

УДК 532.582

## **О колебательном движении твердого тела в жидкости**

**В.Л. Сеницкий**

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,  
Новосибирск*

E-mail: igil@hydro.nsc.ru

Получены точные решения двух задач о вращательных колебаниях твердого тела в идеальной жидкости в присутствии поля тяжести.

**Ключевые слова:** жидкость, твердое тело, колебания, перераспределение массы тела.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Колебательные явления в гидромеханических системах составляют предмет исследования обширного направления современной науки. К этим явлениям относятся, в частности, колебательное движение твердых тел в жидкости (газе). Встречаясь почти повсеместно, такое движение проявляется значительным разнообразием форм — примерами могут служить колебания подводных аппаратов, буев, айсбергов, листьев растений, ресничек микроорганизмов [1] и т. д. В связи с этим представляет интерес изучение гидромеханических задач, которыми тем или иным образом моделируется то, что реально происходит или может происходить при колебательном движении твердых тел в жидкости.

В работе [2] рассмотрена задача о течении вязкой жидкости вокруг твердого шара, совершающего заданные поступательные колебания, получено приближенное решение задачи, определено силовое воздействие жидкости на шар.

В настоящей работе рассмотрены две задачи о вращательных колебаниях твердого тела в идеальной жидкости в присутствии поля тяжести; найдены точные решения задач, обнаружен, в частности, новый гидромеханический эффект, состоящий в том, что перераспределение массы тела (по занимаемой им области пространства) приводит к изменению положения равновесия (около которого совершаются его колебания) с сохранением неизменной циклической частоты колебаний тела.

### **1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ**

Обратимся к первой и второй задачам.

В идеальной несжимаемой неограниченной извне жидкости находится твердое тело: в задаче 1 — бесконечно длинный круговой цилиндр  $Q_1$  постоянного радиуса  $A_1$ , в задаче 2 — шар  $Q_2$  постоянного радиуса  $A_2$  (см. рис. 1). Имеется

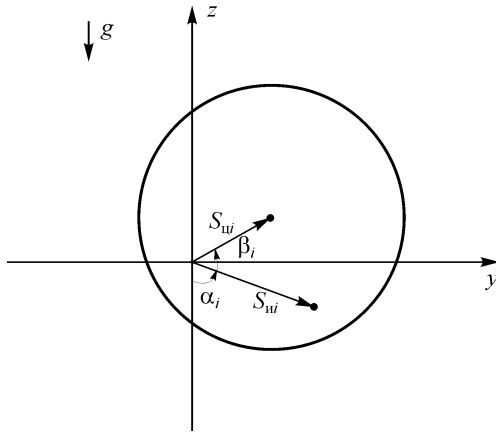


Рис. 1. Гидромеханическая система (жидкость и твердое тело), поле тяжести и система координат в плоскости  $x = 0$ .

постоянное поле тяжести. В начальный момент времени  $t$ , при  $t = 0$ , жидкость и тело покоятся относительно прямоугольной системы координат  $x, y, z$ ; ось цилиндра  $Q_1$  параллельна оси  $x$ , центр шара  $Q_2$  лежит в плоскости  $x = 0$ . При  $t > 0$  тело совершает вращательные коле-

бания вокруг проходящей через него оси, расположенной на оси  $x$ , течение жидкости является потенциальным, в задаче 1 — также плоским (плоскости течения перпендикулярны к оси  $x$ ). Требуется установить, как движется тело.

Пусть  $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$  — радиус-вектор точки  $(x, y, z)$  пространства,  $q_1$  — часть тела  $Q_1$  длины  $l$  — круговой цилиндр радиуса  $A_1$  с основаниями, находящимися в плоскостях  $x = l/2$  и  $x = -l/2$ ,  $\Gamma_1$  — боковая граница тела  $q_1$ ,  $\Gamma_2$  — граница тела  $Q_2$ ,  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  — единичные внешние нормали к границам  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ,  $\mathbf{S}_{ш1} \neq 0$  — радиус-вектор точки  $O_{ш1}$  пересечения оси тела  $Q_1$  с плоскостью  $x = 0$ ,  $\mathbf{S}_{ш2} \neq 0$  — радиус-вектор центра  $O_{ш2}$  тела  $Q_2$ ,  $m_1 > 0$  и  $m_2 > 0$  — массы тел  $q_1$  и  $Q_2$ ,  $\mathbf{S}_{ш1} + \mathbf{S}'_{ш1}$  и  $\mathbf{S}_{ш2} + \mathbf{S}'_{ш2}$  — радиусы-векторы центров инерции тел  $q_1$  и  $Q_2$  (векторы  $\mathbf{S}_{ш1}$ ,  $\mathbf{S}_{ш2}$  отличны от нуля и лежат в плоскости  $x = 0$ , каждый из векторов  $\mathbf{S}'_{ш1}$ ,  $\mathbf{S}'_{ш2}$  либо равен нулю, либо параллелен оси  $x$ ),  $\mathbf{e}_x = \{1, 0, 0\}$ ,  $\mathbf{e}_z = \{0, 0, 1\}$ ,  $\alpha_i$  — угол между вектором  $-\mathbf{e}_z$  и вектором  $\mathbf{S}_{шi}$  ( $i = 1, 2$ ),  $\alpha_{шi}$  — значение угла  $\alpha_i$  при  $t = 0$  ( $i = 1, 2$ ),  $\Omega_i$  — угловая скорость вращения тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\beta_i$  — угол между векторами  $\mathbf{S}_{шi}$  и  $\mathbf{S}_{шi}$  ( $i = 1, 2$ ),  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$  ( $g > 0$ ) — ускорение свободного падения,  $I_1, I_2$  и  $L_1, L_2$  — моменты инерции и моменты импульса тел  $q_1$  и  $Q_2$  относительно оси  $x$ ,  $\mathbf{F}_{ж1}$  и  $\mathbf{F}_{ж2}$  — силы, действующие со стороны жидкости на тела  $q_1$  и  $Q_2$ ,  $\mathbf{F}_{т1}$  и  $\mathbf{F}_{т2}$  — силы тяжести, действующие на тела  $q_1$  и  $Q_2$ ,  $M_{ж1}$  и  $M_{ж2}$  — моменты сил, действующие со стороны жидкости на тела  $q_1$  и  $Q_2$  относительно оси  $x$ ,  $M_{т1}$  и  $M_{т2}$  — моменты сил тяжести, действующие на тела  $q_1$  и  $Q_2$  относительно оси  $x$ ,  $\rho_{ж}$  — плотность жидкости,  $f_i$  — функция времени  $t$  ( $i = 1, 2$ ),  $\Phi_1$  и  $P_1$  — потенциал скорости жидкости и давление в жидкости в задаче 1,  $\Phi_2$  и  $P_2$  — потенциал скорости жидкости и давление в жидкости в задаче 2.

Величины  $\Omega_i, L_i, \mathbf{F}_{жи}, \mathbf{F}_{ти}, M_{жи}, M_{ти}$  ( $i = 1, 2$ ) выражаются формулами:

$$\Omega_i = \frac{d\alpha_i}{dt} \mathbf{e}_x, \quad L_i = I_i \frac{d\alpha_i}{dt},$$

$$\mathbf{F}_{\text{жи}} = -\iint_{\Gamma_i} P_i \mathbf{n}_i d\Gamma_i, \quad \mathbf{F}_{\text{ти}} = m_i \mathbf{g},$$

$$M_{\text{жи}} = [\mathbf{S}_{\text{и1}} \times \mathbf{F}_{\text{жи}}] \mathbf{e}_x, \quad M_{\text{ти}} = [\mathbf{S}_{\text{и1}} \times \mathbf{F}_{\text{ти}}] \mathbf{e}_x.$$

Положение тела  $Q_i$  определяется углом  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) (любые положения тела  $Q_i$ , которые характеризуются значениями  $\alpha_i$ , различающимися на  $2n_i\pi$  ( $i = 1, 2$ ,  $n_i = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), являются одинаковыми).

Уравнение для момента импульса абсолютно твердого тела и моментов действующих на него сил (относительно оси  $x$ ), интеграл Коши–Лагранжа, уравнение неразрывности и условия, которые должны выполняться на границе тела и на бесконечности (от тела), в задаче 1 (при  $i = 1$ ) и в задаче 2 (при  $i = 2$ ) имеют следующий вид:

$$dL_i/dt = M_{\text{жи}} + M_{\text{ти}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_i)^2 + \frac{P_i}{\rho_{\text{ж}}} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = f_i, \quad (2)$$

$$\Delta \Phi_i = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{n}_i \cdot \nabla \Phi_i = \mathbf{n}_i [\boldsymbol{\Omega}_i \times \mathbf{S}_{\text{и1}}] \quad \text{на } \Gamma_i, \quad (4)$$

$$\nabla \Phi_i \rightarrow 0 \quad \text{при } \mathbf{R}^2 + (i-2)x^2 \rightarrow \infty. \quad (5)$$

В начальный момент времени в задачах 1 и 2 должны выполняться, соответственно, условия

$$\alpha_1 = \alpha_{\text{н1}}, \quad d\alpha_1/dt = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \Phi_1 = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (7)$$

и

$$\alpha_2 = \alpha_{\text{н2}}, \quad d\alpha_2/dt = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (8)$$

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

2.1. Положим  $i = 1$ . Согласно (3)–(5), (7),

$$\Phi_1 = -\frac{A_1^2 [\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{S}_{\text{и1}}] \mathbf{R}}{[y - B_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1)]^2 + [z + B_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1)]^2}, \quad (9)$$

где  $B_1 = |\mathbf{S}_{\text{и1}}|$ .

Положим  $i = 2$ . Согласно (3)–(5),

$$\Phi_2 = -\frac{A_2^3 [\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{S}_{\text{и2}}] \mathbf{R}}{2 \{x^2 + [y - B_2 \sin(\alpha_2 + \beta_2)]^2 + [z + B_2 \cos(\alpha_2 + \beta_2)]^2\}^{3/2}}, \quad (10)$$

где  $B_2 = |\mathbf{S}_{\text{и2}}|$ .

Используя (1), (2), (9), (10), получим

$$\frac{d^2 \alpha_i}{dt^2} = -\lambda_i \frac{g}{B_i} [(\kappa_i - \cos \beta_i) \sin \alpha_i - \sin \beta_i \cos \alpha_i] \quad (i = 1, 2), \quad (11)$$

где

$$\kappa_1 = \frac{m_1 C_1}{\pi A_1^2 l B_1 \rho_{ж}}, \quad (12)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + \frac{I_1}{\pi A_1^2 l B_1^2 \rho_{ж}}}, \quad (13)$$

$$\kappa_2 = \frac{m_2 C_2}{(4\pi/3) A_2^3 B_2 \rho_{ж}}, \quad (14)$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{1 + \frac{I_2}{(2\pi/3) A_2^3 B_2^2 \rho_{ж}}}, \quad (15)$$

$$C_i = |\mathbf{S}_{ни}| \quad (i = 1, 2).$$

2.2. Обратимся к задачам (6), (11) для  $i = 1$  и (8), (11) для  $i = 2$ .

При совместном выполнении соотношений  $\beta_i = 0$ ,  $\kappa_i = 1$  тело  $Q_i$  пребывает в состоянии безразличного равновесия для любого значения  $\alpha_{ни}$  ( $i = 1, 2$ ). Будем полагать далее, что указанные соотношения совместно не выполняются.

Представим уравнения (11) в виде

$$d^2 \alpha_i / dt^2 = -\omega_i^2 \sin(\alpha_i - \chi_i) \quad (i = 1, 2). \quad (16)$$

Здесь

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i \frac{g}{B_i} \sqrt{\kappa_i^2 - 2\kappa_i \cos \beta_i + 1}} \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

$$\chi_i = \arccos \frac{\kappa_i - \cos \beta_i}{\sqrt{\kappa_i^2 - 2\kappa_i \cos \beta_i + 1}} \quad (i = 1, 2). \quad (18)$$

Согласно (6), (8), (16), тело  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) может находиться в состоянии равновесия. Положения равновесия тела  $Q_i$  определяются следующими значениями  $\alpha_{pi}$  угла  $\alpha_i$ :

$$\alpha_{pi} = \chi_i \quad (i = 1, 2), \quad (19)$$

$$\alpha_{pi} = \chi_i + \pi \quad (i = 1, 2). \quad (20)$$

Равновесие тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) в положении (20), является неустойчивым. Будем изучать далее движение тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) около положения (19).

Уравнения (16) не содержат независимую переменную  $t$ . Ввиду этого [3], в соответствии с (6), (8), (16), имеем

$$d\alpha_i / dt = \pm \sqrt{2} \omega_i \sqrt{\cos(\alpha_i - \alpha_{pi}) - \cos(\alpha_{ни} - \alpha_{pi})} \quad (i = 1, 2). \quad (21)$$

Подчиним значения  $\alpha_{ни}$ ,  $\beta_i$  условиям

$$\alpha_{pi} < \alpha_{hi} < \alpha_{pi} + \pi, \quad 0 \leq \beta_i \leq \pi \quad (i=1, 2),$$

(не приводящим к уменьшению общности данного рассмотрения).

Уравнениями (21) демонстрируется, что тело  $Q_i$  совершает колебания около положения, соответствующего  $\alpha_i = \alpha_{pi}$  ( $i = 1, 2$ ), значения  $\alpha_i$  удовлетворяют условию

$$|\alpha_i - \alpha_{pi}| \leq \alpha_{hi} - \alpha_{pi}, \quad i=1, 2,$$

период  $T_i$  колебаний тела  $Q_i$  составляет время, за которое тело  $Q_i$  перемещается из положения, соответствующего  $\alpha_i = \alpha_{hi}$ , в положение, соответствующее  $\alpha_i = 2\alpha_{pi} - \alpha_{hi}$  (в (21) реализуется знак минус), и затем — из положения, соответствующего  $\alpha_i = 2\alpha_{pi} - \alpha_{hi}$ , в положение, соответствующее  $\alpha_i = \alpha_{hi}$  (в (21) реализуется знак плюс):

$$T_i = \frac{2}{\omega_i} \int_{\alpha_{pi}}^{\alpha_{hi}} \frac{d\alpha_i}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha_{hi} - \alpha_{pi}}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_i - \alpha_{pi}}{2}}} = \frac{4}{\omega_i} F\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\alpha_{hi} - \alpha_{pi}}{2}\right) \quad (i=1, 2), \quad (22)$$

где  $F$  — эллиптический интеграл 1-го рода.

Использование (6), (8), (21), (22) позволяет получить соотношения

$$t = \left(N - \frac{1}{2}\right) \frac{T_i}{2} + \frac{(-1)^N}{2\omega_i} \int_{\alpha_{pi}}^{\alpha_i} \frac{d\alpha_i}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha_{hi} - \alpha_{pi}}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_i - \alpha_{pi}}{2}}} =$$

$$= \left(N - \frac{1}{2}\right) \frac{T_i}{2} + \frac{(-1)^N}{\omega_i} F\left(\arcsin \frac{\sin \frac{\alpha_i - \alpha_{pi}}{2}}{\sin \frac{\alpha_{hi} - \alpha_{pi}}{2}}, \sin \frac{\alpha_{hi} - \alpha_{pi}}{2}\right) \quad (i=1, 2), \quad (23)$$

где  $N = 1, 2, \dots$  — номер полупериода колебаний тела  $Q_i$ , в пределах которого происходит изменение  $t$ :

$$(N-1) \frac{T_i}{2} \leq t \leq N \frac{T_i}{2} \quad (i=1, 2).$$

Формулами (2), (9), (10), (17)–(19), (22), (23) определяются точные решения задач 1 и 2.

### 3. ТИПЫ (РЕЖИМЫ) КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА

3.1. Пусть  $\Xi$  — плоскость  $z = 0$  (горизонтальная плоскость, проходящая через ось вращения тела  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$ ),  $\hat{\kappa}_i = \cos \beta_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Рассмотрим соотношения (18), (19). Из них, в частности, следует, что:

– если

$$\pi/2 \leq \beta_i \leq \pi, \quad (24)$$

то

$$0 \leq \alpha_{pi} < \pi/2, \quad (i=1, 2), \quad (25)$$

в положениях равновесия тел  $q_1, Q_2$  их центры инерции находятся под плоскостью  $\Xi$ ;

– если

$$\beta_i = 0 \quad (\kappa_i \neq 1), \quad (26)$$

то

$$\alpha_{pi} = 0 \quad \text{при } \kappa_i > 1, \quad \alpha_{pi} = \pi \quad \text{при } \kappa_i < 1 \quad (i = 1, 2), \quad (27)$$

в положении равновесия тел  $q_1, Q_2$  их центры инерции находятся, соответственно, под плоскостью или над плоскостью  $\Xi$ ;

– если

$$0 < \beta_i < \pi/2, \quad (28)$$

то

$$0 < \alpha_{pi} < \pi/2 \quad \text{при } \kappa_i > \hat{\kappa}_i,$$

$$\alpha_{pi} = \pi/2 \quad \text{при } \kappa_i = \hat{\kappa}_i,$$

$$\pi/2 < \alpha_{pi} < \pi \quad \text{при } \kappa_i < \hat{\kappa}_i \quad (i = 1, 2), \quad (29)$$

в положениях равновесия тел  $q_1, Q_2$  их центры инерции находятся, соответственно, под плоскостью, в плоскости или над плоскостью  $\Xi$ .

Таким образом, при выполнении условий (24), (26) или (28) для тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) могут реализовываться, соответственно, один, два или три типа колебаний, представленных формулами (25), (27) или (29).

Отметим, что, согласно (12), (14), (18), (19),

$$\alpha_{pi} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho_{ж} \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2).$$

Это означает, что в отсутствие жидкости для тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) может реализовываться только один тип колебаний.

3.2. Положим, что тело  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) таково, что выполняется условие (28).

Тогда для каждого значения

$$\kappa_i = \kappa_{-i} > \hat{\kappa}_i,$$

которым задается значение

$$0 < \alpha_{pi} = \alpha_{-pi} < \pi/2,$$

найдется значение

$$\kappa_i = \kappa_{+i} < \hat{\kappa}_i,$$

которым задается значение

$$\pi/2 < \alpha_{pi} = \alpha_{+pi} < \pi,$$

где

$$\alpha_{+pi} = \pi - \alpha_{-pi} \quad (i = 1, 2).$$

Колебания тела  $Q_i$  около положений равновесия, соответствующих

$$\alpha_{pi} = \alpha_{-pi} \quad \text{и} \quad \alpha_{pi} = \alpha_{+pi} \quad (i = 1, 2),$$

могут характеризоваться как симметричные (по отношению к “нейтральным” колебаниям тела  $Q_i$  около положения равновесия, соответствующего  $\alpha_{pi} = \pi/2$ ,  $i = 1, 2$ ).

Из (17)–(19), (28) следует, что

$$\kappa_{-i} = \frac{\sin(\alpha_{-pi} + \beta_i)}{\sin \alpha_{-pi}}, \quad \kappa_{+i} = \frac{\sin(\alpha_{+pi} + \beta_i)}{\sin \alpha_{+pi}} = \frac{\sin(\alpha_{-pi} - \beta_i)}{\sin \alpha_{-pi}} \quad (i = 1, 2), \quad (30)$$

$$\omega_{-i} = \sqrt{\lambda_{-i} \frac{g}{B_i} \frac{\sin \beta_i}{\sin \alpha_{-pi}}}, \quad \omega_{+i} = \sqrt{\lambda_{+i} \frac{g}{B_i} \frac{\sin \beta_i}{\sin \alpha_{-pi}}} \quad (i = 1, 2). \quad (31)$$

Здесь  $\lambda_{-i}$ ,  $\lambda_{+i}$ ,  $\omega_{-i}$ ,  $\omega_{+i}$  — значения  $\lambda_i$ ,  $\omega_i$  для симметричных колебаний тела  $Q_i$  соответственно ( $i = 1, 2$ ).

Отметим, что:

– если тело  $Q_i$  таково, что выполняется условие (26), то его колебания формально могут быть отнесены к симметричным, однако при этом являются нереализуемыми “нейтральные” колебания тела  $Q_i$  и отсутствует связь между значениями  $\kappa_i$ , для которых

$$\alpha_{pi} = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_{pi} = \pi \quad (i = 1, 2);$$

– если жидкость отсутствует, то осуществление симметричных колебаний тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) невозможно.

3.3. Формулы (12)–(15), (17)–(19), а также (30), (31) указывают на то, что перераспределение массы тела  $Q_i$  (при постоянных  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $m_i$ ,  $\beta_i$ ) может приводить к изменению положения равновесия, около которого происходят колебания тела  $Q_i$ , с сохранением неизменной циклической частоты  $\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ), а также — наоборот, может приводить к изменению циклической частоты  $\omega_i$  с сохранением неизменным положения равновесия, около которого происходят колебания тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Отметим, что перераспределение массы тела  $Q_i$  может производиться при посредстве сил, внутренних по отношению к нему, т. е. сил, действующих на части тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) со стороны других его частей.

Обратимся к следующему построению.

Пусть  $O_{mi}$  — точка тела  $Q_i$ , радиусом-вектором которой является вектор

$$\mathbf{S}_i = S_i \frac{\mathbf{S}_{mi}}{C_i} \quad (i = 1, 2),$$

где  $S_i = |\mathbf{S}_i|$ . Положим, что масса каждого из тел  $q_1$ ,  $Q_2$  представлена в виде двух частей — массы  $m_{oi}$  и массы  $m_i - m_{oi}$ , находящихся, соответственно, в начале координат и в точке  $O_{mi}$  ( $i = 1, 2$ ) (для каждого из тел  $q_1$ ,  $Q_2$  такая внутренняя структура может быть как изначальной, так и полученной в результате предварительного перераспределения массы).

3.3.1. Будем рассматривать изменения  $m_{oi}$  и  $S_i$ , которые вызывают изменения  $\kappa_i$  и сохраняют неизменной  $\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ).

3.3.1.1. Используя (12)–(15), (17), найдем:

$$\kappa_1 = \frac{(m_1 - m_{o1})s_1}{\pi A_1^2 l \rho_{ж}}, \quad \kappa_2 = \frac{(m_2 - m_{o2})S_2}{(4\pi/3)A_2^3 \rho_{ж}},$$

$$\lambda_i = \frac{i}{1 + i\kappa_i s_i} \quad (i = 1, 2); \quad (32)$$

$$s_i = \frac{1}{i\kappa_i} \left( -1 + i \frac{g}{B_i \omega_i^2} \sqrt{\kappa_i^2 - 2\kappa_i \cos \beta_i + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{i\kappa_i} \left[ -1 + (1 + i\kappa_{ди} s_{ди}) \sqrt{\frac{\kappa_i^2 - 2\kappa_i \cos \beta_i + 1}{\kappa_{ди}^2 - 2\kappa_{ди} \cos \beta_i + 1}} \right] \quad (i = 1, 2), \quad (33)$$

где  $s_i = S_i/B_i$ ,  $s_{ди}$  и  $\kappa_{ди}$  — значения  $s_i$  и  $\kappa_i$  до перераспределения массы соответственно.

Формулами (33) определяется зависимость  $s_i$  от  $\kappa_i$ , являющаяся выражением постоянства  $\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ). Выполнение (33) означает, что изменение  $\kappa_i$ , сопровождающееся (при  $\beta_i \neq \pi$ ) изменением  $\alpha_{pi}$ , не вызывает изменения  $\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Таким образом, имеет место эффект, состоящий в том, что тело  $Q_i$ , которое до перераспределения массы совершает колебания около положения равновесия, соответствующего  $\alpha_{pi} = \alpha_{дри}$ , с циклической частотой  $\omega_{ди}$ , после перераспределения массы совершает колебания около положения равновесия, соответствующего  $\alpha_{pi} = \alpha_{при} = \alpha_{дри}$ , с циклической частотой  $\omega_{пи} = \omega_{ди}$  ( $i = 1, 2$ ).

Отметим, что если жидкость отсутствует, то осуществление данного эффекта невозможно.

3.3.1.2. Остановимся на симметричных колебаниях тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Из (31), (32) следует, что

$$\omega_{-i} = \omega_{+i}, \quad (34)$$

если

$$\kappa_{-i} s_{-i} = \kappa_{+i} s_{+i} \quad (i = 1, 2). \quad (35)$$

Здесь  $s_{-i}$ ,  $s_{+i}$  — значения  $s_i$  для симметричных колебаний тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Формулами (34), (35) демонстрируется, что обнаруженный в 3.3.1.1 эффект имеет место, в частности, для симметричных колебаний тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Отметим, что зависимость  $s_{-i}$  от  $\kappa_{-i}$  ( $s_{+i}$  от  $\kappa_{+i}$ ), задаваемая (35), значительно проще, чем зависимость  $s_i$  от  $\kappa_i$  ( $i = 1, 2$ ), задаваемая (33).

3.3.2. Согласно (17)–(19), (32), если  $\beta_i \neq \pi$ ,  $\kappa_i$  постоянна,  $\lambda_i$  изменяется (вследствие изменения  $s_i$ ), либо  $\beta_i = \pi$ ,  $\lambda_i$  изменяется (вследствие изменения  $\kappa_i$ ,  $s_i$ ), то происходит изменение  $\omega_i$  при сохранении постоянным  $\alpha_{pi}$  ( $i = 1, 2$ ).

Таким образом, имеет место эффект, обратный обнаруженному в 3.3.1.1.

#### 4. СИЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ТЕЛА НА ОСЬ ВРАЩЕНИЯ

Найдем силу  $\mathbf{F}_{01}$ , действующую со стороны тела  $q_1$  на ось вращения (тела  $q_1$ ), и силу  $\mathbf{F}_{02}$ , действующую со стороны тела  $Q_2$  на ось вращения (тела  $Q_2$ ).



4.1. Представим уравнения для импульсов тел  $q_1$  и  $Q_2$  и действующих на них сил в виде

$$\mathbf{F}_{oi} = -\left(d\mathbf{P}_i/dt\right) + \mathbf{F}_{жi} + \mathbf{F}_{тi} \quad (i=1, 2), \quad (36)$$

где

$$\mathbf{P}_1 = m_1 \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{S}_{и1} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}_2 = m_2 \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{S}_{и2}$$

— импульсы тела  $q_1$  и  $Q_2$  соответственно.

Используя (2), (9), (10), (12), (14), (36), получим

$$\mathbf{F}_{oi} = F_{oyi} \mathbf{e}_y + F_{ozi} \mathbf{e}_z + \mathbf{F}_{тvi} \quad (i=1, 2), \quad (37)$$

где  $\mathbf{e}_y = \{0, 1, 0\}$ ,

$$F_{oyi} = -m_i C_i \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d\alpha_i}{dt} \left[ \cos\alpha_i + \frac{1}{i\kappa_i} \cos(\alpha_i + \beta_i) \right] \right\} \quad (i=1, 2), \quad (38)$$

$$F_{ozi} = -m_i C_i \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d\alpha_i}{dt} \left[ \sin\alpha_i + \frac{1}{i\kappa_i} \sin(\alpha_i + \beta_i) \right] \right\} \quad (i=1, 2), \quad (39)$$

$$\mathbf{F}_{тv1} = (m_1 - \pi A_1^2 \rho_{ж}) \mathbf{g}, \quad \mathbf{F}_{тv2} = (m_2 - (4\pi/3) A_2^3 \rho_{ж}) \mathbf{g}.$$

Формулами (37) и (12), (14), (17)–(19), (22), (23) определяются силы  $\mathbf{F}_{o1}$  и  $\mathbf{F}_{o2}$ .

Отметим, что силы  $F_{oyi}$ ,  $F_{ozi}$  зависят, а силы  $\mathbf{F}_{тv1}$ ,  $\mathbf{F}_{тv2}$  не зависят от того, как движется тело  $Q_i$  ( $i=1, 2$ ).

4.2. Положим, что тело  $Q_i$  совершает малые колебания,

$$\delta_i = \alpha_{иi} - \alpha_{pi} \rightarrow 0 \quad (i=1, 2).$$

Обратимся к вопросу о динамическом силовом воздействии тела  $Q_i$  на ось вращения — воздействию, выражающемся силами  $F_{oyi}$  и  $F_{ozi}$  ( $i=1, 2$ ).

Согласно (22), (23), (38), (39), в линейном по  $\delta_i$  приближении,

$$\alpha_i = \alpha_{pi} + \delta_i \cos(2\pi t/T_i),$$

$$F_{oyi} = \hat{F}_{oyi} \cos(2\pi t/T_i), \quad F_{ozi} = \hat{F}_{ozi} \cos(2\pi t/T_i), \quad T_i = 2\pi/\omega_i \quad (i=1, 2),$$

где

$$\hat{F}_{oy1} = \delta_1 (\kappa_1 - \kappa_1^{-1}) \lambda_1 (C_1/B_1) m_1 g, \quad (40)$$

$$\hat{F}_{oy2} = \delta_2 (\kappa_2 - (1/2) \cos \beta_2 - (1/2) \kappa_2^{-1}) \lambda_2 (C_2/B_2) m_2 g, \quad (41)$$

$$\hat{F}_{ozi} = ((1+i)/i) \delta_i \lambda_i \sin \beta_i (C_i/B_i) m_i g \quad (i=1, 2). \quad (42)$$

4.2.1. Представим величины  $I_1$  и  $I_2$  в виде

$$I_i = m_i A_i^{*2} \quad (i=1, 2), \quad (43)$$

( $0 < A_i^* \leq A_i$ ).

Используя (40)–(43), получим:

$$\hat{F}_{oyi} \sim \delta_i (C_i^2 / A_i^{*2}) m_i g \quad \text{при } m_i \rightarrow \infty \quad (i = 1, 2), \quad (44)$$

$$\hat{F}_{oz1} \sim 2\pi\delta_1 \sin \beta_1 \frac{A_1^2 B_1 C_1}{A_1^{*2}} \rho_{ж} g \quad \text{при } m_1 \rightarrow \infty, \quad (45)$$

$$\hat{F}_{oz2} \sim 2\pi\delta_2 \sin \beta_2 \frac{A_2^3 B_2 C_2}{A_2^{*2}} \rho_{ж} g \quad \text{при } m_2 \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Формулы (44)–(46) демонстрируют, что при неограниченном возрастании массы  $m_i$  амплитуда  $\hat{F}_{oyi}$  силы  $F_{oyi}$  неограниченно возрастает, а амплитуда  $\hat{F}_{oz1}$  силы  $F_{oz1}$  ( $i = 1, 2$ ) стремится к конечному пределу.

4.2.2. Из (40)–(42) следует, что

$$\hat{F}_{oy1} = 0, \quad \text{если } \kappa_1 = 1 \quad (\beta_1 \neq 0),$$

$$\text{при этом } 0 \leq \alpha_{p1} < \pi/2, \quad (47)$$

$$\hat{F}_{oy2} = 0, \quad \text{если } 1/2 \leq \kappa_2 < 1, \quad \beta_2 = \arccos(2\kappa_2 - \kappa_2^{-1}),$$

$$\text{при этом } 0 \leq \alpha_{p2} < \pi/2, \quad (48)$$

$$\hat{F}_{oz1} = 0,$$

если

$$\beta_i = 0 \quad (\kappa_i \neq 1),$$

при этом  $\alpha_{pi} = 0$  (для  $\kappa_i > 1$ ),  $\alpha_{pi} = \pi$  (для  $\kappa_i < 1$ ),

либо

$$\beta_i = \pi,$$

$$\text{при этом } \alpha_{pi} = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (49)$$

$$\hat{F}_{oy1} = \hat{F}_{oz1} = 0, \quad \text{если } \kappa_1 = 1, \quad \beta_1 = \pi,$$

$$\text{при этом } \alpha_{p1} = 0, \quad (50)$$

$$\hat{F}_{oy2} = \hat{F}_{oz2} = 0, \quad \text{если } \kappa_2 = 1/2, \quad \beta_2 = \pi,$$

$$\text{при этом } \alpha_{p2} = 0. \quad (51)$$

Согласно (47)–(51), динамическое силовое воздействие тела  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) на ось вращения может быть нулевым как вдоль одной из осей  $y, z$ , так и вдоль обеих осей  $y, z$  совместно.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнение описанного в настоящей работе исследования, основанного на изучении двух сходных задач о колебаниях твердого тела в жидкости, привело к представляющим интерес результатам, важнейшие из которых характеризуются

отсутствием сколько-нибудь существенной зависимости от формы колеблющегося тела (что может служить указанием на их универсальность).

Содержательным моментом исследования является, в частности, установление того, что колебания тела в присутствии жидкости значительно (принципиально) более разнообразны, чем его колебания в отсутствие жидкости.

Получением формул для силового воздействия колеблющегося тела на ось вращения затрагивается важный вопрос об организации или предотвращении колебаний тела, в большей или в меньшей степени напряженных, опасных для оси вращения.

С обнаружением “эффекта перераспределения массы” открываются возможности управления колебаниями тела, течением жидкости, силовым воздействием тела на ось вращения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вилли К.** Биология. М.: Мир, 1968. 808 с.
2. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. 928 с.
3. **Матвеев Н. М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1963. 546 с.

*Статья поступила в редакцию 8 сентября 2008 г.*