Теплофизика и аэромеханика, 2017, том 24, № 2

УДК 536.21

Асимптотический анализ решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек при малых числах Био на лицевых поверхностях*

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановча СО РАН, Новосибирск

E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

С учетом линейной зависимости теплофизических характеристик материалов фаз композиции от температуры сформулирована нелинейная задача нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных термочувствительных оболочек. Проведено обезразмеривание поставленной начально-краевой задачи и выделены четыре малых параметра: теплофизический, характеризующий степень термочувствительности материалов слоев, геометрический, характеризующий относительную толщину тонкостенной конструкции, и два малых числа Био на лицевых поверхностях оболочек. Проведена последовательная рекурсия безразмерных уравнений сначала по теплофизическому малому параметру, затем по малым числам Био и, наконец, по геометрическому малому параметру. Первый тип рекурсии позволил линеаризовать задачу теплопроводности, а на основе двух последних типов рекурсии построено внешнее асимптотическое разложение решения задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек и пластин при граничных условиях II и III рода и малых числах Био на лицевых поверхностях с учетом термочувствительности материалов слоев. Проанализированы получающиеся двумерные краевые задачи и исследованы асимптотические свойства решений задачи теплопроводности. Дано физическое объяснение некоторых особенностей асимптотического разложения температуры.

Ключевые слова: теплопроводность, термочувствительность, асимптотический анализ, слоистые оболочки, анизотропия и неоднородность, основное температурное поле.

Введение

Современные тонкостенные элементы конструкций аэрокосмического назначения подвергаются интенсивному термосиловому воздействию. Накопленный инженерно-конструкторский опыт проектирования таких объектов показывает, что для эффективной работы тонкостенных элементов их целесообразно создавать слоистыми, причем с анизотропными и неоднородными слоями [1], выполненными, например, из композиционных материалов с трехмерным армированием (см. работы [2–4] и др.). За счет такой слоистости можно, например, значительно улучшить экранирующие свойства изделия [5], а пространственное армирование слоев, если необходимо, наоборот, позволяет эффективно отводить тепло в поперечном направлении композитной сэндвич-панели [4].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 17-01-00156-а).

В связи с этим актуальным становится исследование температурных полей в слоистых анизотропных конструкциях, причем для уточнения распределения температурных полей в таких изделиях, подвергнутых интенсивному тепловому воздействию, необходимо учитывать зависимость теплофизических характеристик их материалов от температуры, что приводит к необходимости изучения нелинейных задач теплопроводности. Уточнение температурных полей приобретает особую значимость при исследовании механического поведения, например, элементов ракетной техники, работающих в условиях интенсивной кратковременной ползучести, так как реономные характеристики материалов при этом существенно зависят от температуры [6].

Определение термомеханического и теплофизического поведения тонкостенных элементов конструкций в пространственной постановке на основе прямого численного моделирования не всегда является эффективным (см. работы [7, 8] и др.), особенно если изделия, содержащие эти элементы, являются достаточно сложными и тем более композитными (в частности, слоистыми). Существенного упрощения расчета физико-механических полей в таких конструкциях можно добиться за счет введения различных упрощающих гипотез (см. работы [9–12] и др.) или за счет использования асимптотических разложений соответствующих краевых задач по малым параметрам, что позволяет понизить размерность разрешающих уравнений. Для тонкостенных элементов конструкций наиболее естественным является малый геометрический параметр — относительная толщина элемента. Асимптотические методы, основанные на разложениях по этому малому параметру, использованы, например, в работах [13–20] и др. Малые параметры могут характеризовать и степень нелинейности определяющих уравнений краевой задачи (разложения по таким малым параметрам применялись в работах [18, 21] и др., а также степень отклонения геометрии конструкции от некоторой канонической формы, для которой решение рассматриваемой задачи известно [21]. Используются разложения и по нескольким малым из указанных параметров [15, 18, 22]. Достаточно подробные обзоры асимптотических методов, применяемых для анализа термомеханического поведения тонкостенных элементов конструкций, приведены в монографиях [13–16, 20–22].

Предварительные исследования, проведенные в работах [17, 18], показали, что особенности внешнего асимптотического разложения нестационарного поля температур в слоистых анизотропных неоднородных оболочках из термочувствительных материалов существенно зависят от типа граничных условий, заданных на лицевых поверхностях таких тонкостенных конструкций. Так, в случае граничных условий I рода, заданных на обеих лицевых поверхностях, в работе [18] потребовалось сначала линеаризовать рассматриваемую задачу по малому параметру, характеризующему степень физической нелинейности (термочувствительности) определяющих соотношений, а затем использовать асимптотические разложения температурного поля по малому геометрическому параметру. В случаях же задания на лицевых поверхностях тонкостенных конструкций смешанных граничных условий, например, I-го рода на одной лицевой стороне и II-го рода на другой, а также в случае граничных условий III-го рода при средних и больших числах Био были построены внешние асимптотические разложения температуры в рассматриваемых термочувствительных оболочках без предварительной линеаризации краевой задачи теплопроводности [17].

Вне поля зрения работ [17, 18] оказались случаи, когда на лицевых поверхностях оболочек заданы граничные условия II-го и/или III-го рода при малых числах Био, которые часто встречаются на практике [23]. В связи с этим настоящее исследование посвящено построению внешнего асимптотического разложения основного температурного поля нелинейной задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек и пластин при указанных граничных условиях, заданных на их лицевых поверхностях.

Постановка нелинейной задачи теплопроводности слоистых анизотропных оболочек

Рассматривается тонкая оболочка, состоящая из M анизотропных неоднородных слоев, возможно, переменной толщины. С оболочкой связана криволинейная ортогональная система координат $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ так, что отсчетная поверхность $\overline{x}_3 = 0$ совпадает с одной из лицевых поверхностей оболочки (например, внутренней), а поверхности $\overline{x}_3 = \overline{H}_m = \text{const} > 0$ определяют границы контакта между m и $m+1$ слоями ($m = 1, 2, \ldots, M$); значение $\overline{x}_3 = \overline{H}_0 \equiv 0$ задает отсчетную поверхность, $\overline{x}_3 = \overline{H}_M \equiv \overline{H} = \text{const} > 0$ — другую лицевую поверхность; слои последовательно пронумерованы от отсчетной поверхности к противоположной лицевой поверхности. Параметры Ламе $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ непрерывны всюду в оболочке и имеют гладкость, которая потребуется в процессе рассуждений; параметр Ламе $\overline{A}_3$ на границах контакта слоев может испытывать разрыв первого рода (т.е. $\overline{A}_3 = \overline{A}_3^{(m)}$ при $\overline{H}_{m-1} < \overline{x}_3 < \overline{H}_m$, $1 \le m \le M$), внутри каждого m-го слоя этот параметр также имеет гладкость, которая потребуется в процессе рассуждений (в случае слоев постоянной толщины координата $\overline{x}_3 \ge 0$ задает расстояние от произвольной точки оболочки до отсчетной поверхности, при этом $\overline{A}_3 = 1$). На границах между слоями выполняются условия идеального (полного) теплового контакта [1].

Полная постановка теплофизически нелинейной нестационарной задачи теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных термочувствительных оболочек приведена в работе [18]. В первом приближении зависимость теплофизических характеристик материалов слоев от температуры можно принять линейной [24, 25]:

$$\overline{\lambda}_{ij}^{(m)}\left(\overline{T}^{(m)}\right) = \overline{k}_{ij}^{(m)} + \overline{\beta}_{ij}^{(m)}\overline{T}^{(m)} \quad (i,\ j = \overline{1,3}), \quad \overline{c}^{(m)}\left(\overline{T}^{(m)}\right) = \overline{c}_*^{(m)} + \overline{c}_{**}^{(m)}\overline{T}^{(m)}, \tag{1}$$

где в общем случае величины $\overline{k}_{ij}^{(m)}$, $\overline{\beta}_{ij}^{(m)}$, $\overline{c}_*^{(m)}$, $\overline{c}_{**}^{(m)}$ могут зависеть от пространственных переменных в силу неоднородности материала m-го слоя.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные, функции и величины:

$$\begin{gathered}
A_l dx_l = \overline{A}_l d\overline{x}_l / \overline{L} \quad (l = 1, 2), \quad A_3 dx_3 = \overline{A}_3 d\overline{x}_3 / \overline{H}_*, \quad t = \overline{t} / \overline{t}_*, \quad H = \overline{H} / \overline{H}_*, \\
T^{(m)} = \overline{T}^{(m)} / \overline{T}_*, \quad \lambda_{ij}^{(m)} = A_1 A_2 A_3 \overline{\lambda}_{ij}^{(m)} / (A_i A_j \overline{\lambda}_*), \quad k_{ij}^{(m)} = A_1 A_2 A_3 \overline{k}_{ij}^{(m)} / (A_i A_j \overline{\lambda}_*), \\
\eta_* \beta_{ij}^{(m)} = A_1 A_2 A_3 \overline{T}_* \overline{\beta}_{ij}^{(m)} / (A_i A_j \overline{\lambda}_*), \quad Q^{(m)} = A_1 A_2 A_3 \overline{L}^2 \overline{Q}^{(m)} / (\overline{\lambda}_* \overline{T}_*), \quad T_\infty^{(\pm)} = \overline{T}_\infty^{(\pm)} / \overline{T}_*, \\
Q^{(\pm)} = A_1 A_2 \overline{L}\, \overline{Q}^{(\pm)} / (\overline{\lambda}_* \overline{T}_*), \quad \alpha_{(\pm)} = \overline{L}\, \overline{\alpha}_{(\pm)} / \overline{\lambda}_*, \quad T_\infty = \overline{T}_\infty / \overline{T}_*, \quad T_{00}^{(m)} = \overline{T}_{00}^{(m)} / \overline{T}_*, \\
q_n^{(m)} = A_1 A_2 A_3 \overline{L}\, \overline{q}_n^{(m)} / (\overline{\lambda}_* \overline{T}_*), \quad \alpha^{(m)} = A_1 A_2 A_3 \overline{L}\, \overline{\alpha}^{(m)} / \overline{\lambda}_*, \quad C^{(m)} = A_1 A_2 A_3 \overline{L}^2 \overline{c}^{(m)} \overline{\rho}^{(m)} / (\overline{\lambda}_* \overline{t}_*), \\
C_*^{(m)} = A_1 A_2 A_3 \overline{L}^2 \overline{c}_*^{(m)} \overline{\rho}^{(m)} / (\overline{\lambda}_* \overline{t}_*), \quad \eta_* C_{**}^{(m)} = A_1 A_2 A_3 \overline{L}^2 \overline{T}_* \overline{c}_{**}^{(m)} \overline{\rho}^{(m)} / (\overline{\lambda}_* \overline{t}_*), \quad t_0 = \overline{t}_0 / \overline{t}_*, \\
\delta^{(\pm)} = A_1 A_2 \overline{\delta}^{(\pm)}, \quad n_i = A_i \overline{n}_i, \quad \varepsilon = \overline{H}_* / \overline{L}, \quad H_m = \overline{H}_m / \overline{H}_*, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad 1 \le m \le M,
\end{gathered} \tag{2}$$

где $\overline{L} = \min\left(\overline{R}, \overline{a}\right)$, $\overline{R}$ — характерный радиус кривизны отсчетной поверхности оболочки, $\overline{a}$ — характерный размер пластины или оболочки в плане (для пологих оболочек и искривленных панелей), $\overline{H}_*$ — характерная толщина конструкции, $\overline{t}$ — время, $\overline{t}_0$ — начальный момент времени, $\overline{t}_* > 0$ — характерное время, в течение которого рассматривается процесс нестационарной теплопроводности, $\overline{T}^{(m)}$ — отклонение температуры m-го слоя от температуры естественного состояния конструкции $\overline{T}_*$; $\overline{\lambda}_{ij}^{(m)}$ — коэффициенты теплопроводности,

$\overline{c}^{(m)}$— удельная теплоемкость, $\overline{\rho}^{(m)}$— объемная плотность, $\overline{k}_{ij}^{(m)}$, $\overline{c}_*^{(m)}$— коэффициенты теплопроводности и удельная теплоемкость при температуре $\overline{T}_*$ $(\overline{T}^{(m)} = 0)$, $\overline{\beta}_{ij}^{(m)}$, $\overline{c}_{**}^{(m)}$ — коэффициенты температурной зависимости, характеризующие термочувствительность материала, $\overline{Q}^{(m)}$ — плотность мощности внутренних источников тепла, $\overline{Q}^{(\pm)}$ — заданные на внешней (+) и внутренней (–) лицевых поверхностях проекции вектора теплового потока на направление внешней нормали, $\overline{\alpha}_{(\pm)}$ — коэффициенты конвективного теплообмена с окружающей средой на тех же поверхностях, $\overline{T}_\infty^{(+)}$, $\overline{T}_\infty^{(-)}$ — температура окружающей среды со стороны внешней $(\overline{x}_3 = \overline{H}_M = \overline{H})$ и внутренней $(\overline{x}_3 = 0)$ лицевой поверхности оболочки соответственно, $\overline{\delta}^{(\pm)}$ — функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на лицевых поверхностях, $\overline{n}_i$ — компоненты вектора внешней единичной нормали к торцевой поверхности оболочки, $\overline{q}_n^{(m)}$ — заданный тепловой поток через торцевую поверхность m-го слоя, $\overline{\alpha}^{(m)}$ — коэффициент теплообмена по закону Ньютона между m-м слоем и окружающей средой со стороны торцевой поверхности, $\overline{T}_\infty$ — температура окружающей среды со стороны торцевой поверхности (или температура торцевой поверхности, смотря по смыслу), $\overline{T}_{00}^{(m)}$ — начальное распределение температуры $\overline{T}^{(m)}$; $\overline{\lambda}_*$ — характерное значение коэффициента теплопроводности материалов слоев оболочки (например, максимальная по слоям величина наибольшего из главных значений тензора коэффициентов теплопроводности $\overline{\lambda}_{ij}^{(m)}$ при температуре естественного состояния $\overline{T}_*$); ε — малый геометрический параметр; верхний индекс m в скобках — номер слоя.

Соотношения (1) с учетом формул обезразмеривания (2) принимают вид

$$\lambda_{ij}^{(m)} = k_{ij}^{(m)} + \eta\beta_{ij}^{(m)}T^{(m)} \quad (i,\ j = \overline{1,\ 3}), \quad C^{(m)} = C_*^{(m)} + \eta C_{**}^{(m)}T^{(m)}, \quad 1 \le m \le M, \tag{3}$$

здесь и в (2) принято: η — малый теплофизический параметр [24], характеризующий степень термочувствительности материалов слоев (при $\eta \to 0$ получаем случай линейной теплопроводности слоистой оболочки при отсутствии термочувствительности материалов слоев), η_* — конкретное значение малого параметра η, при котором решается рассматриваемая задача теплопроводности оболочки (значение η_* выбирается, например, так, чтобы наибольшие значения величин $k_{ij}^{(m)}$, $\eta_*\beta_{ij}^{(m)}$ и $C_*^{(m)}$, $\eta_* C_{**}^{(m)}$ были одного порядка или сопоставимы), $C^{(m)}$ — безразмерная теплоемкость; характерное значение времени $\overline{t}_*$ в (2) выбрано так, чтобы значения величин $C^{(m)}$, $C_*^{(m)}$, $\eta_* C_{**}^{(m)}$ были порядка единицы.

Нелинейная задача нестационарной теплопроводности слоистой оболочки, согласно работе [18], с учетом (2), (3) описывается следующими безразмерными уравнениями и соотношениями: уравнением теплопроводности для m-го слоя —

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 C^{(m)}\partial_t T^{(m)} &= \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\partial_i\left(\lambda_{ij}^{(m)}\partial_j T^{(m)}\right) + \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\partial_i\left(\lambda_{i3}^{(m)}\partial_3 T^{(m)}\right) + \\ &+ \partial_3\left[\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\lambda_{3i}^{(m)}\partial_i T^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T^{(m)}\right] + \varepsilon^2 Q^{(m)}(\mathbf{x},\ t), \quad 1 \le m \le M, \quad \mathbf{x} = \{x_1,\ x_2,\ x_3\};\end{aligned} \tag{4}$$

условиями сопряжения решения по тепловому потоку и температуре на поверхностях $x_3 = H_m = \text{const}$ контакта m-го и ($m+1$)-го слоев —

$$\varepsilon\left(\lambda_{31}^{(m)}\partial_1 T^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)}\partial_2 T^{(m)}\right) + \lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T^{(m)} = \varepsilon\left(\lambda_{31}^{(n)}\partial_1 T^{(n)} + \lambda_{32}^{(n)}\partial_2 T^{(n)}\right) + \\ + \lambda_{33}^{(n)}\partial_3 T^{(n)}, \quad T^{(m)} = T^{(n)}, \quad x_3 = H_m, \ n = m+1, \ 1 \le m \le M-1; \tag{5}$$

граничными условиями общего вида, заданными на лицевых поверхностях оболочки ($x_3 = 0, \ x_3 = H = \text{const}$), —

$$\beta^{(-)}\left[\varepsilon\left(\lambda_{31}^{(1)}\partial_1 T^{(1)} + \lambda_{32}^{(1)}\partial_2 T^{(1)}\right) + \lambda_{33}^{(1)}\partial_3 T^{(1)}\right] = \varepsilon\gamma^{(-)}Q^{(-)} + \\ + \varepsilon\delta^{(-)}\alpha_{(-)}\left(T^{(1)} - T_\infty^{(-)}\right), \quad x_3 = 0, \\ -\beta^{(+)}\left[\varepsilon\left(\lambda_{31}^{(M)}\partial_1 T^{(M)} + \lambda_{32}^{(M)}\partial_2 T^{(M)}\right) + \lambda_{33}^{(M)}\partial_3 T^{(M)}\right] = \\ = \varepsilon\gamma^{(+)}Q^{(+)} + \varepsilon\delta^{(+)}\alpha_{(+)}\left(T^{(M)} - T_\infty^{(+)}\right), \quad x_3 = H; \tag{6}$$

граничными условиями, заданными на торцевой поверхности S (кромке), —

$$-\beta\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} n_i \lambda_{ij}^{(m)}\partial_j T^{(m)} - \beta\sum_{i=1}^{3} n_i \lambda_{i3}^{(m)}\partial_3 T^{(m)} = \varepsilon\gamma q_n^{(m)} + \\ + \varepsilon\delta\alpha^{(m)}\left(T^{(m)} - T_\infty\right), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t \ge t_0, \quad 1 \le m \le M; \tag{7}$$

начальным условием в момент времени $t = t_0$:

$$T^{(m)}\left(\mathbf{x}, t_0\right) = T_{00}^{(m)}\left(\mathbf{x}\right), \quad 1 \le m \le M, \tag{8}$$

где ∂_i — оператор частного дифференцирования по безразмерной пространственной переменной x_i ($i = \overline{1, 3}$), ∂_t — оператор частного дифференцирования по безразмерному времени t; $\beta^{(\pm)}, \gamma^{(\pm)}$ — функции переключения, позволяющие (помимо $\overline{\delta}^{(\pm)}$, см. (2)) задавать тот или иной тип граничных условий на лицевых поверхностях; β, γ, δ — функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на торцевой поверхности S.

Если считать, что изменению малого геометрического параметра ε соответствует изменение толщины оболочки $\overline{H}_*$ (толщины слоев при этом изменяются пропорционально изменению $\overline{H}_*$) при фиксированной геометрии отсчетной поверхности конструкции (при фиксированном характерном размере $\overline{L}$), то основные функции и величины, приведенные в (2), имеют следующие асимптотические свойства:

$$k_{ij}^{(m)} = O(1), \ \beta_{ij}^{(m)} = O(1) \ (i, j = \overline{1, 3}), \ Q^{(m)} = O(1), \ T_\infty^{(\pm)} = O(1), \\ Q^{(\pm)} = O(1), \ T_\infty = O(1), \ q_n^{(m)} = O(1), \ \alpha^{(m)} = O(1), \ C_*^{(m)} = O(1), \\ C_{**}^{(m)} = O(1), \ T_{00}^{(m)} = O(1) \quad \text{при} \ \varepsilon \to 0 \ \text{(аналогично, при } \eta \to 0 \text{ и } \alpha_{(\pm)} \to 0). \tag{9}$$

Соотношения (4)–(8) формально совпадают с безразмерными уравнениями теплопроводности для слоистых анизотропных неоднородных пластин, поэтому дальнейшие рассуждения справедливы как для оболочек, так и для пластин.

Согласно исследованиям [26, 27], в зависимости от условий конвективного теплообмена в граничных условиях общего вида (6) безразмерные коэффициенты $\alpha_{(\pm)}$, характеризующие критерий Био [20] на лицевых поверхностях, могут иметь значения порядка единицы, а могут быть большими и малыми величинами по сравнению с единицей. Следовательно, при определенных условиях теплообмена на лицевых поверхностях безразмерные числа Био $\alpha_{(\pm)}$ (см. (2)) можно рассматривать как независимые от ε и η малые или большие параметры. Так, в работе [18] был рассмотрен случай, когда в граничных условиях (6) функции переключения имели значения: $\beta^{(\pm)}=0,\ \ \gamma^{(\pm)}=0,\ \ \varepsilon\alpha_{(\pm)}\delta^{(\pm)}=1$ (или, что то же самое, $\alpha_{(\pm)}\to\infty$), т.е. на лицевых поверхностях были заданы граничные условия I-го рода. В работе же [17] был исследован случай, когда в (6) не выполнялись одновременно равенства $\beta^{(-)}=0$ и $\beta^{(+)}=0$ (для конкретности в [17] было принято $\beta^{(-)}=1$), кроме того, предполагалось, что $\beta^{(+)}=\gamma^{(+)}=0,\ \ \varepsilon\alpha_{(+)}\delta^{(+)}=1,\ \ \delta^{(-)}=0$ или $\beta^{(+)}=1,\ \ \delta^{(\pm)}=A_1A_2$ (см. (2)), причем в последнем случае $\alpha_{(-)}\ge 1$ и/или $\alpha_{(+)}\ge 1$. В настоящем исследовании рассмотрим лишь случаи задания на лицевых поверхностях граничных условий II-го рода ($\beta^{(\pm)}=\gamma^{(\pm)}=1,\ \ \delta^{(\pm)}=0$) и/или III-го рода при малых числах Био ($\beta^{(\pm)}=1,\ \ \gamma^{(\pm)}=0$ или $\gamma^{(\pm)}=1,\ \ \delta^{(\pm)}=1,\ \ \alpha_{(\pm)}<1$).

Асимптотический анализ нелинейной задачи теплопроводности слоистых оболочек и пластин

Для линеаризации нелинейных соотношений (4)–(7) с учетом (3) используем следующее асимптотическое разложение:

$$T^{(m)}\left(\mathbf{x},t\right)\sim\sum_{k=0}^{\infty}T_k^{(m)}\left(\mathbf{x},t\right)\eta^k,\quad 1\le m\le M,\quad t\ge t_0. \tag{10}$$

Подставим (10) в соотношения (4)–(8) и соберем слагаемые при одинаковых степенях η, тогда получим цепочку линейных равенств для определения функций $T_k^{(m)}$, полностью совпадающую с соотношениями (18)–(26) из работы [18] (в силу ограниченности объема статьи здесь их не будем приводить).

Отметим, что в работе [17] удалось построить решение рассматриваемой там нелинейной задачи теплопроводности без предварительной ее линеаризации, т.е. без предварительного разложения решения в виде ряда (10).

Далее предполагаем, что на лицевых поверхностях числа Био $\alpha_{(+)}$, $\alpha_{(-)}$ являются малыми независимыми параметрами, т.е. рассматриваются граничные условия II-го и/или III-го рода на этих поверхностях, поэтому в граничных условиях (6) следует учесть, что $\beta^{(\pm)}=1$. Для упрощения системы линеаризованных соотношений (18)–(23) из работы [18] используем следующее асимптотическое разложение для коэффициентов $T_k^{(m)}$ в (10):

$$T_k^{(m)}\left(\mathbf{x},t\right)\sim\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}T_{kij}^{(m)}\left(\mathbf{x},t\right)\alpha_{(-)}^i\alpha_{(+)}^j,\quad 0\le\alpha_{(-)},\,\alpha_{(+)}<1,\quad 1\le m\le M,\quad k\ge 0. \tag{11}$$

Подставив (11) в равенства (18)–(23) из работы [18], соберем слагаемые при одинаковых степенях $\alpha_{(-)}^i\alpha_{(+)}^j$ и получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2C_*^{(m)}\partial_tT_{kij}^{(m)}+\varepsilon^2\delta_{0i}\delta_{0j}C_k^{(m)}&=\varepsilon^2\sum_{p=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\partial_p\left(k_{pr}^{(m)}\partial_rT_{kij}^{(m)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{prk}^{(m)}\right)+\\&+\varepsilon\sum_{p=1}^{2}\partial_p\left(k_{p3}^{(m)}\partial_3T_{kij}^{(m)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{p3k}^{(m)}\right)+\partial_3\left[\varepsilon\sum_{p=1}^{2}\left(k_{3p}^{(m)}\partial_pT_{kij}^{(m)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{3pk}^{(m)}\right)+\right.\\&\left.+k_{33}^{(m)}\partial_3T_{kij}^{(m)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{33k}^{(m)}\right]+\varepsilon^2\delta_{0k}\delta_{0i}\delta_{0j}Q^{(m)}\left(\mathbf{x},t\right),\quad 1\le m\le M;\end{aligned} \tag{12}$$

$$\varepsilon\sum_{p=1}^{2}\left(k_{3p}^{(m)}\partial_p T_{kij}^{(m)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{3pk}^{(m)}\right)+k_{33}^{(m)}\partial_3 T_{kij}^{(m)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{33k}^{(m)}=$$
$$=\varepsilon\sum_{p=1}^{2}\left(k_{3p}^{(n)}\partial_p T_{kij}^{(n)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{3pk}^{(n)}\right)+k_{33}^{(n)}\partial_3 T_{kij}^{(n)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{33k}^{(n)}, \tag{13}$$
$$T_{kij}^{(m)}=T_{kij}^{(n)},\quad x_3=H_m,\quad n=m+1,\quad 1\le m\le M-1;$$

$$\varepsilon\sum_{p=1}^{2}\left(k_{3p}^{(1)}\partial_p T_{kij}^{(1)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{3pk}^{(1)}\right)+k_{33}^{(1)}\partial_3 T_{kij}^{(1)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{33k}^{(1)}-\varepsilon\delta^{(-)}T_{k,i-1,j}^{(1)}=$$
$$=\varepsilon\delta_{0k}\delta_{0j}\left(\delta_{0i}\gamma^{(-)}Q^{(-)}-\delta_{1i}\delta^{(-)}T_\infty^{(-)}\right),\qquad x_3=0,$$
$$-\left[\varepsilon\sum_{p=1}^{2}\left(k_{3p}^{(M)}\partial_p T_{kij}^{(M)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{3pk}^{(M)}\right)+k_{33}^{(M)}\partial_3 T_{kij}^{(M)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{33k}^{(M)}\right]-\varepsilon\delta^{(+)}T_{k,i,j-1}^{(M)}= \tag{14}$$
$$=\varepsilon\delta_{0k}\delta_{0i}\left(\delta_{0j}\gamma^{(+)}Q^{(+)}-\delta_{1j}\delta^{(+)}T_\infty^{(+)}\right),\qquad x_3=H;$$

$$-\beta\varepsilon\sum_{p=1}^{3}\sum_{r=1}^{2}n_p\left(k_{pr}^{(m)}\partial_r T_{kij}^{(m)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{prk}^{(m)}\right)-\beta\sum_{p=1}^{3}n_p\left(k_{p3}^{(m)}\partial_3 T_{kij}^{(m)}+\delta_{0i}\delta_{0j}B_{p3k}^{(m)}\right)-$$
$$-\varepsilon\delta\alpha^{(m)}T_{kij}^{(m)}=\varepsilon\delta_{0k}\delta_{0i}\delta_{0j}\left(\gamma q_n^{(m)}-\delta\alpha^{(m)}T_\infty\right),\quad \mathbf{x}\in S,\quad t\ge t_0,\quad 1\le m\le M; \tag{15}$$

$$T_{kij}^{(m)}\left(\mathbf{x},t_0\right)=\delta_{0k}\delta_{0i}\delta_{0j}T_{00}^{(m)}\left(\mathbf{x}\right),\quad 1\le m\le M,\quad k,i,j=0,1,2,3..., \tag{16}$$

где δ_{0i} — символ Кронекера; функции $C_k^{(m)}$, $B_{prk}^{(m)}$ определены равенствами (24), (26) из работы [18] и считаются уже известными при каждом $k\ge 0;$ в первом равенстве (14) при $i = 0$ и во втором равенстве (14) при $j = 0$, согласно (11), следует учесть

$$T_{k,-1,j}^{(m)}\equiv 0,\quad T_{k,i,-1}^{(m)}\equiv 0,\quad 1\le m\le M,\quad k,i,j=0,1,2,3.... \tag{17}$$

Для каждого $k\ge 0$ начально-краевые задачи (12)–(16) с учетом (17) можно последовательно проинтегрировать при всех $i,\ j\ge 0,$ т.е. можно последовательно определить все коэффициенты разложения (11).

Наличие малого геометрического параметра ε при высших производных в уравнении (12), в условиях сопряжения (13), вытекающих из (5), и граничных условиях (14), (15) указывает на то, что начально-краевая задача (12)–(16) при любых $k,\ i,\ j\ge 0$ является задачей с сингулярным возмущением, поэтому решение этой задачи следует искать в виде [20, 22]

$$T_{kij}^{(m)}=T_{*kij}^{(m)}+T_{\tau kij}^{(m)}+T_{bkij}^{(m)}\quad (1\le m\le M,\quad k,i,j=0,1,2,3...), \tag{18}$$

где $T_{*kij}^{(m)}$ — внешнее асимптотическое разложение функции $T_{kij}^{(m)}$, характеризующее основное температурное поле в m-слое; $T_{\tau kij}^{(m)}$ — поправка к внешнему разложению в окрестности начального момента времени $t=t_0$, $T_{bkij}^{(m)}$ — поправка к внешнему разложению в пограничном слое в окрестности торцевой поверхности оболочки S (или пластины).

Далее определим внешнее асимптотическое разложение $T_{*kij}^{(m)}$, которое будем искать в виде:

$$T_{*kij}^{(m)}\left(\mathbf{x},t\right)\sim\frac{1}{\varepsilon^{i+j+1}}\sum_{s=0}^{\infty}T_{kijs}^{(m)}\left(\mathbf{x},t\right)\varepsilon^s,\quad 1\le m\le M,\quad k,i,j\ge 0. \tag{19}$$

Подставим (19) в (12)–(16) и соберем слагаемые при одинаковых степенях ε, тогда получим следующую цепочку равенств для определения функций $T^{(m)}_{kijs}(\mathbf{x},t)$:

$$\partial_3\left(k^{(m)}_{33}\partial_3 T^{(m)}_{kijs}+\sum_{p=1}^{2}k^{(m)}_{3p}\partial_p T^{(m)}_{kijs-1}+q^{(m)}_{kijs}(\mathbf{x},t)\right)+\sum_{p=1}^{2}\partial_p\left(k^{(m)}_{p3}\partial_3 T^{(m)}_{kijs-1}\right)+$$
$$+\sum_{p=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\partial_p\left(k^{(m)}_{pr}\partial_r T^{(m)}_{kijs-2}\right)-C^{(m)}_{*}\partial_t T^{(m)}_{kijs-2}=-w^{(m)}_{kijs}(\mathbf{x},t),\quad 1\le m\le M; \tag{20}$$

$$k^{(m)}_{33}\partial_3 T^{(m)}_{kijs}+\sum_{p=1}^{2}k^{(m)}_{3p}\partial_p T^{(m)}_{kijs-1}+q^{(m)}_{kijs}(\mathbf{x},t)=k^{(n)}_{33}\partial_3 T^{(n)}_{kijs}+\sum_{p=1}^{2}k^{(n)}_{3p}\partial_p T^{(n)}_{kijs-1}+$$
$$+q^{(n)}_{kijs}(\mathbf{x},t),\quad T^{(m)}_{kijs}=T^{(n)}_{kijs},\quad x_3=H_m,\quad n=m+1,\quad 1\le m\le M-1; \tag{21}$$

$$k^{(1)}_{33}\partial_3 T^{(1)}_{kijs}+\sum_{p=1}^{2}k^{(1)}_{3p}\partial_p T^{(1)}_{kijs-1}+q^{(1)}_{kijs}(\mathbf{x},t)-\delta^{(-)}T^{(1)}_{k,i-1,j,s-2}=Q^{(-)}_{kijs}(\mathbf{x},t)\quad (x_3=0),$$
$$-\left[k^{(M)}_{33}\partial_3 T^{(M)}_{kijs}+\sum_{p=1}^{2}k^{(M)}_{3p}\partial_p T^{(M)}_{kijs-1}+q^{(M)}_{kijs}(\mathbf{x},t)\right]-\delta^{(+)}T^{(M)}_{k,i,j-1,s-2}=Q^{(+)}_{kijs}(\mathbf{x},t),\ x_3=H; \tag{22}$$

$$-\beta\sum_{p=1}^{3}\sum_{r=1}^{2}n_p k^{(m)}_{pr}\partial_r T^{(m)}_{kijs-1}-\beta\sum_{p=1}^{3}n_p k^{(m)}_{p3}\partial_3 T^{(m)}_{kijs}-\delta\alpha^{(m)}T^{(m)}_{kijs-1}=Q^{(m)}_{kijs}(\mathbf{x},t),$$
$$\mathbf{x}\in S,\quad t\ge t_0,\quad 1\le m\le M; \tag{23}$$

$$T^{(m)}_{kijs}(\mathbf{x},t_0)=\delta_{0k}\delta_{0i}\delta_{0j}\delta_{1s}T^{(m)}_{00}(\mathbf{x}),\quad 1\le m\le M,\quad k,\ i,\ j,\ s=0,1,2,3..., \tag{24}$$

где

$$q^{(m)}_{kijs}(\mathbf{x},t)\equiv\delta_{0i}\delta_{0j}\left(\delta_{1s}B^{(m)}_{33k}+\delta_{2s}\sum_{p=1}^{2}B^{(m)}_{3pk}\right),$$
$$w^{(m)}_{kijs}(\mathbf{x},t)\equiv\delta_{0i}\delta_{0j}\delta_{3s}\left(\delta_{0k}Q^{(m)}-C^{(m)}_{k}\right)+\delta_{0i}\delta_{0j}\sum_{p=1}^{2}\left(\delta_{3s}\sum_{r=1}^{2}\partial_p B^{(m)}_{prk}+\delta_{2s}\partial_p B^{(m)}_{p3k}\right),$$
$$Q^{(-)}_{kijs}(\mathbf{x},t)\equiv\delta_{0k}\delta_{0j}\left(\delta_{0i}\delta_{2s}Q^{(-)}-\delta_{1i}\delta_{3s}\delta^{(-)}T^{(-)}_{\infty}\right),$$
$$Q^{(+)}_{kijs}(\mathbf{x},t)\equiv\delta_{0k}\delta_{0i}\left(\delta_{0j}\delta_{2s}Q^{(+)}-\delta_{1j}\delta_{3s}\delta^{(+)}T^{(+)}_{\infty}\right), \tag{25}$$
$$Q^{(m)}_{kijs}(\mathbf{x},t)\equiv\delta_{0k}\delta_{0i}\delta_{0j}\delta_{2s}\left(\gamma q^{(m)}_{n}-\delta\alpha^{(m)}T_{\infty}\right)+$$
$$+\beta\delta_{0i}\delta_{0j}\delta_{1s}\sum_{p=1}^{3}n_p B^{(m)}_{p3k}+\beta\delta_{0i}\delta_{0j}\delta_{2s}\sum_{p=1}^{3}\sum_{r=1}^{2}n_p B^{(m)}_{prk}.$$

Согласно (19), в (20)–(23) нужно учесть, что

$$T^{(m)}_{kij,-1}\equiv 0,\quad T^{(m)}_{kij,-2}\equiv 0,\quad 1\le m\le M,\quad i,\ j,\ k=0,1,2,3.... \tag{26}$$

В силу равенств (25) функции $q^{(m)}_{kijs}$, $w^{(m)}_{kijs}$, $Q^{(\pm)}_{kijs}$, $Q^{(m)}_{kijs}$ в (20)–(23) известны при каждом $s\ge 0$.

Проинтегрировав уравнение (20) по переменной x_3 при $s=0$ с учетом (21), (22), (25), (26) и $k^{(m)}_{33}>0$ (в силу постулата Онзагера [28] и $A_l>0$, $l=\overline{1,3}$), получим

$$T^{(m)}_{kij0}(\mathbf{x},t)=\theta_{kij0}(x_1,x_2,t),\quad 1\le m\le M, \tag{27}$$

где θ_{kij0} — произвольная функция, подлежащая в последующем определению. Из (27) с учетом (25), (26) следует тождественное выполнение граничного условия (23) на кромке оболочки при $s = 0$, а из (24) с учетом (27) вытекает начальное условие

$$\theta_{kij0}\left(x_1,\, x_2,\, t_0\right) = 0, \quad 1 \le m \le M. \tag{28}$$

Интегрируя уравнение (20) по переменной x_3 при $s = 1$ с учетом (21), (22), (25)–(27), получим

$$k_{33}^{(m)} \partial_3 T_{kij1}^{(m)} + \sum_{p=1}^{2} k_{3p}^{(m)} \partial_p \theta_{kij0} + q_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\, t\right) = 0, \quad 1 \le m \le M, \tag{29}$$

отсюда

$$\partial_3 T_{kij1}^{(m)} = -\frac{1}{k_{33}^{(m)}} \left(\sum_{p=1}^{2} k_{3p}^{(m)} \partial_p \theta_{kij0} + q_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\, t\right) \right), \quad 1 \le m \le M. \tag{30}$$

Проинтегрируем (30) по x_3 с учетом второго соотношения (21) и получим

$$T_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\, t\right) = \theta_{kij1}\left(x_1,\, x_2,\, t\right) - F_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\, t\right), \quad 1 \le m \le M, \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned} F_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\, t\right) \equiv & \int_{H_{m-1}}^{x_3} \frac{1}{k_{33}^{(m)}} \left(\sum_{p=1}^{2} k_{3p}^{(m)} \partial_p \theta_{kij0} + q_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\, t\right) \right) dx_3 + \\ & + \sum_{l=1}^{m-1} \int_{H_{l-1}}^{H_l} \frac{1}{k_{33}^{(l)}} \left(\sum_{p=1}^{2} k_{3p}^{(l)} \partial_p \theta_{kij0} + q_{kij1}^{(l)}\left(\mathbf{x},\, t\right) \right) dx_3, \quad H_{m-1} < x_3 \le H_m, \end{aligned} \tag{32}$$

здесь $\theta_{kij1}\left(x_1,\, x_2,\, t\right) \equiv T_{kij1}^{(1)}\left(x_1,\, x_2,\, 0,\, t\right)$ — произвольная функция, подлежащая определению.

Подставим (30) и (27) в граничное условие на кромке (23) при $s = 1$, тогда с учетом (26) получим

$$\begin{aligned} & -\beta \sum_{p=1}^{3} \sum_{r=1}^{2} n_p k_{pr}^{(m)} \partial_r \theta_{kij0} + \beta \sum_{p=1}^{3} n_p \frac{k_{p3}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}} \left(\sum_{r=1}^{2} k_{3r}^{(m)} \partial_r \theta_{kij0} + q_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\, t\right) \right) - \\ & -\delta \alpha^{(m)} \theta_{kij0} = Q_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\, t\right), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t \ge t_0, \quad 1 \le m \le M. \end{aligned} \tag{33}$$

Так как материалы слоев предполагаются произвольными (в общем случае, и неоднородными по толщине), а функция θ_{kij0} не зависит от переменной x_3, граничное условие (33) не может быть выполнено точно во всех точках торцевой поверхности оболочки (пластины), поэтому здесь и далее граничные условия на кромках оболочки (33) и (23) будем выполнять в интегральном смысле (проинтегрировав по толщине оболочки указанные равенства), что является необходимым и достаточным условием для затухания пограничных слоев [20].

Проинтегрировав соотношение (33) по толщине оболочки, получим граничное условие на кромке для функции θ_{kij0}:

$$\begin{aligned} & \beta \sum_{r=1}^{2} \partial_r \theta_{kij0} \sum_{m=1}^{M} \int_{H_{m-1}}^{H_m} \sum_{p=1}^{3} \frac{n_p}{k_{33}^{(m)}} \left(k_{p3}^{(m)} k_{3r}^{(m)} - k_{pr}^{(m)} k_{33}^{(m)} \right) dx_3 - \delta \theta_{kij0} \sum_{m=1}^{M} \int_{H_{m-1}}^{H_m} \alpha^{(m)}\, dx_3 = \\ & = \sum_{m=1}^{M} \int_{H_{m-1}}^{H_m} \left(Q_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\, t\right) - \beta \sum_{p=1}^{3} n_p \frac{k_{p3}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}} q_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\, t\right) \right) dx_3, \quad \left(x_1,\, x_2\right) \in \Gamma, \quad t \ge t_0, \end{aligned} \tag{34}$$

где Γ — контур, ограничивающий отсчетную поверхность оболочки, занимающую область *G* в пространстве переменных $x_1,\ x_2$. Согласно (25), правая часть в (34) известна.

Подставим (31) в начальное условие (24) при $s = 1$, тогда

$$\theta_{kij1}\left(x_1,\ x_2,\ t_0\right)-F_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t_0\right)=\delta_{0k}\delta_{0i}\delta_{0j}T_{00}^{(m)}\left(\mathbf{x}\right),\quad 1\le m\le M. \tag{35}$$

Так как начальное распределение температуры $T_{00}^{(m)}\left(\mathbf{x}\right)$ произвольно, функция θ_{kij1} не зависит от переменной x_3 и функция $F_{kij1}^{(m)}$ по переменной x_3 имеет вполне определенную зависимость (32), то начальное условие (35) в общем случае не может быть выполнено точно во всех точках оболочки, поэтому здесь и далее начальные условия (35), (24) будем выполнять в интегральном смысле (проинтегрировав по толщине оболочки эти равенства), что является необходимым и достаточным условием для затухания поправки $T_{\tau kij}^{(m)}$ в разложении (18) в окрестности начального момента времени t_0.

Проинтегрировав равенство (35) по толщине оболочки (пластины), получим начальное условие для функции θ_{kij1}:

$$\theta_{kij1}\left(x_1,\ x_2,\ t_0\right)=\frac{1}{H}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\left[\delta_{0k}\delta_{0i}\delta_{0j}T_{00}^{(m)}\left(\mathbf{x}\right)+F_{kij1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t_0\right)\right]dx_3,\quad \left(x_1,\ x_2\right)\in G, \tag{36}$$

где $x_3 = H > 0$ — аппликата внешней лицевой поверхности в безразмерной системе координат.

Далее предполагаем, что при $s\ge 2$ справедливы следующие соотношения:

$$k_{33}^{(m)}\partial_3 T_{kijs-1}^{(m)}+\sum_{p=1}^{2}k_{3p}^{(m)}\partial_p T_{kijs-2}^{(m)}+q_{kijs-1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right)=W_{kijs-1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right),\quad 1\le m\le M; \tag{37}$$

$$T_{kijs-2}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right)=\theta_{kijs-2}\left(x_1,\ x_2,\ t\right)-F_{kijs-2}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right),\quad 1\le m\le M, \tag{38}$$

где $W_{kijs-1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right)$, $F_{kijs-2}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right)$ — уже известные функции. Согласно (27), (29), при $s = 2$ эти предположения выполняются, причем $W_{kij1}^{(m)}\equiv 0$, $F_{kij0}^{(m)}\equiv 0$. Выразим из (37) с учетом (38) производную:

$$\partial_3 T_{kijs-1}^{(m)}=V_{kijs-1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right)-\sum_{p=1}^{2}\frac{k_{3p}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\partial_p\theta_{kijs-2},\quad 1\le m\le M, \tag{39}$$

где $V_{kijs-1}^{(m)}$ — известная функция, определяемая следующим образом:

$$V_{kijs-1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right)\equiv\frac{1}{k_{33}^{(m)}}\left(W_{kijs-1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right)-q_{kijs-1}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right)+\sum_{p=1}^{2}k_{3p}^{(m)}\partial_p F_{kijs-2}^{(m)}\right),\quad 1\le m\le M. \tag{40}$$

Подставим (38), (39) в уравнение (20) и получим

$$\begin{gathered}\partial_3\left(k_{33}^{(m)}\partial_3 T_{kijs}^{(m)}+\sum_{p=1}^{2}k_{3p}^{(m)}\partial_p T_{kijs-1}^{(m)}+q_{kijs}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right)\right)=v_{kijs}^{(m)}\left(\mathbf{x},\ t\right)-\\-\sum_{p=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\partial_p\left(\frac{k_{pr}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{p3}^{(m)}k_{3r}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\partial_r\theta_{kijs-2}\right)+C_*^{(m)}\partial_t\theta_{kijs-2},\quad 1\le m\le M,\end{gathered} \tag{41}$$

где известная функция $v_{kijs}^{(m)}$ определяется как

$$
\begin{aligned}
&v_{kijs}^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{p=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\partial_p\left(k_{pr}^{(m)}\partial_r F_{kijs-2}^{(m)}\right) - w_{kijs}^{(m)}(\mathbf{x}, t) - \sum_{p=1}^{2}\partial_p\left(k_{p3}^{(m)} V_{kijs-1}^{(m)}\right) - \\
&-C_*^{(m)}\partial_t F_{kijs-2}^{(m)}, \quad 1 \le m \le M.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Проинтегрировав по x_3 уравнение (41) с учетом (21) и первого равенства (22), получим

$$
k_{33}^{(m)}\partial_3 T_{kijs}^{(m)} + \sum_{p=1}^{2} k_{3p}^{(m)}\partial_p T_{kijs-1}^{(m)} + q_{kijs}^{(m)}(\mathbf{x}, t) = W_{kijs}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad 1 \le m \le M, \tag{43}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&W_{kijs}^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv Q_{kijs}^{(-)} + \delta^{(-)}\, T_{k,i-1,j,s-2}^{(1)}\Big|_{x_3=0} + \int_{H_{m-1}}^{x_3}\Bigg[v_{kijs}^{(m)}(\mathbf{x}, t) + C_*^{(m)}\partial_t\theta_{kijs-2} - \\
&-\sum_{p=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\partial_p\left(\frac{k_{pr}^{(m)}k_{33}^{(m)} - k_{p3}^{(m)}k_{3r}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\partial_r\theta_{kijs-2}\right)\Bigg]dx_3 + \sum_{l=1}^{m-1}\int_{H_{l-1}}^{H_l} v_{kijs}^{(l)}(\mathbf{x}, t)\,dx_3 + \\
&+D^{(m)}\left(\theta_{kijs-2}\right), \quad H_{m-1} < x_3 \le H_m;
\end{aligned} \tag{44}
$$

дифференциальный оператор $D^{(m)}(\bullet)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&D^{(m)}(\bullet) \equiv \sum_{l=1}^{m-1}\int_{H_{l-1}}^{H_l}\left[C_*^{(l)}\partial_t(\bullet) - \sum_{p=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\partial_p\left(\frac{k_{pr}^{(l)}k_{33}^{(l)} - k_{p3}^{(l)}k_{3r}^{(l)}}{k_{33}^{(l)}}\partial_r(\bullet)\right)\right]dx_3, \\
&D^{(1)}(\bullet) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{45}
$$

Из соотношения (43) при $m = M$, $x_3 = H_M = H$ и из второго равенства (22) с учетом (45) следует

$$
\begin{aligned}
&D^{(M+1)}\left(\theta_{kijs-2}\right) = -Q_{kijs}^{(+)} - Q_{kijs}^{(-)} - \delta^{(+)}\, T_{k,i,j-1,s-2}^{(M)}\Big|_{x_3=H} - \delta^{(-)}\, T_{k,i-1,j,s-2}^{(1)}\Big|_{x_3=0} - \\
&-\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m} v_{kijs}^{(m)}(\mathbf{x}, t)\,dx_3, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad t \ge t_0,
\end{aligned} \tag{46}
$$

где, согласно (42), (40), (25), (17), правая часть — известная функция переменных x_1, x_2, t, так как функции $T_{k,i,j-1,s-2}^{(m)}$ и $T_{k,i-1,j,s-2}^{(m)}$ считаются уже ранее определенными.

При $s = 2$ уравнение (46) определяет функцию $\theta_{kij0}(x_1, x_2, t)$ при граничном условии (34), заданном на кромке оболочки, и начальном условии (28). Далее считаем, что начально-краевая задача (28), (34), (46) (при $s = 2$) уже решена, т.е. функция θ_{kij0} предполагается известной, а значит, согласно (32), известна функция $F_{kij1}^{(m)}$ в (31), а также функция $W_{kij2}^{(m)}$ в (43) при $s = 2$ (см. (44)). Следовательно, предположения (37), (38) становятся справедливыми и при $s = 3$, поэтому при $s = 3$ справедливо и уравнение (46), определяющее функцию $\theta_{kij1}(x_1, x_2, t)$ при начальном условии (36).

При $s \ge 3$ граничное условие для уравнения (46) получим, проинтегрировав равенство (23) по толщине оболочки для предыдущего значения s (заменив в (23) s на $s - 1$) с учетом (38), (39), тогда

$$\beta\sum_{r=1}^{2}\partial_r\theta_{kijs-2}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\sum_{p=1}^{3}n_p\frac{k_{p3}^{(m)}k_{3r}^{(m)}-k_{pr}^{(m)}k_{33}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}dx_3-\delta\theta_{kijs-2}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\alpha^{(m)}\,dx_3=$$
$$=\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\Big[Q_{kijs-1}^{(m)}(\mathbf{x},t)-\beta\sum_{p=1}^{3}n_p\left(\sum_{r=1}^{2}k_{pr}^{(m)}\partial_r F_{kijs-2}^{(m)}-k_{p3}^{(m)}V_{kijs-1}^{(m)}\right)- \tag{47}$$
$$-\delta\alpha^{(m)}F_{kijs-2}^{(m)}\Big]dx_3,\quad (x_1,x_2)\in\Gamma,\quad t\ge t_0,\quad s=3,4,5...$$

Проинтегрировав соотношение (39) по x_3 с учетом второго равенства (21), получим

$$T_{kijs-1}^{(m)}(\mathbf{x},t)=\theta_{kijs-1}(x_1,x_2,t)-F_{kijs-1}^{(m)}(\mathbf{x},t),\quad 1\le m\le M, \tag{48}$$

где

$$F_{kijs-1}^{(m)}(\mathbf{x},t)\equiv\int\limits_{H_{m-1}}^{x_3}\left(\sum_{p=1}^{2}\frac{k_{3p}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\partial_p\theta_{kijs-2}-V_{kijs-1}^{(m)}(\mathbf{x},t)\right)dx_3+$$
$$+\sum_{l=1}^{m-1}\int\limits_{H_{l-1}}^{H_l}\left(\sum_{p=1}^{2}\frac{k_{3p}^{(l)}}{k_{33}^{(l)}}\partial_p\theta_{kijs-2}-V_{kijs-1}^{(l)}(\mathbf{x},t)\right)dx_3,\quad H_{m-1}<x_3\le H_m, \tag{49}$$

здесь $\theta_{kijs-1}(x_1,x_2,t)\equiv T_{kijs-1}^{(1)}(x_1,x_2,0,t)$ — произвольная функция, подлежащая определению. Согласно (40), (27), (25), (29), (37), при $s = 2$ равенство (49) редуцируется в (32).

Если функция θ_{kijs-2}, в (49), (44) известна, то известны и функции $W_{kijs}^{(m)}(\mathbf{x},t)$, $F_{kijs-1}^{(m)}(\mathbf{x},t)$ в правых частях (43), (48). Следовательно, при известной функции θ_{kijs-2}, согласно (43), (48), предположения (37), (38) становятся справедливыми при новом значении s (при замене в (37), (38) s на $s + 1$).

Как было показано выше, функция θ_{kij0} определяется из начально-краевой задачи (28), (34), (46) при $s = 2$. Функцию θ_{kij1} можно определить из начально-краевой задачи (36), (46), (47) при $s = 3$, поэтому, согласно (49), (44), предположения (37), (38) справедливы и при $s = 4$.

Для получения решения при $s\ge 4$, т.е. для определения функции θ_{kijs-2} необходимо использовать уравнение (46) при граничном условии (47) и начальном условии

$$\theta_{kijs-2}(x_1,x_2,t_0)=\frac{1}{H}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}F_{kijs-2}^{(m)}(\mathbf{x},t_0)dx_3,\quad (x_1,x_2)\in G,\quad k=4,5,6\ ..., \tag{50}$$

которое получается из (24) после подстановки в него выражения (38) и интегрирования по толщине оболочки при $s\ge 4$. Определив функцию θ_{kijs-2} (при $s\ge 4$) из начально-краевой задачи (46), (47), (50), в силу (49), (44) и предположений (37), (38) получим известные функции $F_{kijs-1}^{(m)}$, $W_{kijs}^{(m)}$ в равенствах (43), (48), которые формально полностью совпадают с (37), (38). Таким образом, предположения (37), (38) остаются справедливыми и для следующего значения s, поэтому по схеме (37)–(50) можно построить решение начально-краевой задачи (20)–(24) (где $k, i, j = 0, 1, 2...$) для нового значения s и т.д.

Предложенный алгоритм определения основного трехмерного нестационарного температурного поля в слоистой анизотропной оболочке показывает, что для вычисления неизвестных коэффициентов $T_{kijs}^{(m)}$ в асимптотическом разложении (19) при каждом

$s = 0, 1, 2, ...$ необходимо проинтегрировать двумерные уравнения (46), которые различаются лишь известными правыми частями и в развернутом виде в силу (45) выглядят следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\sum_{p=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\partial_p\left(\frac{k_{p3}^{(m)}k_{3r}^{(m)}-k_{pr}^{(m)}k_{33}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\partial_r\theta_{kijs-2}\right)dx_3 = \\ = -\partial_t\theta_{kijs-2}\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}C_*^{(m)}dx_3 + Z_{kijs}\left(x_1,\, x_2,\, t\right), \tag{51}$$

где известная функция Z_{kijs} определяется правой частью (46). Так как уравнение (51) содержит производную по времени t лишь первого порядка и производные по пространственным переменным x_1, x_2 второго порядка, то оно является линейным уравнением параболического типа.

Отметим: в тех случаях граничных условий, заданных на лицевых поверхностях, что рассматривались в работах [17, 18], удалось построить асимптотические разложения температуры в слоистых неоднородных оболочках, которые не требуют решения двумерных начально-краевых задач для уравнений, аналогичных (51).

Покажем, что дифференциальный оператор в левой части уравнения (51) является эллиптическим. С этой целью рассмотрим следующее уравнение:

$$\sum_{p=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\partial_p\left(\frac{k_{p3}^{(m)}k_{3r}^{(m)}-k_{pr}^{(m)}k_{33}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\partial_r\theta_{kijs-2}\right) = z_{kijs}\left(\mathbf{x},\, t\right),\quad 1\le m\le M, \tag{52}$$

где переменная x_3 выступает в качестве параметра, а левая часть совпадает с подынтегральным выражением левой части (51). Характеристическое уравнение для (52) имеет вид

$$\left[\left(k_{22}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{23}^{(m)}k_{23}^{(m)}\right)x_2'^2 - 2\left(k_{12}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{23}^{(m)}\right)x_2' + \\ +\left(k_{11}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{13}^{(m)}\right)\right]\Big/k_{33}^{(m)} = 0, \tag{53}$$

где $x_2'\left(x_1\right) = dx_2/dx_1$ — производная, задающая направление характеристики при фиксированном x_3. Дискриминант этого уравнения $D = -\dfrac{4}{k_{33}^{(m)}}\det\left(k_{nl}^{(m)}\right)$, $n, l = 1, 2, 3$, где $\det\left(k_{nl}^{(m)}\right)$ — определитель матрицы коэффициентов теплопроводности. Согласно постулату Онзагера [28] и $A_l > 0$, имеем $k_{33}^{(m)} > 0$, $\det\left(k_{nl}^{(m)}\right) > 0$, поэтому $D < 0$. Следовательно, оператор в (52) является эллиптическим, а для коэффициентов в (53) при любых x_3 выполняется неравенство

$$\left[\frac{2}{k_{33}^{(m)}}\left(k_{12}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{23}^{(m)}\right)\right]^2 < 4\frac{\left(k_{22}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{23}^{(m)}k_{23}^{(m)}\right)}{k_{33}^{(m)}}\cdot\frac{\left(k_{11}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{13}^{(m)}\right)}{k_{33}^{(m)}}.$$

Проинтегрируем это неравенство по толщине оболочки:

$$\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\left(\frac{k_{12}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{23}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\right)^2 dx_3 < \sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\left(\frac{k_{22}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{23}^{(m)}k_{23}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\right)\times \\ \times\left(\frac{k_{11}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{13}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\right)dx_3, \tag{54}$$

отсюда, применив к левой части неравенство Буняковского [29], получим

$$\left(\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{k_{12}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{23}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}dx_3\right)^2<\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\left(\frac{k_{22}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{23}^{(m)}k_{23}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{k_{11}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{13}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}\right)dx_3<\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{k_{22}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{23}^{(m)}k_{23}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}dx_3\times$$
$$\times\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{k_{11}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{13}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}dx_3, \tag{55}$$

где последнее неравенство является следствием того, что в силу постулата Онзагера сомножители, заключенные в скобки под интегралом в правой части (54), положительны при всех x_3.

Используя неравенства (55), можно определить тип оператора в левой части разрешающего уравнения (51). В стационарном случае ($\partial_t\theta_{kijs-2}\equiv 0$) характеристическое уравнение для (51) имеет вид

$$x_2'^2\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{k_{22}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{23}^{(m)}k_{23}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}dx_3-2x_2'\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{k_{12}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{23}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}dx_3+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{k_{11}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{13}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}dx_3=0,$$

а его дискриминант

$$D=4\left(\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{k_{12}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{23}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}dx_3\right)^2-$$
$$-4\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{k_{22}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{23}^{(m)}k_{23}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}dx_3\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{k_{11}^{(m)}k_{33}^{(m)}-k_{13}^{(m)}k_{13}^{(m)}}{k_{33}^{(m)}}dx_3. \tag{56}$$

Из (56) с учетом неравенства (55) получаем $D<0$. Следовательно, дифференциальный оператор в левой части разрешающего уравнения (51) является эллиптическим оператором второго порядка по двум пространственным переменным $(x_1,\,x_2)$, поэтому в стационарном случае ($\partial_t\theta_{kijs-2}\equiv 0$) уравнение (51) является уравнением эллиптического типа, зависящим лишь от двух переменных — x_1, x_2.

Отметим, что попытки построения разложений, аналогичных (19), при других отрицательных степенях малого параметра ε приводят либо к тому, что соответствующие коэффициенты $T_{kijs}^{(m)}$ при отрицательных степенях ε, отличных от (19), тождественно равны нулю, либо к тому, что получающиеся при этом цепочки равенств, аналогичных (20)–(24), не позволяют последовательно определить все коэффициенты $T_{kijs}^{(m)}$ в соответствующих разложениях функций $T_{*kij}^{(m)}$, как это было получено выше при использовании асимптотического ряда (19). Кроме того, попытки построения разложений (10), (11) по отрицательным степеням малых параметров η, $\alpha_{(+)}$, $\alpha_{(-)}$ также приводят к тому, что коэффициенты $T_k^{(m)}$ (см. (10)) и $T_{kij}^{(m)}$ (см. (11)) при отрицательных степенях этих параметров получаются тождественно равными нулю, что в конечном итоге приводит именно к разложениям (10), (11).

Если на обеих лицевых поверхностях заданы граничные условия II рода ($\beta^{(\pm)} = \gamma^{(\pm)} = 1$, $\delta^{(\pm)} = 0$ или $\alpha_{(\pm)} = 0$, см. (6)), то в разложении (11) остается лишь первое слагаемое $\left(T_k^{(m)}(\mathbf{x}, t) = T_{k00}^{(m)}(\mathbf{x}, t)\right)$ и внешнее асимптотическое разложение температуры определяется соотношением (19) при $i = j = 0$.

Здесь следует обратить внимание на то, что в работе [13] при построении асимптотических разложений решений термоупругих задач для тонкостенных элементов конструкций температура представлялась в виде (19) при $i = j = 0$ без какого-либо обоснования такого разложения, содержащего только одну отрицательную степень ε^{-1}. Проведенный выше асимптотический анализ показывает, что такое разложение температуры справедливо только для случая, когда либо на обеих лицевых поверхностях заданы граничные условия II-го рода, либо на этих поверхностях заданы граничные условия, рассмотренные в работах [17, 18], где разложения температуры получались не содержащими отрицательных степеней параметра ε. Однако, как видно из (19), принятое в работе [13] разложение температуры (коэффициенты которого там предполагаются известными) не охватывает всех возможных случаев граничных условий, задаваемых на лицевых поверхностях пластин и оболочек. В частности, из рассмотрения выпал случай, когда на лицевых поверхностях тонкостенной конструкции задан теплообмен по закону Ньютона с малыми числами Био $\alpha_{(+)}$, $\alpha_{(-)}$.

Обсудим некоторые свойства полученного асимптотического разложения (19) при граничных условиях II-го рода на лицевых поверхностях (при $i = j = 0$ и $\alpha_{(\pm)} = 0$). Из разложения (19) следует, что при $Q^{(\pm)} \neq 0$ имеем

$$T_{*k00}^{(m)}(x_1, x_2, x_3, t) = O(1/\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{57}$$

т.е., согласно (10), (11), (18), с уменьшением ε температура $T^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ в каждом слое неограниченно возрастает по модулю. Этот факт имеет физическое объяснение. А именно: уменьшению ε соответствует уменьшение толщины оболочки и слоев при фиксированных прочих входных данных задачи (размерах отсчетной поверхности оболочки, плотности мощности внутренних источников тепла, тепловых потоках на лицевых поверхностях). Так как характерный размер оболочки $\overline{L}$ и тепловые потоки на лицевых поверхностях $Q^{(\pm)}$ в каждый момент времени фиксированы, то безразмерный приток (отток) тепла через эти поверхности описывается выражением

$$Q_* = -\iint\limits_G \left(Q^{(+)} + Q^{(-)}\right) A_1 A_2 dx_1 dx_2 + O(\varepsilon). \tag{58}$$

При уменьшении толщины оболочки и слоев (уменьшении ε) уменьшаются объем конструкции и площади торцевых поверхностей оболочки и слоев (на кромках). Поэтому, чтобы обеспечить фиксированный отток (приток) тепла через эти поверхности, равный значению первого слагаемого в правой части (58), при уменьшении ε должны возрастать по модулю тангенциальные компоненты теплового потока в оболочке, а значит, по закону Фурье неограниченно должен возрастать модуль градиента температуры. Следствием этого будет неограниченное возрастание по модулю температуры при $\varepsilon \to 0$. Этот факт и отражает соотношение (57) (или, в общем случае, разложение (19)).

Из разложения (19) и равенств (46) с учетом (25) (при $k, i, j = 0$, $s = 2, 3$) следует, что вклад в температуру от внутренних источников тепла $Q^{(m)}$ асимптотически на порядок по параметру ε меньше вклада от тепловых потоков $Q^{(\pm)}$, заданных на лицевых поверхностях оболочки, так как $Q^{(\pm)}$ определяют функцию $T_{000s}^{(m)}$ (через θ_{0000}, см. (27)) и последующие $T_{000s}^{(m)}$, $s \geq 1$ (см. (46) при $s = 2$), а $Q^{(m)}$ задает функцию $T_{0001}^{(m)}$ (через θ_{0001}, см. (31)) и последующие $T_{000s}^{(m)}$, $s \geq 2$ (см. (46) при $s = 3$). Этот факт также имеет физическое объяснение. При уменьшении ε уменьшается объем оболочки и слоев, а значит, в силу (9), уменьшается мощность тепла Q_V, производимого в данный момент времени во всей оболочке внутренними источниками тепла $Q^{(m)}$, причем $Q_V \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так как стремится к нулю объем оболочки. Мощность же притока (оттока) тепла Q_*, привносимого в конструкцию в данный момент времени за счет тепловых потоков $Q^{(\pm)}$, согласно (58), в общем случае не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поэтому тепловые потоки $Q^{(\pm)}$, заданные на лицевых поверхностях, оказывают асимптотически большее влияние на температуру, чем внутренние источники тепла.

Если в каждой точке каждого слоя оболочки одна из главных осей анизотропии совпадает с направлением x_3, то $k_{31}^{(m)} = k_{32}^{(m)} = 0$, $\beta_{31}^{(m)} = \beta_{32}^{(m)} = 0$, $1 \leq m \leq M$ (такими свойствами обладают, например, оболочки, слои которых имеют постоянную толщину и армированы по поверхностям, эквидистантным отсчетной поверхности $x_3 = 0$). В этом случае при термоизоляции лицевых поверхностей ($Q^{(\pm)} = 0$), наличии внутренних источников тепла ($Q^{(m)} \neq 0$) и ненулевом начальном условии (36) из (49) (при $s = 3$), (32) и (44) (при $s = 2$) получаем

$$F_{k001}^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv F_{k002}^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv 0, \quad W_{k002}^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv 0, \quad 1 \leq m \leq M, \quad k \geq 0. \tag{59}$$

Следовательно, при $k_{31}^{(m)} = k_{32}^{(m)} = 0$, $\beta_{31}^{(m)} = \beta_{32}^{(m)} = 0$ и $Q^{(\pm)} = 0$ из (19), (27), (31), (48) (при $s = 3$), (59) вытекает, что с точностью $O(\varepsilon^2)$ температуру можно считать постоянной по толщине оболочки за пределами пограничного слоя даже в случае неоднородности материалов слоев по толщине ($\partial_3 k_{ij}^{(m)} \neq 0$, $\partial_3 \beta_{ij}^{(m)} \neq 0$).

Если лицевые поверхности не термоизолированы ($Q^{(\pm)} \neq 0$), а внутренние источники тепла отсутствуют ($Q^{(m)} = 0$), то функция $T_{k003}^{(m)}$ при $k_{31}^{(m)} = k_{32}^{(m)} = 0$ $(1 \leq m \leq M)$ в силу (44), (48), (49), (32) имеет квадратичное распределение по толщине слоев, поэтому из (19) следует, что в линейном случае (при отсутствии термочувствительности, т.е. $\beta_{ij}^{(m)} \equiv 0$, $C_*^{(m)} \equiv 0$) с точностью $O(\varepsilon^3)$ распределение температуры за пределами пограничного слоя по толщине слоев оболочки можно задавать по квадратичному закону (и по кусочно-квадратичному закону по толщине слоистой оболочки в целом).

Используя разложение (19) и равенства (27), (31), (32), (48), (49) при $s = 3$, можно утверждать, что в случае слоистой пластины, материалы слоев которой однородны по толщине ($\partial_3 k_{nl}^{(m)} \equiv 0$, $k_{3l}^{(m)} \neq 0$, $n, l = \overline{1, 3}$, $1 \leq m \leq M$), при задании только тепловых потоков на лицевых поверхностях за пределами пограничного слоя, возникающего в окрестности кромок, в рамках линейной постановки задачи теплопроводности с асимптотической точностью $O(\varepsilon)$ температура распределена по толщине каждого слоя по линейному закону и кусочно-линейно распределена по толщине всего пакета (при этом в разложении (19) следует ограничиться двумя первыми слагаемыми). Из тех же соотношений вытекает, что в этом же случае с точностью $O(\varepsilon^2)$ температура по толщине каждого слоя распределена по квадратичному закону и по кусочно-квадратичному закону по толщине всей слоистой пластины (при этом в разложении (19) нужно удержать три слагаемых). Этот вывод в общем случае не относится к оболочкам, так как для них, согласно (2), $\partial_3 k_{nl}^{(m)} \neq 0$, $n, l = \overline{1, 3}$.

Если на обеих лицевых поверхностях оболочки (пластины) имеет место конвективный теплообмен ($\beta^{(\pm)}=1$, $\delta^{(\pm)}=A_1A_2$, см. (2), (6)) с малыми числами Био $\alpha_{(\pm)}$ и эти числа имеют значения порядка ε ($\alpha_{(\pm)}$ ε), то в силу разложений (10), (11), (19) получим асимптотические свойства основного температурного поля, аналогичные тем, что приведены выше для случая граничных условий II-го рода на лицевых поверхностях (как уже отмечалось, случаи больших и средних чисел Био $\alpha_{(\pm)}$ на лицевых поверхностях были рассмотрены в работе [17].)

Вопрос о сходимости асимптотических рядов (10), (11), (19) пока еще не решен. Изучение этой сложной проблемы является предметом самостоятельного исследования. Здесь же можно отметить, что асимптотика, построенная в работе [17], приводит к единственному известному автору аналитическому решению нелинейной задачи теплопроводности для слоистого пакета, в котором материалы слоев однородны и изотропны [25].

Заключение

Полученное внешнее разложение (по четырем малым параметрам) решения нелинейной задачи теплопроводности позволяет с любой наперед заданной асимптотической точностью определить приближенное распределение основного температурного поля в тонкостенной слоистой анизотропной неоднородной конструкции при учете термочувствительности материалов ее слоев и задании граничных условий II-го или III-го рода с малыми числами Био на лицевых поверхностях. Построенное асимптотическое разложение температуры позволило на каждой итерации свести исходную задачу трехмерной нестационарной теплопроводности к более простой двумерной начально-краевой задаче.

Построенные решения могут быть использованы, например, при расчетах механического поведения композитных тонкостенных элементов конструкций в условиях ползучести, когда рассматриваются достаточно большие временные интервалы (значение характерного времени $\overline{t}_*$ достаточно велико, см. (2)), на которых ярко выраженные начальные пространственные нестационарные эффекты считаются уже затухшими. Более того, именно реономные характеристики материалов слоев наиболее существенно зависят от температуры [6, 30], что приводит к необходимости получения как можно более точного распределения температурных полей в таких конструкциях, для чего и требуется учет термочувствительности не только их механических, но и теплофизических свойств.

Практическую значимость полученного решения задачи теплопроводности можно обосновать еще и тем, что в инженерной практике, как правило, используются приближенные теории деформирования оболочек и пластин (основанные на упрощающих гипотезах Кирхгофа–Лява, Тимошенко–Рейсснера и др. [9–11]), которые дают приемлемую точность лишь на некотором удалении от кромок тонкостенных конструкций, т.е. за пределами локальных кромочных эффектов, распространяющихся в глубину конструкции на расстояние порядка ее толщины [11, 13]. В рамках таких теорий требуется знание лишь основного температурного поля в конструкции без уточнения его особенностей в пограничных слоях, что и было получено в настоящей работе.

Список литературы

1. **Карташов Э.М., Кудинов В.А.** Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 656 с.
2. **Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А.** Пространственно-армированные композиционные материалы: справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
3. **Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R.** A new generation of 3D woven fabric performs and composites // SAMPE J. 2001. Vol. 37, No. 3. P. 3–17.
4. **Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M.** Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // Mechanics of Composite Materials. 2009. Vol. 45, No. 2. P. 241–254.

5. **Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С.** Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.
6. **Работнов Ю.Н., Милейко С.Т.** Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 224 с.
7. **Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.** Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 336 с.
8. **Бакулин В.Н., Каледин В.О., Каледина Л.Н., Рассоха А.А.** Численный анализ температурных полей в слоистых анизотропных оболочках // Математические методы и физико-механические поля. 1991. Вып. 33. С. 98–101.
9. **Амбарцумян С.А.** Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
10. **Пикуль В.В.** Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 536 с.
11. **Карпов В.В.** Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2-х ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 288 с.
12. **Бабин А.И., Немировский Ю.В.** Нестационарная теплопроводность в многослойных анизотропных оболочках вращения // Математические методы и физико-механические поля. 1992. Вып. 35. С. 104–114.
13. **Агаловян Л.А.** Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Физматлит, 1997. 414 с.
14. **Горынин Г.Л., Немировский Ю.В.** Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. Новосибирск: Наука, 2004. 409 с.
15. **Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Manevich L.I.** Asymptotical mechanics of thin-walled structures: a handbook. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 535 p.
16. **Киселев В.В., Долгих Д.В.** Нелинейно-упругие узоры из вмятин на поверхностях нагруженных пластин и оболочек. М.: Физматлит, 2012. 164 с.
17. **Янковский А.П.** Асимптотический анализ решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек при смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях // Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86, № 6. С. 1263–1273.
18. **Янковский А.П.** Асимптотический анализ решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек при граничных условиях первого рода на лицевых поверхностях // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2014. № 1 (34). С. 168–185.
19. **Алимов М.М.** Асимптотическое решение задачи о теплообмене пластины с безграничным и равномерным потоком жидкости // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 1. С. 86–93.
20. **Зино Е.И., Тропп Э.А.** Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
21. **Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.** Методы возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
22. **Найфэ А.Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
23. **Митрофанова О.В.** Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков в каналах ядерно-энергетических установок. М.: Физматлит, 2010. 288 с.
24. **Беляев Н.М., Рядно А.А.** Методы теории теплопроводности: учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. М.: Высшая школа, 1982. Ч. 1. 327 с.
25. **Кудинов В.А., Кудинов И.В.** Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / Под ред. Э.М. Карташова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 280 с.
26. **Физические** свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике. Справочник. М. Л.: Энергия, 1967. 240 с.
27. **Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М. и др.** Теплотехника: учеб. для вузов. 4-е изд., испр. М.: Высш. шк., 2003. 671 с.
28. **Гуров К.П.** Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. М.: Наука, 1978. 128 с.
29. **Выгодский М.Я.** Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1977. 872 с.
30. **Работнов Ю.Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Физматгиз, 1966. 752 с.

Статья поступила в редакцию 16 февраля 2015 г.,
после доработки — 19 ноября 2015 г.