

ВЛИЯНИЕ ПЛАВЛЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРЕНИЯ КВАЗИГОМОГЕННЫХ СОСТАВОВ. МЕТОД ЗЕЛЬДОВИЧА — НОВОЖИЛОВА

Л. К. Гусаченко

Институт химической кинетики и горения СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках феноменологической модели нестационарного горения твердых энергетических материалов исследовано влияние теплового эффекта и температуры подповерхностного фазового перехода на устойчивость (к малым возмущениям) горения при постоянном давлении.

Для математического описания нестационарного горения энергетических материалов (ЭМ) Я. Б. Зельдович в 1942 г. разработал феноменологическую модель, которая затем была обобщена и описана в [1]. Фактически модель представляет собой одно из первых практических применений метода сращиваемых асимптотических разложений (САР): полная задача о нестационарном протекании совокупности сложных (и малоизученных) процессов в одномерной волне горения гомогенного ЭМ разбита на а) нестационарную «внешнюю» задачу в «области прогрева», где можно пренебречь химическим разложением ЭМ и где протекает единственный процесс теплопередачи по механизму Фурье, и б) «внутреннюю» задачу в области физико-химических превращений вещества.

Согласно оценкам характерное время пребывания вещества во «внутренней» области (t_{in}) много меньше соответствующего времени (t_{ex}) «внешней» задачи, что и дает основание для применения метода САР. При этом все процессы во «внутренней» области можно считать квазистационарными для внешнего воздействия (возмущения) с характерным временем t_{tr} , если $t_{in} \ll t_{tr} \ll t_{ex}$. Поскольку частные производные по времени во «внутренней» задаче отсутствуют, все ее характеристики (в том числе массовая скорость m оттока вещества от поверхности, линейная скорость u_g на «горячем» конце рассматриваемой области, линейная скорость u распространения границы «газ — конденсированная фаза» и температура T_s этой границы) зависят от времени только через «внешние» параметры, а при постоянном давлении — через единственный параметр «сращивания» с областью прогрева, а

именно через градиент φ температуры на границе областей.

Вторая основная идея феноменологической модели состоит в том, что функции $u(\varphi)$, $T_s(\varphi)$, определяемые сложными процессами «внутренней» задачи, можно извлечь из полученных в стационарных условиях экспериментальных зависимостей $u^0(T_0)$, $T_s(T_0)$, принимая во внимание, что они представляют собой те же функции $u(\varphi)$, $T_s(\varphi)$, но заданные параметрически с параметром T_0 . Недостающее соотношение дает стационарное решение «внешней» задачи $\lambda\varphi(T_0) = \rho_c u^0(T_0)(T_s(T_0) - T_0)$, где λ , c , ρ_c — коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность ЭМ.

При исследовании устойчивости горения ЭМ в [1] не учитывались фазовые переходы в волне прогрева ЭМ (во «внешней» задаче). Но это легко сделать, модифицируя постановку задачи в рамках основных идей феноменологической модели нестационарного горения. Потребность в такой модификации существует, поскольку многие применяемые ЭМ при нагреве один или несколько раз меняют кристаллическую структуру, а затем плавятся при температуре, существенно меньшей T_s . Короткое сообщение о влиянии плавления на устойчивость горения ЭМ содержится в [2].

Одновременный учет нескольких фазовых переходов приводит к слишком громоздким выражениям. Воспользуемся тем, что для некоторых практически важных ЭМ (гексоген, октоген) тепловой эффект плавления в несколько раз больше суммы эффектов от изменения структуры, и проведем анализ с одним фазовым переходом (плавлением). В этом случае по аналогии с [1] сравнительно просто найти границу устойчивости горения при постоянном да-

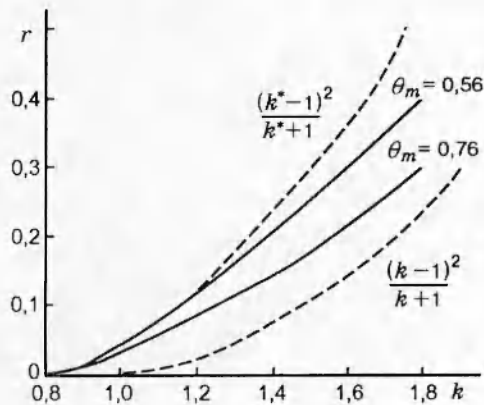


Рис. 1. Границы устойчивости горения:
область устойчивости — выше соответствующей
сплошной кривой

влении в координатах k, r (вывод см. в приложении). Положение границы зависит от параметров q, L, θ_m . Здесь

$$k = (T_s - T_0) \frac{d \ln u}{dT_0}, \quad r = \frac{dT_s}{dT_0}, \quad q = \frac{Q_m}{c(T_s - T_0)},$$

$$L = \frac{\lambda_{sol}}{\lambda_{liq}}, \quad \theta_m = \frac{T_m - T_0}{T_s - T_0},$$

T_m, T_s, T_0 — температуры плавления, поверхности горения и начальная; Q_m — теплота плавления (плюс теплоты прочих фазовых переходов при более низких температурах); $\lambda_{sol}, \lambda_{liq}$ — коэффициенты теплопроводности твердой и жидкой фаз.

На рис. 1 показана граница устойчивости для двух комбинаций параметров. Расчетные границы устойчивости для всех k (и, как показали расчеты, для всей практически значимой области q, θ_m) расположены между двумя «предельными» линиями. Из сравнения с «классической» (не учитывающей плавления) границей $r = (k-1)^2/(k+1)$ видно, что плавление уменьшает устойчивость: чем ниже температура плавления, тем сильнее отклонение от «классической» границы. Для оценок устойчивости горения реальных ЭМ важен результат при сравнительно небольших значениях k, r и, в частности, тот факт, что возможна потеря устойчивости при $k < 1$.

Общий характер зависимости положения границы устойчивости от параметров q, θ_m показан на рис. 2, где $k^* = (T_s - T_0 + Q_m/c) d \ln u / dT_0 = k(1+q)$. Видно, что все кривые выходят из точки $(1, 0)$ и в некоторой ее

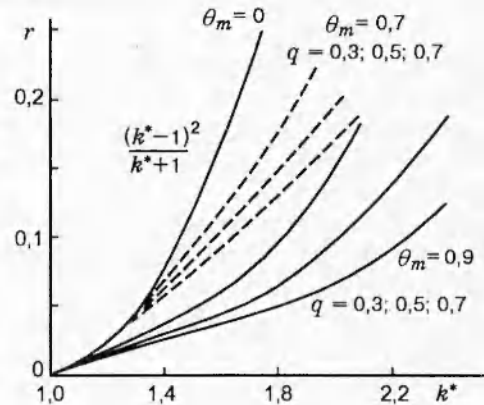


Рис. 2. Границы устойчивости горения в модифицированных координатах

окрестности практически совпадают с «главной» линией $r = (k^* - 1)^2 / (k^* + 1)$ (что, собственно, и послужило основанием для выбора координат k^*, r). Чем меньше значение θ_m на рассматриваемой линии, тем дальше от начала координат находится ее ответвление от «главной». От значения q место ответвления если и зависит, то слабо. Величина же отклонения кривой $r(k)$ от «главной» линии имеет существенную положительную зависимость от q .

Такое поведение кривых имеет простой физический смысл. Обратим внимание на то, что особенности температурного профиля в k -фазе, связанные с фазовыми переходами, проявляются лишь начиная с расстояния x_m от поверхности горения. При $x < x_m$ в стационарном режиме реализуется профиль Михельсона, совпадающий с таковым для ЭМ без фазовых переходов, но с пониженной начальной температурой $T_0^- = T_0 - Q_m/c$. Поэтому

$$x_m = \frac{a}{u} \ln \frac{1+q}{\theta_m + q},$$

где a — температуропроводность жидкости. Заметим также, что гармонические тепловые возмущения на поверхности с частотой ω , распространяющиеся в глубь ЭМ, практически затухают на расстоянии $x_{tw} \sim 1/\sqrt{\omega}$. Поэтому при $x_m > x_{tw}$ модель «не чувствует» фазовых переходов, и, значит, нестационарная картина должна совпадать с таковой для ЭМ без фазовых переходов, но с пониженной начальной температурой T_0^* . Для ЭМ без фазовых переходов справедливы результаты [1], так что при $x_m > x_{tw}$ граница устойчивости совпадает с $r = (k^* - 1)^2 / (k^* + 1)$, где k^* как раз и есть значение k при $T_0 = T_0^*$. Поскольку вдоль линий

$r(k)$ частота убывает (начиная с $\omega = \infty$ в начале координат), на рис. 1, 2 упомянутая область совпадения границ с «классическими» должна примыкать к началу координат, где $x_{tw} = 0$. С понижением температуры плавления толщина расплавленного слоя x_m возрастает, и для сохранения равенства $x_m = x_{tw}$ точка ответвления должна сдвинуться вдоль «классической» линии в сторону меньших частот (дальше от начала координат).

Заметим, что если колебания затухают, не достигнув границы плавления, то модель тем более «не чувствует» фазовых переходов, еще более удаленных от поверхности горения. Это значит, что участок совпадения границы устойчивости с «классической» границей пригоден и для ЭМ с несколькими фазовыми переходами в k -фазе при существенно различных температурах — нужно только понимать под Q_m суммарный тепловой эффект всех этих переходов (включая плавление).

Обсудим теперь, что происходит при достаточно низких частотах возмущений, когда путь затухания тепловой волны x_{tw} становится больше толщины расплавленного слоя x_m . Незатухшие еще возмущения достигают зоны фазовых переходов, которые согласно принципу Ле-Шателье должны усилить затухание (отклонить границу устойчивости вниз, сокращая область неустойчивости), и тем сильнее, чем больше тепловой эффект фазового перехода.

В заключение напомним, что анализ устойчивости горения в области вблизи начала координат на рис. 1, 2 (области высоких частот) требует оценки погрешностей, вызванных тем, что не учитывается время перестройки газовой фазы [3] и зоны реакций k -фазы.

Автор благодарен В. Е. Зарко за полезное обсуждение.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00860) и INTAS (грант 93-2560-ext).

ПРИЛОЖЕНИЕ

По аналогии с [1] рассматриваемая нами задача сводится к решению уравнения теплопроводности в системе координат, связанной с поверхностью состава. Учитывается, что при температуре $T = T_m$ происходит плавление с тепловым эффектом $-Q_m$ и изменяется коэффициент теплопроводности ($\lambda = \lambda_{sol}$ при $T < T_m$ и $\lambda = \lambda_{liq}$ при $T > T_m$).

После введения безразмерных параметров

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_s^0 - T_0}, \quad \xi = \frac{xu^0}{a_{sol}}, \quad \tau = \frac{t(u^0)^2}{a_{sol}},$$

$$L = \frac{\lambda_{sol}}{\lambda_{liq}}, \quad q = \frac{Q_m}{c(T_s^0 - T_0)}$$

задача принимает вид

$$0 < \xi < H: \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{u}{u^0} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{1}{L} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2},$$

$$\theta(0, \tau) = \theta_s(\bar{\varphi}), \quad u = u(\bar{\varphi}), \quad \bar{\varphi} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0, \tau),$$

$$\xi > H: \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{u}{u^0} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2},$$

$$\theta(\infty, \tau) = 0, \quad \theta(H(\tau), \tau) = \theta_m,$$

$$\frac{1}{L} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(H(\tau) - 0, \tau) = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(H(\tau) + 0, \tau) - q \frac{u_m}{u^0},$$

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{u_m - u}{u^0}.$$

Здесь $\bar{\varphi} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0, \tau)$; $a = \lambda/c\rho$, переменность $c\rho$ не учитывается; индексы нуль сверху и снизу, «s» и «m» относятся к стационарному режиму и начальному состоянию, к поверхности и месту плавления. Функции $\theta_s(\bar{\varphi})$, $u(\bar{\varphi})$ предполагаются известными из эксперимента или расчетов стационарного режима.

Стационарное решение системы имеет вид

$$\xi < H: \quad \theta^0 = 1 - (1 - \theta_m) \frac{1 - \exp(-L\xi)}{1 - \exp(-LH)},$$

$$\xi > H: \quad \theta^0 = \theta_m e^{-(\xi-H)}, \quad H = \frac{1}{L} \ln \frac{q+1}{q+\theta_m}.$$

Используем линеаризацию в окрестности стационарного режима, полагая

$$\theta = \theta^0 + \delta\theta(\xi)e^{\omega\tau}, \quad u = u^0 + \delta u e^{\omega\tau},$$

$$H = H^0 + \delta H e^{\omega\tau}.$$

Система уравнений после линеаризации принимает вид

$$\xi < H: \quad \omega\delta\theta + \frac{\delta u}{u} L \frac{1 - \theta_m}{1 - e^{-LH}} e^{-L\xi} - \frac{d\delta\theta}{d\xi} = \frac{1}{L} \frac{d^2\delta\theta}{d\xi^2},$$

$$\xi > H: \quad \omega\delta\theta + \frac{\delta u}{u} \theta_m e^{-(\xi-H)} - \frac{d\delta\theta}{d\xi} = \frac{d^2\delta\theta}{d\xi^2}$$

(при решении в первом уравнении пока не используем граничные условия, так что в решение войдут не определенные пока константы

D_1, D_2 ; во втором уравнении используем условия $\delta\theta(\infty) = 0, -\theta_m\delta H + \delta\theta(H) = 0$;

$$\xi < H: \quad \delta\theta = (q + \theta_m) \left(-\frac{\delta u}{u} \frac{L}{\omega} e^{-L(\xi - H)} + D_1 e^{-k_1 L \xi} + D_2 e^{-k_2 L \xi} \right),$$

$$\xi > H: \quad \delta\theta = -\frac{\theta_m}{\omega} \frac{\delta u}{u} e^{-(\xi - H)} + \theta_m e^{-k_3(\xi - H)} \left(\delta H + \frac{1}{\omega} \frac{\delta u}{u} \right),$$

$$k_1 = 0,5(1 + \sqrt{1 + 4\omega/L}), \quad k_2 = 1 - k_1,$$

$$k_3 = 0,5(1 + \sqrt{1 + 4\omega}).$$

Из приведенных решений следуют полезные для дальнейшего соотношения

$$\delta\theta(0) = (q + \theta_m) \left(-\frac{\delta u}{u} \frac{L}{\omega} A + D_1 + D_2 \right),$$

$$\frac{d\delta\theta}{d\xi}(0) = (q + \theta_m)L \left(\frac{\delta u}{u} \frac{L}{\omega} A - k_1 D_1 - k_2 D_2 \right),$$

$$\delta\theta(H-0) = (q + \theta_m) \left(-\frac{\delta u}{u} \frac{L}{\omega} + D_1 A^{-k_1} + D_2 A^{-k_2} \right),$$

$$\frac{d\delta\theta}{d\xi}(H-0) = (q + \theta_m)L \left(\frac{\delta u}{u} \frac{L}{\omega} - k_1 D_1 A^{-k_1} - k_2 D_2 A^{-k_2} \right),$$

$$\frac{d\delta\theta}{d\xi}(H+0) = \theta_m \left(\frac{1}{\omega} \frac{\delta u}{u} - k_3 \left(\delta H + \frac{1}{\omega} \frac{\delta u}{u} \right) \right),$$

$$\frac{d\theta^0}{d\xi}(0) = -L(q+1), \quad \frac{d\theta^0}{d\xi}(H-0) = -L(q+\theta_m),$$

$$\frac{d^2\theta^0}{d\xi^2}(H-0) = L^2(q + \theta_m),$$

$$\frac{d^2\theta^0}{d\xi^2}(H+0) = \theta_m, \quad A = \frac{q+1}{q+\theta_m}.$$

Приведем неиспользованные еще линеаризованные граничные условия:

$$\delta\theta(H-0) = -\delta H \frac{d\theta^0}{d\xi}(H-0),$$

$$\frac{1}{L} \left(\delta H \frac{d^2\theta^0}{d\xi^2}(H-0) + \frac{d\delta\theta}{d\xi}(H-0) \right) =$$

$$= \delta H \frac{d^2\theta^0}{d\xi^2}(H+0) + \frac{d\delta\theta}{d\xi}(H+0) - q \left(\frac{\delta u}{u} + \omega \delta H \right),$$

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{k^*}{k^* + r - 1} \frac{d\delta\theta}{d\xi}(0) / \frac{d\theta^0}{d\xi}(0),$$

$$\delta\theta(0) = \frac{r}{k^*} \frac{\delta u}{u} (1 + q).$$

Здесь $r = dT_s/dT_0$, $k^* = (T_s - T_0 + Q_m/c) d \ln u/dT_0$, использовано дифференцирование по параметру T_0 стационарного теплового баланса $a_{sol} \partial T / \partial x = u(T_s - T_0 + Q_m/c)$ на поверхности. Подставляя в граничные условия выражения для входящих в них величин, получим линейные однородные уравнения для $\delta H, \delta u/u, D_1, D_2$, так что соответствующий определитель должен обращаться в нуль. Он зависит от параметров $\omega, r, k^*, \theta_m, q, L$. Полагая $\omega = iLs$, $i = \sqrt{-1}$, получим комплексный определитель, приравнивание которого нулю при фиксированных θ_m, q, L задает параметрическую (с параметром s) зависимость $r(k^*)$ на границе колебательной неустойчивости исходной задачи к действию малых возмущений. После упрощающих преобразований определителя задание границы принимает вид

$$B \equiv |b_{n,j}| = 0,$$

$$b_{1,1} = 0, \quad b_{1,2} = k^* + isr, \quad b_{1,3} = 1, \quad b_{1,4} = 1,$$

$$b_{2,1} = 0, \quad b_{2,2} = k^* + is(r + k^* - 1),$$

$$b_{2,3} = k_1, \quad b_{2,4} = k_2, \quad b_{3,1} = 1,$$

$$b_{3,2} = 0, \quad b_{3,3} = A^{-k_1}, \quad b_{3,4} = A^{-k_2},$$

$$b_{4,1} = 1 + is + \frac{\theta_m}{q + \theta_m} \frac{4s^2 L}{(1 + \sqrt{1 + 4isL})^2},$$

$$b_{4,2} = 0, \quad b_{4,3} = k_1 A^{-k_1}, \quad b_{4,4} = k_2 A^{-k_2}.$$

Решение системы $\text{Re}(B) = 0, \text{Im}(B) = 0$ с помощью программы MathCAD см. на рис. 1, 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973.
2. Zarko V. E., Gusachenko L. K., Rychkov A. D. Simulation of combustion of melting energetic materials // Defence Sci. J. (India). 1996. V. 46, N 5.
3. Новожилов Б. В. Влияние тепловой инерционности газовой фазы на устойчивость горения испаряющихся конденсированных систем // Хим. физика. 1988. Т. 7, № 3. С. 388-396

Поступила в редакцию 16/V 1997 г.,
в окончательном варианте — 10/XII 1997 г.