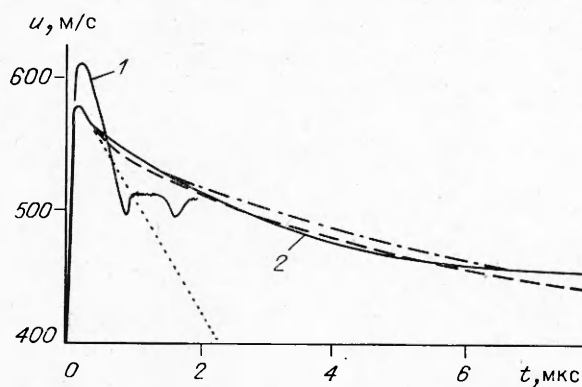


### АНАЛИЗ БЕСПОРОГОВОГО РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ИМПУЛЬСА СЖАТИЯ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

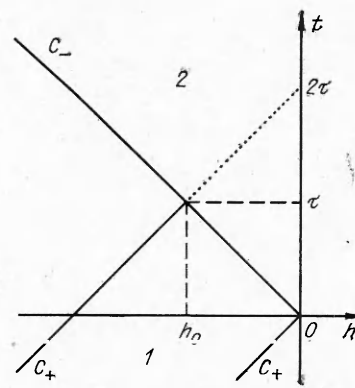
Исследования откольных явлений дают информацию о сопротивлении материалов разрушению в микросекундном диапазоне длительностей нагрузки. Наиболее достоверен и информативен метод, основанный на непрерывной регистрации скорости свободной поверхности [1]. На рис. 1 приведены результаты таких экспериментов для плексигласа и резины (кривые 1 и 2) [2, 3]. Характер откольного разрушения плексигласа типичен для твердых тел. После выхода ударной волны на свободную поверхность профиль скорости повторяет форму импульса сжатия в образце. Когда растягивающие напряжения достигают критического значения, происходит разрыв материала, напряжения в зоне разрушения падают, появляется волна сжатия, выходящая на поверхность в виде откольного импульса. Следующие за этим колебания скорости обусловлены циркуляцией волн сжатия и разрежения в откольной пластине. Величина разрушающего напряжения определяется разностью между максимальной скоростью поверхности и величиной скорости перед фронтом откольного импульса [1].

Принципиально иной результат получен для резины. Как видно на рис. 1, в этом случае скорость монотонно уменьшается и характерные колебания не наблюдаются. В связи с отсутствием отчетливо выраженного откольного импульса встает вопрос о том, как характеризовать процесс разрушения. Если бы прочность резины была пренебрежимо мала, то после выхода ударной волны на свободную поверхность ее скорость сохранялась бы постоянной. Пунктирной линией на рис. 1 показан профиль скорости, построенный в предположении большой прочности резины. Экспериментально наблюдаемая зависимость отличается от крайних случаев высокой и пренебрежимо малой динамической прочности на разрыв. На сохраненном в этом опыте образце не обнаружены явные признаки разрушения.

Известно [4, 5], что разрыву эластомеров предшествует образование микронесплошностей в образце, которое начинается при напряжениях, намного меньших разрывных. Само по себе образование несплошностей еще не является разрушением. Так, при испытаниях на трехосное растяжение вулканизатов натурального каучука [5] поры возникали при напряжениях  $1\div 3$  МПа и незначительных деформациях. После этого образцы претерпевали дальнейшую деформацию в несколько сотен процентов, сопровождаемую ростом (с малым модулем) растягивающих напряжений.



Р и с. 1



Р и с. 2

Поэтому резину можно рассматривать как пример среды с нулевым порогом разрушения, способной тем не менее выдерживать достаточно высокие растягивающие напряжения (порядка 100 МПа). Методика определения этих напряжений в ситуации, подобной приведенной на рис. 1 (кривая 2), неясна.

Цель настоящей работы — анализ ударно-волновых процессов в средах с нулевым порогом разрушения при отражении импульса сжатия от свободной поверхности и установление связи величины растягивающих напряжений с экспериментально измеренным профилем скорости.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим в акустическом приближении эволюцию треугольного импульса сжатия после его отражения от свободной поверхности образца, разрушающегося при отрицательном давлении. Предположим, что разрушение начинается при нулевых растягивающих напряжениях и описывается удельным объемом пор  $v_{\Pi}$ . Полный удельный объем среды равен сумме  $v_{\Pi}$  и удельного объема сплошной компоненты  $v_c$ :  $v = v_{\Pi} + v_c$ . Используем простейшую кинетику разрушения: скорость изменения  $v_{\Pi}$  линейно зависит от давления  $P$  и равна нулю, если  $P > 0$  и  $v_{\Pi} = 0$ . Система уравнений гидродинамики, замкнутая уравнениями кинетики и состояния, в переменных Лагранжа имеет вид

$$(i) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial h} = 0,$$

$$\frac{\partial v_{\Pi}}{\partial t} + \frac{P}{\rho_0^2 c_0^2 \tau_{\mu}} = 0, \quad P = \rho_0^2 c_0^2 \left( \frac{1}{\rho_0} - v + v_{\Pi} \right),$$

где  $t$  — время;  $h$  — лагранжева координата;  $u$  — массовая скорость;  $\rho_0$  и  $c_0$  — начальные плотность и скорость звука;  $\tau_{\mu}$  — характерное время релаксации процесса разрушения, что отвечает объемной вязкости  $\mu = \rho_0 c_0^2 \tau_{\mu}$ .

На рис. 2 приведена картина течения в плоскости  $t - h$ . В области 1 отсутствует взаимодействие падающей волны с отраженной и зависимость массовой скорости и давления от координат и времени соответствует треугольному импульсу сжатия:

$$u(h, t) = u_0 - k(c_0 t - h), \quad P(h, t) = \rho_0 c_0 u(h, t).$$

Здесь  $u_0$  — максимальное значение массовой скорости;  $k = \text{const}$ .

В области 2 происходит взаимодействие падающего и отраженного от свободной поверхности  $h = 0$  импульсов, что приводит к возникновению растягивающих напряжений. Течение определяется в результате решения системы (1) с граничными условиями при  $h = 0$  и  $h \rightarrow -\infty$  и начальными условиями на  $C_-$ -характеристике, на которой рассматриваемые функции, за исключением  $v_{\Pi}$ , терпят скачок. Найдем решение в области 2. Для этого исключим из (1)  $v_{\Pi}$  и  $v$  и проведем замену независимых переменных:  $T = t + h/c_0$ ,  $x = h$ . При этом область 2 отобразится на четвертый квадрант плоскости  $T - x$ :  $T \geq 0$ ,  $x \leq 0$ . Полученная система двух уравнений в частных производных после применения к ней преобразования Лапласа по  $T$  перейдет в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2) \quad \frac{d\hat{u}}{dx} + \frac{s}{c_0} \hat{u} + \left( s + \frac{1}{\tau_{\mu}} \right) \frac{\hat{P}}{\rho_0 c_0^2} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} (P(x, 0) + \rho_0 c_0 u(x, 0)),$$

$$\frac{d\hat{P}}{dx} + \frac{s}{c_0} \hat{P} + \rho_0 s \hat{u} = \frac{1}{c_0} (P(x, 0) + \rho_0 c_0 u(x, 0))$$

( $s$  — переменная Лапласа,  $\hat{u}$  и  $\hat{P}$  — образы Лапласа массовой скорости и давления). В правую часть (2) перенесены начальные значения  $u$  и  $P$  при  $T \rightarrow 0$ , которые входят в виде комбинации, являющейся инвариантом Римана [6], благодаря чему нет необходимости определять отдельно  $u$

и  $P$  справа от скачка на  $C_-$ -характеристике: они будут найдены непосредственно из решения системы. Значение инварианта находится из условия непрерывности на скачке (так как  $v_{II} \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow +0$ ) по его значению в области  $I$ . Согласно (1), получаем

$$P(x, 0) + \rho_0 c_0 u(x, 0) = 2\rho_0 c_0 (u_0 + 2kx)\theta(x - x_0),$$

где  $\theta(x)$  — единичная функция Хевисайда;  $x_0 = h_0$  определяется из условия пересечения хвостовой  $C_+$ -характеристики с  $C_-$ -характеристикой:  $x_0 = -c_0 \tau = -u_0/(2k)$ .

Решение системы (2) с граничными условиями ( $\widehat{P} = 0$  при  $x = 0$ ,  $\widehat{P}$  и  $\widehat{u}$  конечны при  $x \rightarrow -\infty$ ) имеет вид

$$(3) \quad \widehat{P}(x, s) = -4k\rho_0 c_0^2 \left[ \frac{\tau_\mu}{s} (\theta(x - x_0) - \exp(\lambda_1 x)) - \frac{1}{c_0^2 (\lambda_1 - \lambda_2)} \times \right. \\ \times \left( \frac{\theta(x - x_0) - 1}{\lambda_1} \exp(\lambda_1(x - x_0)) - \frac{\theta(x - x_0)}{\lambda_2} \exp(\lambda_2(x - x_0)) + \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\lambda_2} \exp(\lambda_1 x - \lambda_2 x_0) \right) \right];$$

$$(4) \quad \widehat{u}(x, s) = \frac{2k}{s} \left[ 2(x - x_0 + c_0 \tau_\mu) \theta(x - x_0) - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{s} c_0^2 \tau_\mu \exp(\lambda_1 x) - \right. \\ \left. - \frac{\theta(x - x_0) - 1}{\lambda_1} \exp(\lambda_1(x - x_0)) - \frac{\theta(x - x_0)}{\lambda_2} \exp(\lambda_2(x - x_0)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda_2} \exp(\lambda_1 x - \lambda_2 x_0) \right],$$

$$\lambda_{1,2} = -s/c_0 \pm \sqrt{s(s + 1/\tau_\mu)}/c_0.$$

При анализе процесса разрушения важно также знать распределение удельного объема пор, для образа Лапласа которого получаем

$$(5) \quad \widehat{v}_{II} = -\widehat{P}/(\rho_0^2 c_0^2 \tau_\mu s).$$

Переходя от образов к оригиналам и возвращаясь к переменным  $t, h$ , найдем решение в области разрушения. Некоторые результаты, однако, можно получить, анализируя непосредственно (3), (4). Например, используя известное свойство преобразования Лапласа [7]  $\lim_{s \rightarrow \infty} s\widehat{F}(s) = F(0)$ , определим значения давления и массовой скорости справа от скачка вдоль  $C_-$ -характеристики:

$$(6) \quad P = -4k\rho_0 c_0^2 \tau_\mu \left[ \theta(h - h_0) - \exp\left(\frac{h}{2c_0 \tau_\mu}\right) - (\theta(h - h_0) - 1) \exp\left(\frac{h - h_0}{2c_0 \tau_\mu}\right) \right];$$

$$(7) \quad u = 4kc_0 \tau_\mu \left[ \left( \frac{h - h_0}{c_0 \tau_\mu} + 1 \right) \theta(h - h_0) - \exp\left(\frac{h}{2c_0 \tau_\mu}\right) - (\theta(h - h_0) - 1) \exp\left(\frac{h - h_0}{2c_0 \tau_\mu}\right) \right].$$

Аналогичный результат для давления при  $h \geq h_0$  был получен в [8] при рассмотрении условий на скачке.

Общие решения достаточно громоздки, поэтому подробнее исследуем частные случаи, представляющие наибольший практический интерес. Выше отмечалось, что экспериментально регистрируется зависимость скорости свободной поверхности от времени, значит, она и должна быть определена. Используя известные формулы обращения и свойства преобразования Лапласа [7, 9], имеем выражения для давления при  $h \geq h_0$  и скорости при  $h = 0$ :

$$(8) \quad P(h, t) = -4k\rho_0 c_0^2 \tau_\mu \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha_1}{2}\right) - \frac{\alpha_1}{2} \exp\left(-\frac{\alpha_1}{2}\right) F_1\left(\frac{t + h/c_0}{2\tau_\mu}\right) - \right.$$

$$- \frac{1}{2} F_2 \left( \frac{t - h/c_0 - 2\tau}{2\tau_\mu}, \alpha_2 \right) \theta \left( t - \frac{h}{c_0} - 2\tau \right) + \frac{1}{2} F_2 \left( \frac{t + h/c_0 - 2\tau}{2\tau_\mu}, \alpha_3 \right) \theta(t - 2\tau) \Big];$$

$$(9) \quad u(0, t) = 2u_0 - 4kc_0\tau_\mu \left[ \Phi_1 \left( \frac{t}{2\tau_\mu} \right) - \Phi_2 \left( \frac{t - 2\tau}{2\tau_\mu} \right) \theta(t - 2\tau) \right],$$

$$F_1(x) = \int_0^x \exp(-z) I_1(\sqrt{z(z + \alpha_1)}) / \sqrt{z(z + \alpha_1)} dz,$$

$$F_2(x, \alpha) = \exp(-x - \alpha/2) \int_0^x I_0(\sqrt{z(z + \alpha)}) [I_0(x - z) + I_1(x - z)] dz,$$

$$\Phi_1(x) = \exp(-x) [2xI_1(x) + (1 + 2x)I_0(x)] - 1,$$

$$\Phi_2(x) = 2 \exp\left(-\frac{\tau}{2\tau_\mu}\right) \int_0^x \exp(-z) I_0(\sqrt{z(z + \tau/\tau_\mu)}) dz - F_2(x, \tau/\tau_\mu),$$

$$\alpha_1 = -h/(c_0\tau_\mu), \quad \alpha_2 = (h - h_0)/(c_0\tau_\mu), \quad \alpha_3 = -(h + h_0)/(c_0\tau_\mu)$$

( $I_0$  и  $I_1$  — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков).

Удельный объем пор, согласно (5), запишем в виде

$$(10) \quad v_{\text{п}}(x, T) = - \int_0^T P(x, T) dT / (\rho_0^2 c_0^2 \tau_\mu).$$

**Анализ решения и сопоставление с экспериментом.** Исследуем зависимость скорости свободной поверхности от времени релаксации процесса разрушения. При фиксированном  $t$  и  $\tau_\mu \rightarrow 0$  из (9) вытекает, что  $u(0, t) \rightarrow 2u_0$ , как и должно быть для среды, не обладающей прочностью. Во втором предельном случае ( $\tau_\mu \rightarrow \infty$ ) получаем, что скорость  $u(0, t) = 2u_0 - 2kc_0t$  при  $t \leq 2\tau$  и равна нулю при больших  $t$ , что соответствует движению при отсутствии разрушения.

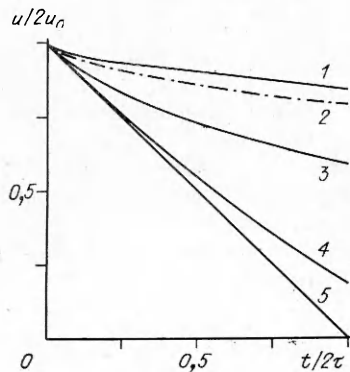
Рассмотрим зависимость скорости от времени при фиксированном  $\tau_\mu$ . Анализ (9) показывает, что при  $t \rightarrow \infty$   $u(0, t)$  монотонно убывает, стремясь к нулю пропорционально  $1/\sqrt{t}$ . В точке  $t = 2\tau$  на профиле скорости имеется излом, причем скачок производной примет вид

$$(11) \quad \left[ \frac{du(0, t)}{dt} \right]_{t=2\tau} = 2kc_0 \exp\left(-\frac{\tau}{2\tau_\mu}\right).$$

Он выражен тем отчетливее, чем больше время релаксации. Если излом скорости удастся зарегистрировать экспериментально, то соотношение (11) можно использовать для оценки значения  $\tau_\mu$ . При  $t \rightarrow 0$   $u(0, t)$  касается профиля скорости, который наблюдался бы при отсутствии разрушения. Это обстоятельство делает принципиально невозможным определение порога начала разрушения в том случае, когда он мал и на экспериментальном полученном профиле не зарегистрирован характерный откольный импульс.

Рассмотрим зависимость скорости от времени при  $t \leq 2\tau$ . В этом случае соотношение (9) значительно упрощается, так как второй член в квадратных скобках равен нулю и  $u(0, t)$  явно выражается через модифицированные функции Бесселя, табличные значения которых приведены, например, в [9]. На рис. 3 в безразмерных переменных  $u(0, t)/2u_0 - t/2\tau$  по формуле (9) построены профили скорости при  $\tau_\mu/\tau =$

$= 0,01; 0,02; 0,1; 1; \infty$  (линии 1—5). По-



Р и с. 3

сколькxу  $\tau_\mu$  однозначно определяет зависимость  $u(0, t)$ , то рассмотрим обратную задачу: оценим время релаксации по значению скорости при  $t = 2\tau$  в приближении  $\tau_\mu \ll \tau$ , что представляет наибольший практический интерес. Используя асимптотическое разложение модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента [9], найдем

$$(12) \quad u(0, 2\tau) = 2u_0 \left[ 1 - \frac{\tau_\mu}{\tau} \left( \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{\tau}{\tau_\mu}} - 1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi} \frac{\tau_\mu}{\tau}} + \dots \right) \right].$$

Вводя обозначение  $\varepsilon = (2u_0 - u(0, 2\tau))/2u_0$  и разрешая (12) относительно  $\tau_\mu$ , получим

$$(13) \quad \frac{\tau_\mu}{\tau} = \frac{\pi}{8} \varepsilon^2 \left[ 1 + \frac{\pi}{4} \varepsilon + \frac{\pi(5\pi - 2)}{64} \varepsilon^2 + \dots \right].$$

Соотношение (13) позволяет непосредственно по экспериментальному профилю скорости определить время релаксации. При  $\varepsilon < 0,3$  с точностью до 6 % можно ограничиться первыми двумя членами разложения.

Исследуем распределение давления в области разрушения. Для простоты рассмотрим ту ее часть, которая непосредственно влияет на профиль скорости при  $t \leq 2\tau$ :  $t - 2\tau - h/c_0 \leq 0$  (ниже пунктирной линии на рис. 2). Тогда в выражении (8) два последних слагаемых равны нулю. Покажем, что при условии  $\tau_\mu \ll t + h/c_0$  давление практически постоянно в области разрушения. Действительно, частная производная от  $P$  по времени имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -2k\rho_0 c_0 h \sqrt{\frac{\tau_\mu}{\gamma}} \frac{\exp\left(\left(-t + \sqrt{t^2 - h^2/c_0^2}\right)/2\tau_\mu\right)}{\left(t^2 - h^2/c_0^2\right)^{3/4}},$$

т. е. является экспоненциально малой величиной. Следовательно, в рассматриваемом приближении давление постоянно и равно значению на скачке, определяемому соотношением (6):

$$(14) \quad P \simeq -4k\rho_0 c_0^2 \tau_\mu.$$

Вблизи свободной поверхности ( $|h| \ll c_0 t$ ) давление падает до нуля линейно по  $h$ :

$$(15) \quad P \simeq 4k\rho_0 c_0 h \sqrt{\tau_\mu/(\pi t)}, \quad t \gg \tau_\mu.$$

Используя (13) и (14), найдем связь величины растягивающих напряжений со значением скорости при  $t = 2\tau$ :

$$(16) \quad P = -\frac{\pi}{4} \rho_0 c_0 u_0 \varepsilon^2 \left[ 1 + \frac{\pi}{4} \varepsilon + \frac{\pi(5\pi - 2)}{64} \varepsilon^2 + \dots \right].$$

Соотношение (16) заменяет известную формулу для определения откольной прочности [1] в том смысле, что по измеренному профилю скорости позволяет найти растягивающие напряжения в зоне разрушения. Это, однако, не означает, что полное разрушение среды (с образованием откольной пластины) произойдет, когда напряжение превысит пороговое значение. В рамках рассматриваемой модели более логично предположить, что разрыв материала происходит при достижении критического значения удельного объема пор.

Зависимость  $v_\Pi$  от координат и времени дается соотношением (10). В приближении малых  $\tau_\mu$ , когда давление практически постоянно в области разрушения, из (10) следует

$$(17) \quad v_\Pi(h, t) \simeq (4k/\rho_0)(t + h/c_0).$$

Вблизи свободной поверхности ( $|h| \ll c_0 t$ ) пористость падает до нуля:

$$(18) \quad v_\Pi(h, t) \simeq -\frac{8kh}{\rho_0 c_0^2} \sqrt{\frac{t}{\pi\tau_\mu}}, \quad t \gg \tau_\mu.$$

Согласно (17), закон роста пор не зависит от времени релаксации, и найти его можно непосредственно из анализа течения в среде, разрушающейся без сопротивления.

Сечение  $h^*$ , в котором удельный объем пор достигает максимального значения, на начальном этапе находится вблизи свободной поверхности и с течением времени смещается в глубину образца по закону, который можно оценить, приравнявая (17) и (18):

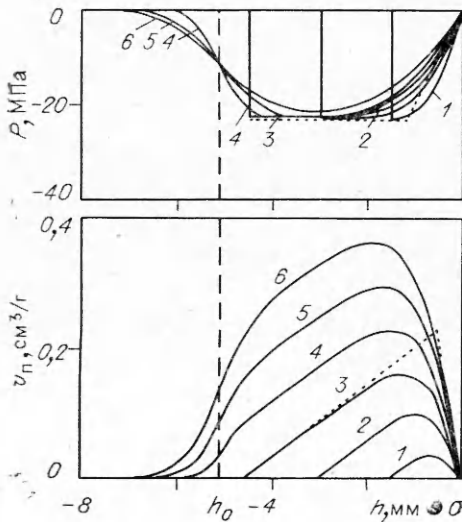
$$(19) \quad h^* \sim -c_0 \sqrt{\pi \tau_\mu t / 2}.$$

Если ввести критическое значение удельного объема пор  $v_p^*$ , при достижении которого происходит разрыв материала, то соответствующее значение времени и толщина откольной пластины оцениваются из (17), (19).

Применим полученные результаты для описания экспериментальных данных по исследованию разрушения резины при ударно-волновом воздействии [3]. Начальная плотность и скорость звука равны  $1,34 \text{ г/см}^3$  и  $1,5 \text{ км/с}$ , амплитуда и длительность импульса сжатия  $u_0 = 290 \text{ м/с}$  и  $2\tau = 6,6 \text{ мкс}$ . По профилю скорости свободной поверхности (кривая 2 на рис. 1) получаем значение  $\varepsilon = 0,21$ , что позволяет по формуле (13) определить характерное время релаксации процесса разрушения  $\tau_\mu = 0,068 \text{ мкс}$ . Рассчитанная при этих параметрах скорость движения свободной поверхности по зависимости (9) приведена на рис. 1 и 3 штрихпунктирной линией. Видно хорошее согласие расчета и эксперимента.

Решения (8) и (10) для давления и удельного объема пор достаточно сложны. Поэтому для определения  $P$  и  $v_p$  проведено численное моделирование системы уравнений газодинамики (1) методом характеристик [10] с использованием расщепления по физическим процессам. Рассчитанный таким образом профиль скорости свободной поверхности совпадает со штрихпунктирной линией на рис. 1. Соответствующие распределения давления и удельного объема пор по координате с интервалом времени  $1 \text{ мкс}$  приведены на рис. 4 (цифрами указано время в микросекундах, пунктирные линии — зависимости  $P$  и  $v_p$ , построенные по формулам (14), (15) и (17), (18) при  $t = 3 \text{ мкс}$ ). Приближения (14) и (18) достаточно точно дают максимальное значение растягивающих напряжений и линейный характер роста удельного объема пор в зависимости от времени и координаты.

Амплитуда импульса сжатия в рассмотренном опыте с резиной равна  $0,9 \text{ ГПа}$ . В этом диапазоне давлений заметна нелинейность ударной адиабаты и акустическое приближение может приводить к заметным погрешностям. В то же время растягивающие напряжения в зоне разрушения малы и важно знать скорость звука при нормальных условиях. Можно поэтому ожидать, что учет зависимости скорости звука от давления не приведет к принципиальным изменениям полученных результатов. Действительно, на рис. 1 штриховой линией показан результат расчета скорости свободной поверхности, выполненный с использованием уравнения состояния резины, построенного на основании реальной ударной адиабаты [3, 11]. Численное моделирование проводилось по схеме сквозного счета на шахматной сетке с введением искусственной вязкости [12]. Для



Р и с. 4

получения наилучшего соответствия с экспериментальными данными время релаксации уменьшено приблизительно на 10 % ( $\tau_{\mu} = 0,06$  мкс) по сравнению с расчетом в акустическом приближении. Распределения давления и удельного объема пор остаются подобными приведенным на рис. 4. Появляются лишь особенности, связанные с зависимостью скорости звука от давления: правая граница области разрушения быстрее смещается в глубину образца, и из-за размытия фронта волны разрежения растягивающие напряжения уменьшаются по абсолютной величине при уменьшении  $h$ , а не остаются практически постоянными, как это имеет место в акустике.

Таким образом, на основании проведенного анализа процесса роста пор в среде с нулевым порогом разрушения получены соотношения, позволяющие по экспериментально измеренному профилю скорости свободной поверхности образца при ударно-волновом воздействии найти объемную вязкость разрушения и действующие растягивающие напряжения (формулы (13) и (16)).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков С. А., Дивиов И. И., Иванов А. Г. Исследование разрушения стали, алюминия и меди при взрывном нагружении // Физика металлов и металловедение. — 1964. — Т. 25, № 4.
2. Пархоменко И. П., Уткин А. В. Влияние амплитуды и длительности ударной волны на откольную прочность плексигласа // Детонация: Матер. IX Всесоюз. симпоз. по горению и взрыву, Суздаль, нояб. 1989. — Черногоровка, 1989.
3. Калмыков Ю. Б., Канель Г. И., Пархоменко И. П. и др. Поведение резины в ударных волнах и волнах разрежения // ПМТФ. — 1990. — № 1.
4. Эйрих Ф. Р., Смит Т. Л. Молекулярно-механические аспекты изотермического разрушения эластомеров // Разрушение/Под ред. Г. Либовица. — М.: Мир, 1976. — Т. 7, ч. 2.
5. Gent A. N., Lindley P. B. Internal rupture of bounded rubber cylinders in tension // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. — 1959. — V. 249, N 1257.
6. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
8. Канель Г. И., Черных Л. Г. О процессе откольного разрушения // ПМТФ. — 1980. — № 6.
9. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. — М.: Наука, 1979.
10. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. — М.: ИЛ, 1950.
11. Канель Г. И. Модель кинетики пластической деформации металлов в условиях ударно-волнового нагружения // ПМТФ. — 1982. — № 2.
12. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967.

г. Черногоровка

Поступила 8/VI 1990 г.,  
в окончательном варианте — 8/V 1991 г.

УДК 534.4

В. А. Буряченко, В. З. Партон

#### МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО ПОЛЯ В СТАТИКЕ КОМПОЗИТОВ

Рассматривается линейно-упругая композитная среда, состоящая из однородной матрицы, в которой содержится случайное множество включений произвольной формы с неоднородными по объему включений механическими свойствами. Решается классическая задача [1—3] оценки эффективных модулей и средних концентраторов напряжений на включениях. Предлагаемый в работе подход является обобщением метода эффективного поля (МЭП), приведенного в [4—6] при совпадении механических свойств матрицы и среды сравнения. Обобщенный МЭП включает в себя как частные случаи известные методы структурной механики: