

УДК 539.3

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ С ОСЕВОЙ И ОКРУЖНОЙ КОМПОНЕНТАМИ СКОРОСТИ

С. А. Бочкарев, В. П. Матвеев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь  
E-mails: bochkarev@icmm.ru, mvp@icmm.ru

Проведен анализ устойчивости упругой круговой цилиндрической оболочки вращения, взаимодействующей с потоком сжимаемой жидкости (газа), имеющим как осевую, так и тангенциальную составляющие. Поведение жидкости исследуется в рамках потенциальной теории. Для описания упругой оболочки используется классическая теория оболочек. Численное решение задачи проводится на основе полуаналитического варианта метода конечных элементов. Представлены результаты численных экспериментов, выполненных для оболочек с различными граничными условиями и геометрическими размерами. Оценено влияние вращения жидкости на критические скорости потока и осевого течения жидкости на критические угловые скорости ее вращения.

**Ключевые слова:** классическая теория оболочек, сжимаемая жидкость с осевой и окружной компонентами скорости, потенциальная теория, дивергенция, флаттер, метод конечных элементов.

**Введение.** Устойчивость упругих круговых цилиндрических оболочек вращения, взаимодействующих с потоком сжимаемого газа или жидкости, имеющим как осевую, так и тангенциальную составляющие скорости, исследовалась в незначительном количестве работ (см. [1–4]). В [1] в рамках линейной теории оболочек Сандерса анализируется распространение гармонических волн в тонкостенных круговых цилиндрических оболочках, выполненных из ортотропных или изотропных материалов. Уравнения движения для вращающейся жидкости записываются в форме уравнений Эйлера. Показано, что осевое течение жидкости оказывает более существенное влияние на собственные частоты колебаний оболочки с жидкостью по сравнению с вращением жидкости. Аналогичный подход использован в работе [2], в которой показано, что вращение жидкости приводит к более значительному уменьшению критической скорости осевого течения жидкости по сравнению с вариантом, когда вращение жидкости не учитывается. В [3, 4] рассмотрены цилиндрические оболочки, помещенные в кольцевой канал с жесткой наружной стенкой. В [3] приведены результаты численных расчетов для частного случая, когда оболочка обтекается закрученным кольцевым потоком, а осевая скорость потока принята равной нулю. Поведение цилиндрической оболочки описывается в рамках классической теории оболочек, а аэродинамические силы определены с помощью линеаризованной потенциальной теории. Показано, что при слиянии волн, распространяющихся в противоположных направлениях, может возникнуть потеря устойчивости в виде флаттера типа бегущей волны. В [4]

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00520).

© Бочкарев С. А., Матвеев В. П., 2012

представлены результаты расчетов для течения с двумя компонентами скорости, однако исследование взаимовлияния осевой и тангенциальной составляющих на устойчивость не проводилось. Некоторые результаты экспериментов, в которых в основном изучалось влияние закрученного кольцевого потока на устойчивость цилиндрической оболочки, приведены в [5, 6].

В работах [1–4] выполнены численно-аналитические исследования бесконечно длинных оболочек, поэтому влияние граничных условий на динамику таких систем осталось неизученным. В работе [7] представлены результаты численных исследований влияния различных граничных условий на устойчивость цилиндрической оболочки, содержащей только вращающуюся жидкость (осевая скорость жидкости не учитывалась). Как для бесконечных оболочек, так и для оболочек конечной длины совместное воздействие осевого течения жидкости и его вращения на область устойчивости также не исследовалось. Необходимо также изучение влияния на область устойчивости других факторов, например линейных размеров системы. В настоящей работе численно решена задача об устойчивости цилиндрических оболочек, содержащих жидкость с осевой и окружной компонентами скорости.

**1. Постановка задачи и основные соотношения.** Рассматривается упругая цилиндрическая оболочка длиной  $L$ , радиусом  $R$  и толщиной  $h$ . Внутри оболочки находится идеальная сжимаемая жидкость, которая течет с осевой скоростью  $U$  и одновременно вращается с угловой скоростью  $\Omega$ . Требуется найти такую осевую скорость жидкости, или угловую скорость вращения жидкости, или их комбинацию, при которой оболочка теряет устойчивость.

Для описания течения вращающейся жидкости в области  $V_f$  вводится в рассмотрение потенциал возмущения скорости  $\varphi$ , который в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, x)$  в случае малых возмущений описывается волновым уравнением [8]

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi = \frac{2\Omega}{c} \left( M \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial t} \right) + \frac{\Omega^2}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где  $c$  — скорость звука в жидкости;  $M = U/c$  — число Маха. На смоченной поверхности  $S_\sigma = S_f \cap S_s$  давление потока жидкости  $p$  на оболочку вычисляется по линеаризованной формуле Бернулли

$$p = -\rho_f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \Omega \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (2)$$

Здесь  $\rho_f$  — удельная плотность жидкости;  $s$  — меридиональная координата оболочки;  $S_f, S_s$  — поверхности, ограничивающие объемы жидкости и оболочки соответственно. На поверхности раздела оболочка — жидкость  $S_\sigma$  задается условие непроницаемости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial s} + \Omega \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности;  $w$  — нормальная составляющая вектора перемещений оболочки. Потенциал возмущения скорости на входе в оболочку и выходе из нее удовлетворяет граничным условиям

$$x = 0: \quad \varphi = 0, \quad x = L: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

С помощью метода Бубнова — Галеркина [9] уравнение в частных производных для потенциала возмущения скорости (1) с граничными условиями (3), (4) сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{m_f} \left\{ \int_{V_f} \left[ \frac{\partial F_l}{\partial r} \frac{\partial F_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_l}{\partial \theta} \frac{\partial F_k}{\partial \theta} + (1 - M^2) \frac{\partial F_l}{\partial x} \frac{\partial F_k}{\partial x} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2\Omega M}{c} \frac{\partial^2 F_l}{\partial x \partial \theta} F_k + \frac{\Omega^2}{c^2} \left( \frac{\partial^2 F_l}{\partial \theta^2} F_k - r \frac{\partial F_l}{\partial r} F_k \right) \right] dV \right\} \varphi_{al} + \\
& \quad + \sum_{l=1}^{m_f} \left[ \int_{V_f} \left( \frac{2U}{c^2} \frac{\partial F_l}{\partial x} F_k + \frac{2\Omega}{c^2} \frac{\partial F_l}{\partial \theta} F_k \right) dV \dot{\varphi}_{al} + \int_{V_f} \frac{F_l F_k}{c^2} dV \ddot{\varphi}_{al} \right] - \\
& \quad - \sum_{p=1}^{m_s} \left[ \int_{S_\sigma} \bar{N}_p F_k dS \dot{w}_{ap} + \int_{S_\sigma} \left( U \frac{\partial \bar{N}_p}{\partial s} F_k + \Omega \frac{\partial \bar{N}_p}{\partial \theta} F_k \right) dS w_{ap} \right] = 0, \quad k = 1, \dots, m_f. \quad (5)
\end{aligned}$$

Здесь  $m_f$ ,  $m_s$  — число конечных элементов, на которые разбиваются области жидкости  $V_f$  и оболочки  $V_s$ ;  $\varphi_{al}$ ,  $w_{ap}$  — узловые значения потенциала возмущения скорости жидкости и нормальных перемещений оболочки;  $F$ ,  $\bar{N}$  — функции формы для потенциала возмущения скорости и нормальной составляющей вектора перемещения оболочки соответственно.

Для оболочки приняты гипотезы Кирхгофа — Лява, согласно которым компоненты вектора деформации срединной поверхности, изменения кривизн и кручения в координатной системе  $(s, \theta, z)$  можно представить следующим образом [10]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s}, \\
\kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, & \kappa_2 &= \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), & \kappa_{12} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right).
\end{aligned}$$

Здесь  $u$ ,  $v$  — меридиональная и окружная составляющие вектора перемещений оболочки.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором обобщенных усилий и моментов  $\mathbf{T}$  и вектором обобщенных деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \kappa_1, \kappa_2, 2\kappa_{12}\}^T$ , представляются в матричном виде

$$\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T = D\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Для изотропного материала ненулевые компоненты матрицы жесткости  $D$  определяются через модуль упругости  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и модуль сдвига  $G$  следующим образом [10]:

$$\begin{aligned}
D_{12} = D_{21} = \nu D_{11} = \nu D_{22} &= \frac{\nu E h}{1 - \nu^2}, & D_{45} = D_{54} = \nu D_{44} = \nu D_{55} &= \frac{\nu E h^2}{12(1 - \nu^2)}, \\
D_{66} &= \frac{D_{33} h^2}{12} = \frac{G h^3}{12}.
\end{aligned}$$

При математической формулировке задачи используется принцип возможных перемещений, который в матричной форме имеет вид

$$\int_{S_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{T} dS + \int_{S_s} \delta \mathbf{d}^T \rho_0 \ddot{\mathbf{d}} dS - \int_{S_s} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P} dS = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{P}$  — векторы обобщенных перемещений и поверхностных нагрузок соответственно;  $\rho_0 = \int_h \rho_s dz$ ;  $\rho_s$  — удельная плотность материала оболочки.

**2. Численная реализация.** Для численной реализации используется полуаналитический вариант метода конечных элементов, основанный на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате  $\theta$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{u}_j \cos j\theta + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{u}_j \sin j\theta, & v &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{v}_j \sin j\theta - \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{v}_j \cos j\theta, \\ w &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{w}_j \cos j\theta + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{w}_j \sin j\theta, & \varphi_a &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\varphi}_j \cos j\theta + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_j \sin j\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $j$  — номер гармоники.

Выражая в (7) симметричные и антисимметричные неизвестные через узловые перемещения, для конечных элементов оболочки и жидкости получаем

$$\mathbf{U} = \{u, v, w\}^T = N \mathbf{d}_e = [\hat{N} \tilde{N}] \{\hat{\mathbf{d}}_e \tilde{\mathbf{d}}_e\}^T; \quad (8)$$

$$\varphi_a = F \varphi_e = [\hat{F} \tilde{F}] \{\hat{\varphi}_e \tilde{\varphi}_e\}^T. \quad (9)$$

Здесь  $N, F$  — матрицы функций формы;  $\mathbf{d}_e, \varphi_e$  — векторы узловых перемещений. Для оболочки используется конечный элемент в виде усеченного конуса с аппроксимацией меридиональной и окружной компонент вектора перемещений линейным полиномом, а нормальной компоненты — кубическим полиномом. Для жидкости используется треугольный конечный элемент с линейной аппроксимацией потенциала возмущения скорости.

С учетом (8) связь вектора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  с вектором узловых неизвестных оболочечного конечного элемента  $\mathbf{d}_e$  представляется в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = B \mathbf{d}_e. \quad (10)$$

Подставляя в уравнение (6) выражение для давления в форме (2) и используя стандартные процедуры метода конечных элементов, с учетом (8)–(10) получаем следующее матричное соотношение:

$$K_s \mathbf{d} + M_s \ddot{\mathbf{d}} + \rho_f (C_{sf} \dot{\varphi}_a + A_{sf} \varphi_a + A_{sf}^\omega \varphi_a) = 0. \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_s &= \sum_{m_s} \int_{S_s} B^T D B dS, & M_s &= \sum_{m_s} \int_{S_s} N^T \rho_0 N dS, & A_{sf}^\omega &= \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \Omega \bar{N}^T \frac{\partial F}{\partial \theta} dS, \\ A_{sf} &= \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} U \bar{N}^T \frac{\partial F}{\partial s} dS, & C_{sf} &= \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \bar{N}^T F dS. \end{aligned}$$

С учетом представлений (8), (9) запишем уравнение (5) в матричном виде

$$(K_f + K_f^\omega + A_f^c + A_f^{c\omega}) \varphi_a + M_f \ddot{\varphi}_a - (C_f^c + C_f^{c\omega}) \dot{\varphi}_a - C_{fs} \dot{\mathbf{w}}_a - (A_{fs} + A_{fs}^\omega) \mathbf{w}_a = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} K_f &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \left( \frac{\partial F^T}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F^T}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F^T}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} \right) dV, & M_f &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{F^T F}{c^2} dV, \\ K_f^\omega &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{\Omega^2}{c^2} \left( \frac{\partial^2 F^T}{\partial \theta^2} F - r \frac{\partial F^T}{\partial r} F \right) dV, & C_f^\omega &= - \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{2\Omega}{c^2} \frac{\partial F^T}{\partial \theta} F dV, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_f^c &= - \sum_{m_f} \int_{V_f} M^2 \frac{\partial F^T}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial s} dV, & A_f^\omega &= \sum_{m_f} \int_{V_f} 2\Omega \frac{M}{c} \frac{\partial^2 F^T}{\partial x \partial \theta} F dS, \\
C_f^c &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \frac{\partial F^T}{\partial x} F dV, & C_{fs} &= - \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} F^T \bar{N} dS, \\
A_{fs}^\omega &= \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \Omega \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial \theta} F dS, & A_{fs} &= - \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} U F^T \frac{\partial \bar{N}}{\partial s} dS.
\end{aligned}$$

Таким образом, исследование устойчивости оболочки, внутри которой течет вращающаяся жидкость, сводится к совместному решению двух систем уравнений (11) и (12). Объединенная система уравнений может быть записана следующим образом:

$$(K + A)\{\mathbf{d} \varphi_a\}^T + M\{\ddot{\mathbf{d}} \ddot{\varphi}_a\}^T + C\{\dot{\mathbf{d}} \dot{\varphi}_a\}^T = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & -\rho_f(K_f + K_f^\omega) \end{bmatrix}, & M &= \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & -\rho_f M_f \end{bmatrix}, \\
C &= \rho_f \begin{bmatrix} 0 & C_{sf} \\ C_{fs} & C_f^c + C_f^\omega \end{bmatrix}, & A &= \rho_f \begin{bmatrix} 0 & A_{sf} + A_{sf}^\omega \\ A_{fs} + A_{fs}^\omega & A_f^c + A_f^\omega \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Представляя выражения, описывающие возмущенное движение оболочки и жидкости, в виде

$$\mathbf{d} = \mathbf{q} \exp(i^* \lambda t), \quad \varphi_a = \varphi \exp(i^* \lambda t),$$

где  $\mathbf{q}$ ,  $\varphi$  — некоторые функции координат;  $i^* = \sqrt{-1}$ ;  $\lambda = \lambda_1 + i^* \lambda_2$  — характеристический показатель, окончательно получаем

$$(K - \lambda^2 M + i^* \lambda C + A)\{\mathbf{q} \varphi\}^T = 0. \quad (13)$$

Решение задачи сводится к вычислению и анализу собственных значений  $\lambda$  системы (13). Для вычисления комплексных собственных значений применяется алгоритм на основе метода Мюллера [11]. Для повышения вычислительной эффективности алгоритма используется перенумерация степеней свободы системы (13), основанная на обратном алгоритме Катхилла — Макки [12].

**3. Примеры численной реализации.** Рассматривается цилиндрическая оболочка ( $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,29$ ,  $\rho_s = 7812$  кг/м<sup>3</sup>,  $R = 1$  м,  $h = 0,01$  м), внутри которой течет несжимаемая жидкость ( $\rho_f = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>) с осевой и (или) тангенциальной компонентами скорости. Все расчеты выполнены с использованием 40 элементов для оболочки и 1000 элементов для жидкости.

Известно, что и осевое течение жидкости, и ее окружное вращение оказывают дестабилизирующее влияние на упругое тело. Однако механизмы потери устойчивости при этом различаются и могут иметь как статический характер (дивергенция), так и динамический характер (флаттер). Флаттер также может быть двух видов. В случае осевого течения жидкости характер потери устойчивости, как правило, зависит от типа граничных условий [9]: потеря устойчивости оболочек со свободно опертыми или жестко защемленными торцами происходит в виде дивергенции, а оболочек, защемленных на торце, через который входит поток, и свободных на другом торце, — в виде флаттера по одной форме колебаний. В случае углового вращения жидкости происходит расщепление собственной

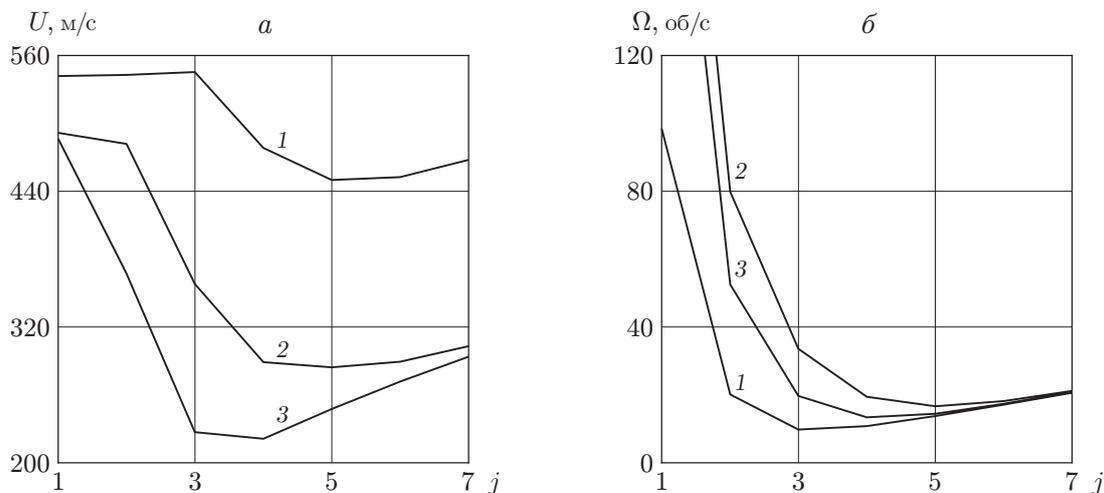


Рис. 1. Зависимость критической осевой скорости жидкости  $U$  (а) и критической угловой скорости вращения жидкости  $\Omega$  (б) от номера гармоники  $j$  для оболочек с различными граничными условиями ( $L/R = 4$ ):

1 — оболочка, заземленная на торце, через который входит поток, и свободная на другом торце, 2 — оболочка с жестко заземленными торцами, 3 — оболочка со свободно опертыми торцами; области над кривыми 1–3 — области неустойчивости, области под кривыми 1–3 — области устойчивости

частоты на два значения, что соответствует появлению противоположно направленных волн, а потеря устойчивости осуществляется в виде флаттера по двум формам колебаний в результате слияния волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Как показано в [7], такой вид потери устойчивости наблюдается при анализе оболочек с любыми граничными условиями.

На рис. 1 приведены зависимости критической осевой скорости потока  $U$  и критической угловой скорости вращения  $\Omega$  от номера гармоники  $j$  в разложении в ряд Фурье, полученные для различных вариантов граничных условий. Анализ результатов расчета показывает, что различие критических скоростей вращения жидкости для оболочек с различными граничными условиями является наиболее существенным на низших гармониках и практически исчезает на более высоких гармониках. Сравнение результатов показывает, что при взаимодействии с вращающейся жидкостью консольно закрепленные оболочки оказываются менее устойчивыми, чем при взаимодействии с осевым течением жидкости, когда они обладают большей сопротивляемостью к потере устойчивости.

На рис. 2 представлены зависимости критических скоростей осевого течения  $U$  и углового вращения  $\Omega$  жидкости от отношения длины оболочки к ее радиусу  $L/R$ , полученные для оболочек с различными граничными условиями. Независимо от типа граничных условий увеличение длины оболочки приводит к уменьшению скоростей как осевого течения, так и углового вращения жидкости, при которых происходит потеря устойчивости.

При совместном воздействии осевого течения и углового вращения жидкости вид потери устойчивости также определяется граничными условиями. Для консольно закрепленных оболочек угловое вращение жидкости не влияет на вид потери устойчивости. В этом случае потеря устойчивости происходит в виде флаттера по одной форме колебаний. При других граничных условиях потеря устойчивости происходит в виде флаттера по двум формам колебаний, т. е. учет наличия осевого течения жидкости не приводит к изменению вида потери устойчивости.

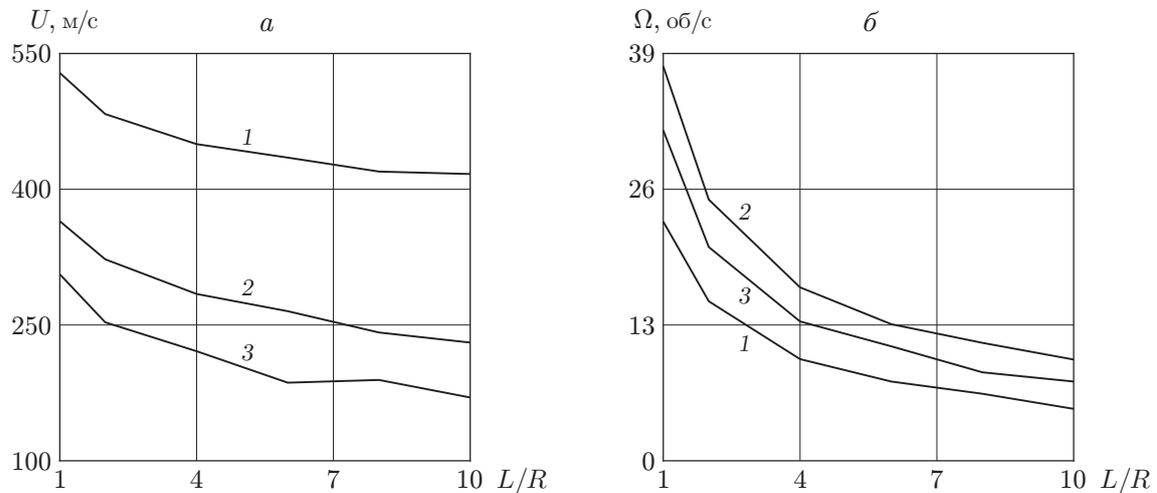


Рис. 2. Зависимости критической осевой скорости жидкости  $U$  (а) и критической угловой скорости вращения жидкости  $\Omega$  (б) от отношения длины оболочки к ее радиусу  $L/R$  для оболочек с различными граничными условиями (обозначения те же, что на рис. 1)

При учете совместного воздействия обеих компонент скорости граница области устойчивости определялась следующим образом: при фиксированном значении одной из скоростей осуществлялся перебор значений другой скорости.

На рис. 3 представлена зависимость критической скорости осевого течения жидкости  $U$  от номера гармоники  $j$ , полученная для оболочек с различными граничными условиями при различных значениях угловой скорости вращения жидкости  $\Omega$ . Из представленных данных следует, что для оболочки, содержащей жидкость с осевой компонентой скорости, независимо от типа граничных условий дополнительный учет вращения жидкости оказывает дестабилизирующее влияние, так как постепенное повышение скорости углового вращения жидкости приводит к уменьшению значений критических скоростей течения на границе области устойчивости.

На рис. 4 представлена зависимость критической скорости углового вращения жидкости  $\Omega$  от номера гармоники  $j$ , полученная для оболочек с различными граничными условиями при различных значениях скорости осевого течения жидкости  $U$ . Динамика оболочек со свободно опертыми торцами (рис. 4, б) не меняется, т. е. в случае оболочки, содержащей вращающуюся жидкость, дополнительный учет осевой компоненты скорости оказывает дестабилизирующее влияние, в то время как динамика консольно закрепленных оболочек имеет более сложный характер. Обнаружено, что для оболочек такого типа учет вращательной и осевой компонент скорости потока приводит к скачкообразному изменению одной из критических скоростей. Из результатов, представленных на рис. 4, а, следует, что учет даже минимальной осевой скорости  $U = 0,1$  м/с приводит к изменению критического значения угловой скорости вращения для всех рассмотренных номеров гармоник. Кроме того, для низших гармоник при некоторых значениях осевой скорости течения жидкости значения угловой скорости на границе области устойчивости увеличиваются.

Более детальный анализ области устойчивости, выполненный для гармоники  $j = 4$  (рис. 5), позволяет сделать вывод, что при совместном воздействии двух скоростей положение границы области устойчивости существенно зависит от типа граничных условий и линейных размеров системы.

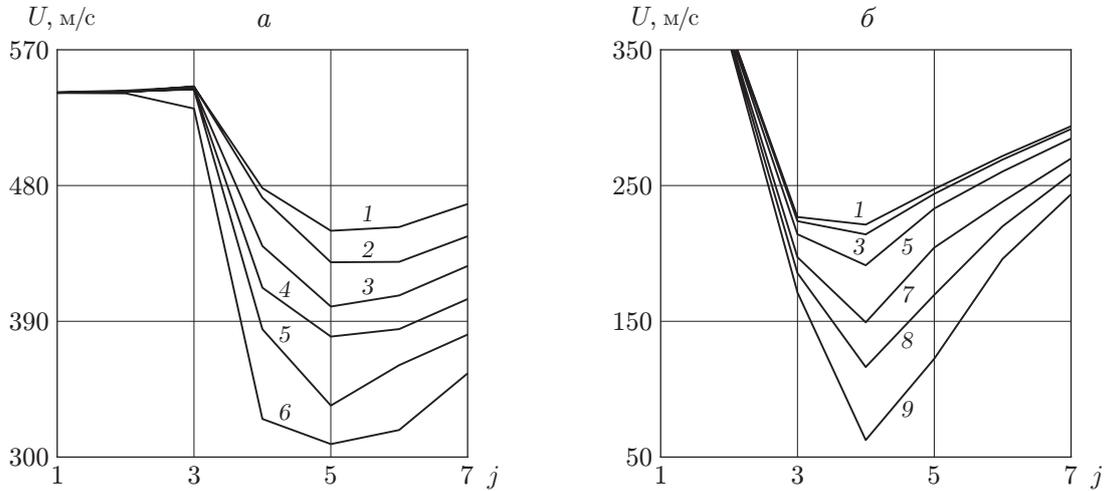


Рис. 3. Зависимость критической осевой скорости жидкости  $U$  от номера гармоники  $j$  при различных значениях скорости вращения жидкости  $\Omega$  ( $L/R = 4$ ):  $a$  — консольно закрепленная оболочка,  $b$  — оболочка со свободно опертыми торцами; 1 —  $\Omega = 0$ , 2 —  $\Omega = 10$  рад/с, 3 —  $\Omega = 20$  рад/с, 4 —  $\Omega = 30$  рад/с, 5 —  $\Omega = 40$  рад/с, 6 —  $\Omega = 50$  рад/с, 7 —  $\Omega = 60$  рад/с, 8 —  $\Omega = 70$  рад/с, 9 —  $\Omega = 80$  рад/с; области над кривыми 1–9 — области неустойчивости, области под кривыми 1–9 — области устойчивости

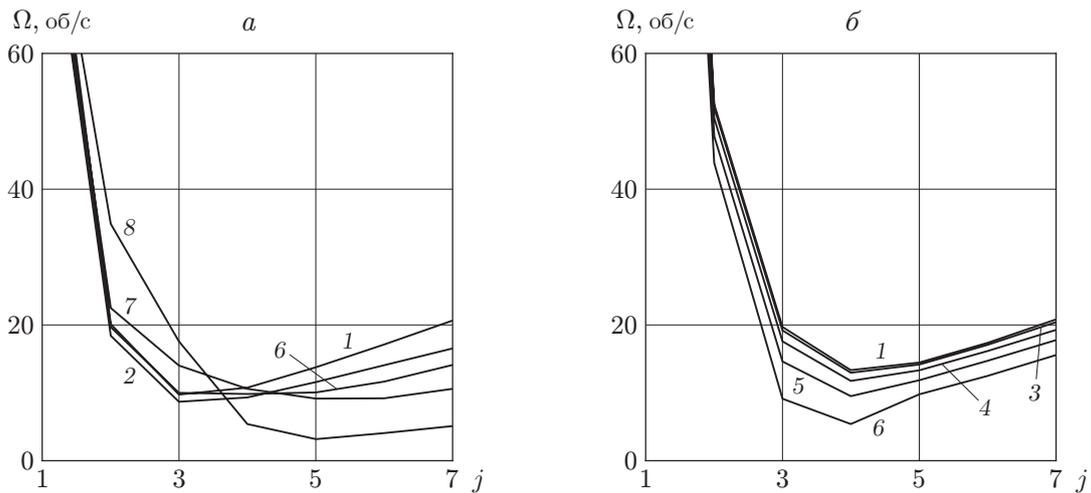


Рис. 4. Зависимость критической скорости вращения жидкости  $\Omega$  от номера гармоники  $j$  при различных значениях осевой скорости жидкости  $U$  ( $L/R = 4$ ):  $a$  — консольно закрепленная оболочка,  $b$  — оболочка со свободно опертыми торцами; 1 —  $U = 0$ , 2 —  $U = 0,1$  м/с, 3 —  $U = 50$  м/с, 4 —  $U = 100$  м/с, 5 —  $U = 150$  м/с, 6 —  $U = 200$  м/с, 7 —  $U = 300$  м/с, 8 —  $U = 400$  м/с

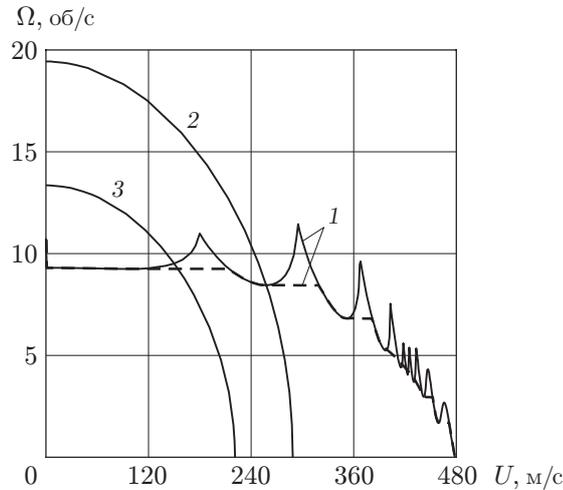


Рис. 5. Зависимость между осевой скоростью жидкости и угловой скоростью ее вращения на границе области устойчивости для оболочек с различными граничными условиями ( $j = 4$ ,  $L/R = 4$ ):

1 — оболочка, заземленная на торце, через который входит поток, и свободная на другом торце (сплошная линия — при фиксированной осевой скорости, штриховая — при фиксированной угловой скорости), 2 — оболочка с жестко заземленными торцами, 3 — оболочка со свободно опертыми торцами; области над кривыми 1–3 — области неустойчивости, области под кривыми 1–3 — области устойчивости

Для оболочек со свободно опертыми или жестко закрепленными торцами вычисляемые границы области устойчивости не зависят от варианта перебора значений угловой и осевой скоростей. Для консольно закрепленных оболочек разные варианты перебора угловой и осевой скоростей приводят к различным результатам. Варианту перебора, когда осевая скорость фиксируется и находится значение угловой скорости, при которой происходит потеря устойчивости, на рис. 5 соответствует сплошная линия 1. Другому варианту, при котором фиксируется угловая скорость и находится значение осевой скорости, определяющей потерю устойчивости, соответствует штриховая линия на рис. 5. Возможно, причиной этих различий является то, что для оболочек с такими граничными условиями наличие осевой скорости течения жидкости может приводить к увеличению критической скорости углового вращения. Данный результат означает, что для консольно закрепленных оболочек осевое течение жидкости в некоторых режимах оказывает стабилизирующее воздействие, в то время как для оболочек с другими граничными условиями — только дестабилизирующее воздействие. Степень стабилизирующего воздействия зависит от линейных размеров системы: чем они меньше, тем выше расположена граница области устойчивости (см. рис. 2). С увеличением значения  $L/R$  стабилизирующее воздействие осевого течения жидкости прекращается. Возможно, такой характер поведения консольно закрепленных оболочек при совместном воздействии двух компонент скорости определяется наличием для таких оболочек гидродинамического демпфирования даже при минимальных скоростях осевого течения жидкости.

На рис. 6 представлена зависимость критической скорости потока  $\xi = (U^2 + R^2\Omega^2)^{1/2}/(U|_{\Omega=0})$  от отношения окружной скорости жидкости к осевой скорости жидкости  $\zeta = R\Omega/U$ , полученная для различных вариантов граничных условий при  $L/R = 4$ . Использовать безразмерные величины  $\xi$  и  $\zeta$  для анализа результатов численных расчетов предложено в [2]. На рис. 6 видно, что для консольно закрепленной оболочки увеличение угловой скорости вращения жидкости приводит к наиболее существенному уменьшению критической скорости жидкости.

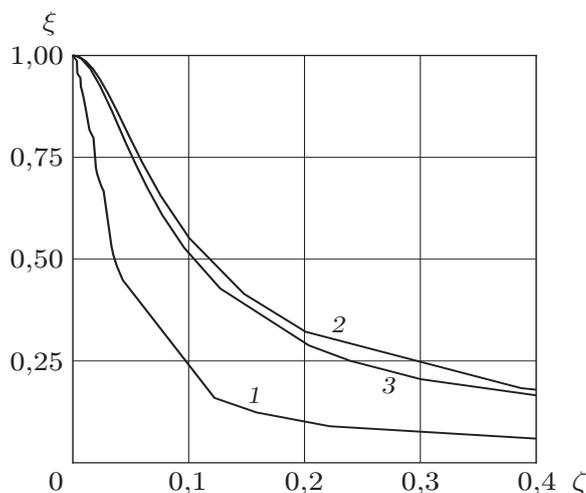


Рис. 6. Зависимость критической скорости потока  $\xi$  от отношения окружной скорости к осевой скорости  $\zeta$  для оболочек с различными граничными условиями при совместном воздействии осевого течения и углового вращения жидкости для  $j = 4$ ,  $L/R = 4$  (обозначения те же, что на рис. 5)

**Заключение.** В работе исследована динамика упругих круговых цилиндрических оболочек, взаимодействующих с потоком жидкости с осевой и окружной компонентами скорости. С использованием разработанного численного алгоритма выполнен анализ устойчивости оболочек с различными граничными условиями и линейными размерами. Показано, что совместное воздействие обеих компонент скорости оказывает существенное влияние на границу области устойчивости. При этом, как правило, уменьшается критическая скорость, при которой происходит потеря устойчивости. Установлено, что в случае коротких консольно закрепленных оболочек осевое течение жидкости может приводить к увеличению критической угловой скорости вращения жидкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Chen T. L. C., Bert C. W.** Wave propagation in isotropic- or composite-material piping conveying swirling liquid // Nuclear Engng Design. 1977. V. 42. P. 247–255.
2. **Chen T. L. C., Bert C. W.** Dynamic stability of isotropic or composite material cylindrical shells containing swirling fluid flow // J. Appl. Mech. 1977. V. 44. P. 112–116.
3. **Srinivasan A. V.** Flutter analysis of rotating cylindrical shells immersed in a circular helical flowfield of air // AIAA J. 1971. V. 9. P. 394–400.
4. **David T. S., Srinivasan A. V.** Flutter of coaxial cylindrical shells in a incompressible axisymmetric flow // AIAA J. 1974. V. 12. P. 1631–1635.
5. **Dowell E. H., Srinivasan A. V., McLean J. D., Ambrose J.** Aeroelastic stability of cylindrical shells subjected to a rotating flow // AIAA J. 1974. V. 12. P. 1644–1651.
6. **McLean J. D., Dowell E. H.** Swirling flows between coaxial cylinders with injection by radial jets // AIAA J. 1975. V. 13. P. 1435–1440.
7. **Бочкарев С. А.** Устойчивость цилиндрической оболочки с вращающейся в ней жидкостью // Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. 2010. Т. 80. С. 106–115.
8. **Ильгамов М. А.** Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969.

9. **Бочкарев С. А., Матвеев В. П.** Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 3. С. 189–199.
10. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977.
11. **Матвеев В. П.** Об одном алгоритме решения задачи о собственных колебаниях упругих тел методом конечных элементов // Краевые задачи теории упругости и вязкоупругости: Сб. науч. тр. Свердловск: Урал. науч. центр АН СССР, 1980. С. 20–24.
12. **Джордж А.** Численное решение больших разреженных систем уравнений / А. Джордж, Дж. Лю. М.: Мир, 1984.

*Поступила в редакцию 1/IX 2011 г.,  
в окончательном варианте — 25/I 2012 г.*

---