определялось положение начала координат (положение источника) для конкретного гребня, как это показано на рис. 6. Расстояние  $OA$  служило в качестве характерного масштаба при обезразмеривании координат гребня. Для



Р и с. 5

Т а б л и ц а 2

$\gamma$	$\bar{v}_0$	$\psi$
4	1,45	55°30'
3	1,61	58°11'
2	2,00	63°26'
3/2	2,6	68°57'
4/3	3,08	72°



Р и с. 6

естественно образующихся бегущих волн начало координат следует рассматривать как местоположение эквивалентного источника. То же самое можно сказать в случае обработки стоячих волн при произвольно выбранном законе дисперсии, когда положения реального источника и рассчитанного начала координат не совпадают.

На рис. 6 в координатах, выбранных для закона дисперсии с  $\gamma = 3/2$ , нанесены экспериментальные данные для трехмерных стоячих коротких волн ( $\bar{k} \geq 5$ ) при разных  $Re$ , свойствах жидкости и углах наклона лотка  $\theta$ . Теоретическая форма гребня (линия 1) построена по формулам (15), (16). Каждый конкретный гребень представлен 8 точками. Таким способом обработано более ста гребней. В это число входят и разные гребни от одного источника (например, все гребни, изображенные на рис. 1, а, б). Разным точкам на рис. 6 отвечают различные гребни при разных условиях, но эти условия на графике не выделены, так как в пределах статистического разброса не обнаружено влияния  $Re$ , свойств жидкости, угла наклона  $\theta$  и порядкового номера гребня на обработку данных в указанных координатах при  $\bar{k} \geq 5$ .

Как следует из графика, отклонение экспериментальных точек от теоретической кривой составляет 0—20%. Те же данные, обработанные в координатах для закона дисперсии с  $\gamma = 2$ , отклоняются от соответствующей теоретической кривой значительно больше.

Длинные стоячие волны с волновым числом  $\bar{k} < 1,5$  обработаны в координатах для законов дисперсии с  $\gamma = 2$  и 1,5. Наблюдается хорошее обобщение данных в безразмерных координатах, но экспериментальные точки также систематически отклоняются вниз от теоретической кривой. Неожиданным оказался тот факт, что для длинных стоячих волн лучшее согласие между теорией и экспериментом получается при использовании координат для закона дисперсии с  $\gamma = 3/2$  (т. е. для коротких волн).

Аналогичная обработка применена и к бегущим трехмерным волнам, хотя в этом случае трудно ожидать хороших результатов ввиду нестационарности и нелинейности бегущих волн. Тем не менее удовлетворительное обобщение и согласие между теорией и экспериментом получается (хоть и с большим разбросом точек), если положить  $\gamma = 2,2$ . Отметим, что это значение близко к  $\gamma$  для длинных капиллярных волн.

Для адекватного описания трехмерных стоячих волн на стекающей вязкой пленке жидкости, по-видимому, нужно рассматривать трехмерные уравнения движения с целью учета зависимости фазовой скорости не только от волнового числа, но и от направления распространения волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. — Новосибирск, 1979. — (Препринт/ИТФ СО АН СССР; № 36—79).
2. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеев С. В. Влияние волн на десорбцию углекислого газа из стекающих пленок жидкости // ТОХТ. — 1983. — Т. 17, № 3.
3. Шейнман А. Г., Ратников Е. Ф., Щеклеин С. Е. Исследование теплообмена пленки жидкости при турбулентном течении по вертикальной шероховатой поверхности // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. — Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977.
4. Накоряков В. Е., Алексеев С. В. Волны на наклонно стекающей пленке жидкости // Волновые процессы в двухфазных средах. — Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.
5. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981.
6. Унзем Д. Б. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.

Поступила 5/VIII 1986 г.

УДК 532.529 + 533.6.011

### ИССЛЕДОВАНИЕ КАУСТИК В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ ГАЗ — ЧАСТИЦЫ

С. П. Кислев, В. М. Фомин  
(Новосибирск)

В [1] для случая малой объемной концентрации частиц предложена континуально-дискретная модель, в которой частицы описываются бесстолкновительным кинетическим уравнением, а газ — уравнениями сплошной среды, и показано, что в такой модели возможно возникновение уплотнений в ансамбле частиц, которые называются каустиками. Возникновение и развитие каустик в двухфазной среде имеет некоторые особенности по сравнению со средой из не взаимодействующих частиц [1, 2], связанные с взаимодействием частиц с газом. Во-первых, каустика возникает (в случае монодисперсных частиц) не всегда, а лишь тогда, когда градиент скорости отрицателен и меньше некоторой фиксированной величины [1]. Во-вторых, как будет показано ниже, каустика может возникнуть даже в том случае, когда скорости частиц и газа в момент  $t = 0$  постоянны, но при этом размер частиц (или их истинная плотность) изменятся. Отметим, что каустики имеют другую физическую природу, нежели пелены [3], поскольку возникновение последних обусловлено столкновениями частиц. Пелены возникают при больших объемных концентрациях частиц, а каустики — при малых. Таким образом, обе модели охватывают практически весь диапазон по концентрации частиц.

1. Рассмотрим одномерное нестационарное течение смеси газа с частицами при малой объемной концентрации частиц  $\rho_2/\rho_1 \simeq 10^{-2}$ . В этом случае система уравнений из [1] упрощается, поскольку можно пренебречь влиянием частиц на газ:

$$(1.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + u_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{u_1 - u_2}{\tau} f \right) = 0, \quad u_1 = \text{const},$$

$$n = n_0 \int_0^{r_m} dr \int_{-\infty}^{+\infty} f du_2, \quad f = f(t, x, r, u_2),$$

$$m_2 = \pi r^2 \int_{x-r}^{x+r} \left( 1 - \left( \frac{x-y}{r_0} \right)^2 \right) n(t, y) dy, \quad \tau = \frac{2}{9} \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} \frac{r^2}{v}.$$

Здесь  $\rho_{11}$ ,  $\rho_1$ ,  $u_1$ ,  $v$  — истинная и средняя плотность, скорость, кинематическая вязкость газа;  $\rho_{22}$ ,  $\rho_2$ ,  $u_2$ ,  $m_2$ ,  $f$  — истинная и средняя плотность, скорость, объемная концентрация, функция распределения;  $r$  — радиус