

УДК 539.3

**ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПИСАНИЯ БЛОЧНО-ИЕРАРХИЧЕСКОЙ
СТРУКТУРЫ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД С ПОЗИЦИИ УЧЕТА
НЕОДНОРОДНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ**

А. И. Чанышев^{1,2}, О. Е. Белоусова¹

¹*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

²*Новосибирский государственный университет экономики и управления,
ул. Каменская, 52, 630099, г. Новосибирск, Россия*

Неоднородность среды проявляется во многих характеристиках, в том числе в значениях модуля Юнга, коэффициента Пуассона, модуля сдвига, пределов упругости и прочности. Показывается, как с введением неоднородности свойств возможно исследовать блочность среды, ее структурную иерархию в различных задачах геомеханики, оценить влияние блочной структуры на напряженно-деформированное состояние массива.

Неоднородность, блочная структура, модуль Юнга, модуль сдвига, статика, динамика, напряженно-деформированное состояние

Известно, что массивы горных пород состоят из блоков [1–10], причем блоки больших размеров содержат в себе блоки меньших размеров. Для описания блочно-иерархической структуры вводятся коэффициенты вложенности одних блоков в другие, в [10–11] таким коэффициентом считается число $\sqrt{2}$, в [12, 13] — число $(1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\dots$. Существуют различные способы описания блочной структуры. В [14–15] в математическом описании блочной структуры рассматриваются блоки конечных размеров с контактными условиями, вытекающими из теории Герца. В [16–17] структура представляется совокупностью кусочно-неоднородных упругих элементов. В [18–19] блочная модель среды ассоциируется с решеткой масс, соединенных между собой упругими пружинами и вязкими элементами.

Между тем существует другой способ представления блочно-иерархической структуры, основанный на введении в модель среды неоднородности в физико-механические характеристики: в модуль Юнга, модуль сдвига, в пределы упругости, прочности и т. п. Анализируя блочную структуру, можно видеть, что сами блоки являются более жесткими элементами массива пород по сравнению с межблочным пространством. Легко заметить и то, что с ростом нагружения сначала разрушаются более слабые элементы, для которых пределы прочности меньше по значению, чем в соседних элементах. По этим причинам вследствие неоднородности материала происходит разделение его на блоки с образованием блочно-иерархической структуры.

Рассмотрим различные примеры, в которых тем или иным способом вводится неоднородность. Покажем влияние блочности среды на напряженно-деформированное состояние простейших конструкций.

Первый пример касается стержней. Пусть имеется прямолинейный стержень длиной L (рис. 1). Считаем, что модуль Юнга по длине стержня распределен по синусоидальному закону:

$$E = E_0 + E_1 \sin \lambda x, \quad (1)$$

где E_0, E_1 — константы материала; $\lambda = 2\pi n/L$; координата x направлена вдоль оси стержня.

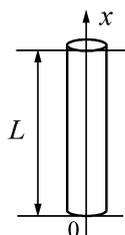


Рис. 1. Стержень длиной L , подверженный сжатию

Из (1) следует, что число n связано с числом блоков вдоль L , поскольку внутри блоков модуль Юнга выше по значению (материал жестче), чем на границах. Если в (1) взять $n = 4$, то получим, что модуль жесткости E будет минимальным в точках $x = 3L/16, x = 7L/16, x = 11L/16, x = 15L/16$, причем значение $E = E_0 - E_1$. В точках с координатами $x = L/16, x = 5L/16, x = 9L/16, x = 13L/16$ модуль Юнга имеет повышенное значение: $E = E_0 + E_1$.

Вычисляем среднее значение E в соответствии с (1):

$$E_{\text{cp}} = \frac{1}{L} \int_0^L \left(E_0 + E_1 \sin \frac{2\pi nx}{L} \right) dx = E_0 - \frac{E_1}{2\pi n} [\cos(2\pi n) - 1]. \quad (2)$$

Согласно (2), с увеличением n ($n \rightarrow \infty$) E_{cp} становится равным E_0 . Возникает вопрос: как E_{cp} отражается на напряженно-деформированном состоянии стержня и как число блоков n проявляется при вычислении смещений стержня при сжатии.

Пусть к стержню приложено постоянное усилие σ_0 : $\sigma|_{x=L} = -\sigma_0$. Для определения смещений в стержне имеем замкнутую систему уравнений: уравнение равновесия $\partial\sigma/\partial x = 0$, закон Гука $\sigma = E\varepsilon$, соотношение Коши $\varepsilon = \partial u/\partial x$. Граничные условия задачи:

$$u|_{x=0} = 0, \quad \sigma|_{x=L} = -\sigma_0. \quad (3)$$

Этой системе удовлетворяет напряжение $\sigma = -\sigma_0$ всюду в стержне, для определения функции u получаем следующее дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\sigma_0}{E_0 + E_1 \sin \lambda x}. \quad (4)$$

Интегрируя (4) при условиях (3) и $|E_1| < |E_0|$, находим решение уравнения

$$-\frac{uE_0}{\sigma_0} = \frac{2\delta}{\lambda} \left(\arctg \left(\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} x + \frac{E_1}{E_0} \right) \delta - \arctg(\chi\delta) \right), \quad (5)$$

где $\delta = 1/\sqrt{1-\chi^2}$, $\chi = E_1/E_0$, дающее распределение смещения при сжатии стержня усилием $\sigma = -\sigma_0$.

Как видно из (5), распределение u сложным образом зависит от отношения $\chi = E_1/E_0$. При $\lambda \rightarrow 0$ ($n \rightarrow 0$, число блоков равно нулю) и в случае, когда $E_1 = 0$ (стержень однороден), правая часть (5) стремится к значению x , поэтому $u = -\sigma_0 x/E_0$, т. е. имеем линейное распределение смещения u вдоль стержня. В случае $n \neq 0$ и $E_1 \neq 0$ распределения “относительного” смещения $-uE_0/\sigma_0$ имеют волнообразный характер (рис. 2а, б). Наклон кривых (в среднем) к оси Ox положителен, и с увеличением n он растет (рис. 2а). Так, если при $n=0$ значение “относительного” смещения при $L=10$ равно 10, то для $n=25$ оно близко к 23, т. е. влияние E_{cp} не проявляется. На рис. 2б при фиксированных значениях $n=25$, $L=10$ показано влияние отношения параметра $\chi = E_1/E_0$ на значения “относительного” смещения $-uE_0/\sigma_0$. Видно, что при $\chi > 0.5$ это влияние увеличивается существенно. Другая особенность поведения смещения от координаты x вдоль стержня (рис. 2а) состоит в том, что несмотря на колебательный характер роста “относительного” смещения от координаты x , производная от этого смещения по x всегда неотрицательна, т. е. по всей длине стержня происходят только деформации сжатия и нет деформаций растяжения [20, 21].

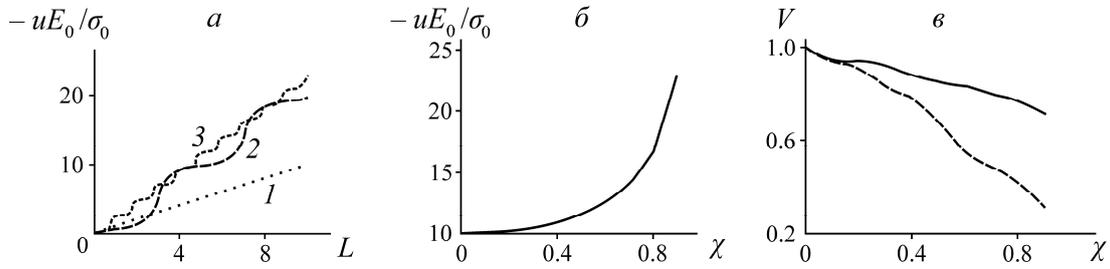


Рис. 2. Зависимости: а — смещения $-uE_0/\sigma_0$ от координаты x . Линия 1 соответствует $E_1 = 0$, линии 2, 3 — $\chi = 0.9$ (для линии 2 — $n = 5$, для линии 3 — $n = 50$); б — смещения $-uE_0/\sigma_0$ от параметра χ ; в — скорости V от χ при $n = 5$, штриховая — при $n = 40$

Далее рассмотрим влияние “блочности” на скорость распространения волны в прямолинейном стержне (т. е. отношение длины стержня к минимальному времени прихода возмущения из начала в конец стержня). Уравнение движения для точек стержня имеет вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6)$$

По закону Гука $\sigma = E\varepsilon$, где E определяется в (1). Подставляя (1) в (6), получаем нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$(1 + \chi \sin(n\pi\tilde{x})) \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} + \chi n\pi \cos(n\pi\tilde{x}) \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{t}^2}, \quad (7)$$

где $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{t} = \sqrt{E_0/\rho(x)}t/L$. Уравнение (7) решалось методом конечных разностей по явной схеме. Поскольку скорость волны зависит от \tilde{x} , то шаг по времени находился из условия устойчивости схемы для минимального значения скорости движения волны. Начальные условия выбирались нулевыми. В момент $t = 0$ к левому концу стержня подавался импульс, определялось время прихода возмущения на правый конец стержня. Результаты расчетов представлены на рис. 2в, где показана зависимость скорости волны V , пришедшей на конец стержня, от параметра χ . Видно, что скорость прихода возмущения на конец стержня при $\chi = 0.9$ почти в 2 раза меньше, чем при $\chi = 0$.

На рис. 3 приведены результаты вычислений “относительного” смещения $-uE_0/\sigma_0$ от количества шагов по координате \tilde{x} и от количества полуволн $n/2$ в разные моменты времени. Видно распространение волны по стержню: начало $t = 100$ шагов по времени (рис. 3а), текущее положение волны $t = 200$ шагов (рис. 3б), приход волны на конец стержня $t = 0.017 \text{ с} = 300$ шагов по времени (рис. 3в).

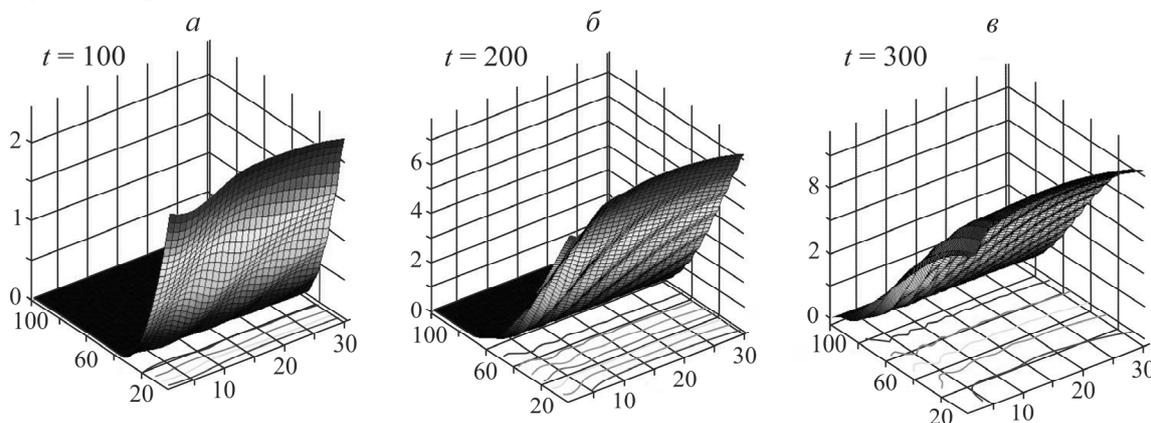


Рис. 3. Зависимость смещений $-\sigma_0 x/E_0$ от количества шагов по координате i (от 0 до 100) и от количества полуволн $n/2$ (от 1 до 30) в разные моменты времени

Таким образом, скорость распространения возмущения уменьшается с введением блочности среды. Это совпадает по характеру с результатами теоретических и экспериментальных исследований [14–17].

Далее опишем структурную иерархию массива пород с помощью неоднородного распределения пределов упругости и прочности. Рассмотрим пластинку в условиях осевого сжатия (рис. 4а). Предположим, что вдоль горизонтального сечения пределы упругости (прочности) имеют неоднородное распределение, такое как на рис. 4б. Видно, что в точках A и B (рис. 4а, б) предел упругости минимальный, в точке C он выше, чем в точках A и B . В других точках между A и C , C и E , E и B и т. д. предел упругости более высокий и почти постоянный. Данное распределение соответствует блочной структуре среды. Если увеличивать значение сжимающего напряжения σ , приложенного к пластинке, то сначала (рис. 4б) материал перейдет в пластическое или неупругое состояние (состояние разрушения) в окрестностях точек A и B . Затем по мере роста σ необратимое деформирование перейдет в точки C и D (точка C находится внутри интервала AB , другая точка находится за B правее). Точки “дробления” материала при последующем возрастании нагрузки могут занимать различные положения, образуя структурную иерархию блоков, что наблюдается в экспериментах и описывается во множестве публикаций [1–11]. При этом для всех указанных состояний могут быть разные кривые упрочнения (рис. 4в).

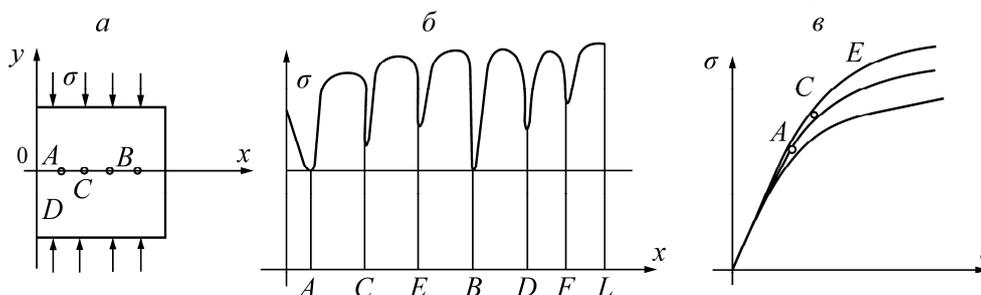


Рис. 4. Пластина в условиях осевого сжатия (а); распределение пределов упругости или прочности для блочной структуры (б); диаграмма деформирования материала (в)

Неоднородное распределение прочностных свойств материалов исследуется во многих работах, например в [22]. Таким образом, с учетом неоднородного распределения пределов упругости и прочности возможно описать иерархию структурных уровней блочных сред.

Рассмотрим неоднородное распределение модуля сдвига в массиве горных пород вокруг цилиндрической выработки. Здесь также, аналогично задаче о стержне, можно описать блочную структуру. Предположим, что материал вокруг горной выработки радиусом r_0 имеет неоднородное распределение модуля сдвига вида

$$2\mu = f\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (8)$$

где f — произвольная функция радиальной координаты.

Решение ищем в области $r \geq r_0$. Имеем систему уравнений, состоящую из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (9)$$

закона Гука в виде

$$\begin{cases} \sigma_r = (k + \mu)\varepsilon_r + (k - \mu)\varepsilon_\varphi, \\ \sigma_\varphi = (k - \mu)\varepsilon_r + (k + \mu)\varepsilon_\varphi, \end{cases} \quad (10)$$

где 2μ — модуль сдвига; $2k$ — модуль объемного сжатия при плоской деформации; $2\mu = E/(1 + \nu)$; $2k = E/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Соотношения Коши в случае осевой симметрии примут вид:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (11)$$

Подставляя (11), (10) в (9) в предположении, что модуль $2k$ постоянен, а модуль 2μ есть функция радиуса r (r, θ — полярные координаты), получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами для определения u :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d\mu}{(k + \mu)dr} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (12)$$

Введем в (12) логарифмическую координату ξ и функцию $P(\xi)$ по формулам:

$$\xi = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad P(\xi) = \frac{d}{d\xi} \ln(k + \mu). \quad (13)$$

Тогда из (12) получаем

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + P(\xi) \left(\frac{du}{d\xi} - u \right) - u = 0. \quad (14)$$

Понизим порядок дифференциального уравнения (14), введя новую функцию

$$v = \frac{du}{d\xi} - u. \quad (15)$$

Из (14) с учетом (15) запишем следующую систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для отыскания функций v и u :

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\xi} + (1 + P(\xi))v = 0, \\ \frac{du}{d\xi} - u = v. \end{cases} \quad (16)$$

Система (16) решается аналитически: сначала первое уравнение, из которого определяется

$v = v_0 e^{-\int_0^\xi [1+P(\xi)]d\xi}$, где v_0 — значение v на контуре $r = r_0$. Далее из второго уравнения находится функция u :

$$u = u_0 e^\xi + v_0 \left\{ \int_0^\xi e^{\int_0^\xi [1+P(\xi)]d\xi} e^{-\xi} d\xi \right\} e^\xi, \quad (17)$$

где u_0 — значение перемещения u на границе $r = r_0$.

Отметим, что (17) — это общее решение уравнения (12), где u_0, v_0 — постоянные. В отличие от [21], где модуль Юнга E считался некоторой частной функцией радиусом r , в данном примере задача решается до конца без каких-либо ограничений на вид функции (8).

Рассмотрим случай, когда модуль сдвига 2μ в окрестности выработки изменяется аналогично (1):

$$k + \mu = (k + \mu_0)(1 + \aleph \sin(2\pi n\xi)), \quad (18)$$

здесь число n определяет число “блоков” в промежутке изменения координаты ξ от 0 до 1 (радиус r изменяется от r_0 до $r = er_0$, где $e \approx 2.718$). Подставляя (18) в (13), находим

$P(\xi) = \frac{2\pi \aleph \cos(2\pi n\xi)}{1 + \aleph \sin(2\pi n\xi)}$. После интегрирования первого уравнения (16) получаем

$$v = v_0 \frac{e^{-\xi}}{1 + \aleph \sin(2\pi n\xi)}. \quad (19)$$

Чтобы найти $u(\xi)$, требуется воспользоваться (17), т. е. взять интеграл от функции $e^{-2\xi} / (1 + \aleph \sin(2\pi n\xi))$. Учитывая, что параметр \aleph в (18) (аналогичен параметру χ в (5)) изменяется от 0 до 1, а $|\sin(2\pi n\xi)| \leq 1$, раскладываем функцию $1/(1 + \aleph \sin(2\pi n\xi))$ в бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Тогда

$$\frac{e^{-2\xi}}{1 + \aleph \sin(2\pi n\xi)} \approx e^{-2\xi} (1 - \aleph \sin(2\pi n\xi) + \aleph^2 \sin^2(2\pi n\xi) - \aleph^3 \sin^3(2\pi n\xi) + \dots).$$

Искомый интеграл представляем в виде суммы интегралов: $\int e^{-2\xi} d\xi, \int e^{-2\xi} \sin(2\pi n\xi) d\xi, \int e^{-2\xi} \sin^2(2\pi n\xi) d\xi, \dots$ с коэффициентами 1, $-\aleph, \aleph^2, -\aleph^3, \dots$. Каждый из указанных интегралов вычисляется с помощью формулы интегрирования по частям [23].

Затем находится связь между константами u_0 и v_0 в (17). Примем, что контур выработки свободен от напряжений, т. е. $\sigma_r|_{\xi=0} = 0$. Тогда

$$r_0 \sigma_r = (k + \mu_0) \frac{du}{d\xi} + (k - \mu_0) u = 0, \quad u = u_0, \quad \left. \left(\frac{du}{d\xi} \right) \right|_{\xi=0} = u_0 + v_0.$$

В итоге получаем: $(k + \mu_0)[u_0 + v_0] + (k - \mu_0)u_0 = 0$, где $v_0 = -\frac{2k u_0}{k + \mu_0} = -\frac{u_0}{1 - \nu}$, ν — коэффициент Пуассона. Окончательно выражение для $u(\xi)$ будет следующим:

$$\frac{u(\xi)}{u_0} = e^\xi \left(1 - \frac{1}{1 - \nu} \int_0^\xi e^{-2\xi} (1 - \aleph \sin(2\pi n\xi) + \aleph^2 \sin^2(2\pi n\xi) - \aleph^3 \sin^3(2\pi n\xi) + \dots) d\xi \right). \quad (20)$$

На рис. 5а приведена зависимость относительного смещения $u(\xi)/u_0$ от логарифмической координаты ξ , из которой видно, что до значения $\xi \approx 0.8$ производная $u(\xi)/u_0$ по координате ξ (в среднем) отрицательна, т. е. в интервале изменения ξ от 0 до 0.8 материал растягивается в направлении радиальной координаты. После значения $\xi \approx 0.8$ производная становится положительной, т. е. материал в этой области ($\xi \geq 0.8$) сжимается. В промежутке изменения $\xi \in [0; 0.8]$ производная может быть как положительной, так и отрицательной, т. е. вблизи контура выработки происходит чередование областей растягивающих и сжимающих деформаций — наблюдается зональная дезинтеграция массива горных пород вокруг выработки [10].

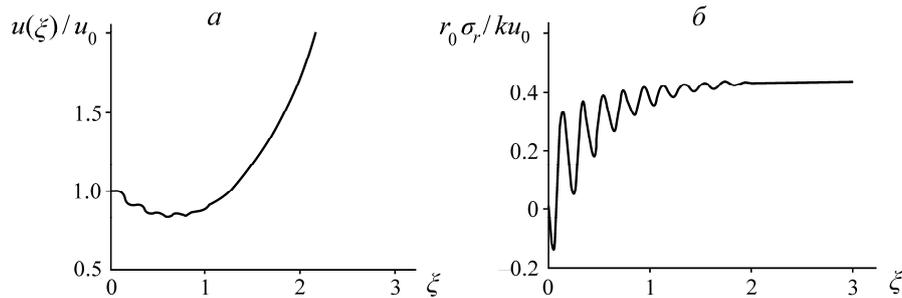


Рис. 5. Зависимости: а — относительного смещения $u(\xi)/u_0$ от логарифмической координаты ξ при значениях $\aleph = 0.5$, $\nu = 0.3$, количестве блоков $n = 5$; б — радиального напряжения $r_0\sigma_r/ku_0$ от логарифмической координаты ξ при тех же параметрах

Зная смещения, можно найти радиальное напряжение, используя закон Гука (10). В данном случае выражение для радиального напряжения имеет вид

$$\frac{r_0\sigma_r}{u_0k} = e^{-\xi} \left(\frac{du}{d\xi} \frac{u_0}{u_0} + \frac{u}{u_0} \right) + (2(1-\nu)(1 + \aleph \sin 2\pi n\xi) - 1) \left(\frac{du}{d\xi} \frac{u_0}{u_0} - \frac{u}{u_0} \right) e^{-\xi}.$$

На рис. 5б относительное радиальное напряжение $r_0\sigma_r/ku_0$ приобретает волнообразный характер. На интервале $\xi \in [0; 1]$ отмечено пять гармоник, что соответствует количеству блоков. В окрестности контура выработки в первом блоке радиальное напряжение положительное ($u_0 < 0$). При $\xi \rightarrow \infty$ относительное радиальное напряжение имеет горизонтальную асимптоту со значением 0.43.

Замечание. В некоторых работах (например, [24]) аналогично характеристикам упругости вводятся неоднородные распределения пределов упругости, пределов разрушения горных пород, и эти аппроксимации автоматически вставляются в расчеты. Однако не может быть одновременного перехода материала в состояние пластичности или разрушения во всех точках. Как показано на рис. 4б, не все элементы среды сразу переходят в неупругое состояние, это происходит последовательно во времени.

ВЫВОДЫ

Показано, что блочно-иерархическую структуру можно описывать с помощью неоднородного распределения констант упругости и пластичности. Решены задачи о сжатии стержня, нагружении массива пород с выработкой в случае неоднородного распределения модуля Юнга, модуля сдвига. Оценено влияние блочной структуры (количество блоков, отношение жесткостей блоков к межблочному пространству) на напряженно-деформированное состояние рассматриваемых конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовский М. А. О естественной кусковатости горных пород // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 4. — С. 829–831.
2. Садовский М. А., Денщик В. А., Кондратьев В. Н., Ромашов А. Н., Чубаров В. М. О модели верхних слоев земной коры // Физика Земли. — 1982. — № 9. — С. 3–9.
3. Садовский М. А. О распределении размеров твердых отдельных частей // ДАН. — 1983. — Т. 269. — № 1. — С. 69–72.
4. Садовский М. А. Иерархия от пылинок до планет // Земля и Вселенная. — 1984. — № 6. — С. 5–9.
5. Садовский М. А., Кочарян Г. Г., Родионов В. Н. О механике блочного горного массива // ДАН. — 1988. — Т. 302. — № 2. — С. 306–307.
6. Садовский М. А., Адушкин В. В., Спивак А. А. О размере зон необратимого деформирования при взрыве в блочной среде // Физика Земли. — 1989. — № 9. — С. 9–15.
7. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. — М.: Наука, 1987. — 101 с.
8. Шемякин Е. И., Фисенко Г. Л., Курленя М. В., Опарин В. Н., Рева В. Н., Глушихин Ф. П., Розенбаум М. А., Троп Э. А. Эффект зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок // ДАН СССР. — 1986. — Т. 289. — № 5. — С. 41–53.
9. Кочарян Г. Г., Спивак А. А. Иерархия структурных и геодинамических характеристик земной коры // Геология, инженерная геология, гидрогеология, геокриология. — 2002. — № 6. — С. 537–550.
10. Опарин В. Н. Масштабный фактор явления зональной дезинтеграции горных пород и стратификация недр Луны по сейсмическим данным // ФТПРПИ. — 1997. — № 6. — С. 3–14.
11. Курленя М. В., Опарин В. Н. О масштабном факторе явления зональной дезинтеграции горных пород и канонических рядах атомно-ионных радиусов // ФТПРПИ. — 1996. — № 2. — С. 6–13.
12. Макаров П. В. Подход физической мезомеханики к моделированию процессов деформации и разрушения // Физ. мезомеханика. — 1998. — Т. 1. — № 1. — С. 61–81.
13. Макаров П. В. Нагружаемый материал как нелинейная динамическая система. Проблемы моделирования // Физ. мезомеханика. — 2005. — Т. 8. — № 6. — С. 39–56.
14. Сарайкин В. А. Учет упругих свойств блоков в низкочастотной составляющей волны возмущений, распространяющейся в двумерной среде // ФТПРПИ. — 2009. — № 3. — С. 9–24.
15. Сарайкин В. А. Распространение волн в двумерной блочной среде с вязкоупругими прослойками (теория и эксперимент) // ПМТФ. — 2015. — Т. 56. — № 4. — С. 170–181.
16. Красновский А. А., Миренков В. Е. Деформирование кусочно-однородных блоков пород с трещинами при расклинивании // ГИАБ. — 2010. — № 8. — С. 286–289.
17. Миренков В. Е. О разрушении образцов пород при растяжении // ФТПРПИ. — 2013. — № 3. — С. 42–48.
18. Шер Е. И., Александрова Н. И., Айзенберг-Степаненко М. В., Черников А. Г. Влияние иерархической структуры блочных горных пород на особенности распространения сейсмических волн // ФТПРПИ. — 2007. — № 6. — С. 20–28.
19. Александрова Н. И. Задача Лэмба для трехмерной модели блочной среды // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2015. — № 2. — С. 194–198.
20. Зуев Л. Б., Данилов В. И., Баранникова С. А. Физика макролокализации пластического течения. — Новосибирск: Наука, 2008. — 328 с.
21. Зуев Л. Б., Баранникова С. А. Физика прочности и экспериментальная механика. — Новосибирск: Наука, 2011. — 350 с.
22. Литвинский Г. Г. Аналитическая теория прочности горных пород и массивов. — Донецк: Норд-Пресс, 2008. — 207 с.
23. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1978. — 277 с.
24. Алимжанов А. М. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость пород приконтурной зоны подземной сферической полости в массиве с технологической неоднородностью механических свойств пород // Электронный научный журнал “Нефтегазовое дело”. — 2012. — № 6. — С. 32–45. <http://www.ogbus.ru>.

Поступила в редакцию 12/IV 2017