УДК 539.3

# ОБРАТНАЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Ф. А. Бахышов, В. М. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан
E-mail: irakon63@hotmail.com

На основе принципа равнопрочности решена задача по определению оптимального натяга для посадки упругих включений в отверстия изотропной упругой пластины, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение этой задачи. Найденный натяг обеспечивает повышение несущей способности составной изгибаемой пластины.

Ключевые слова: инородные включения, перфорированная пластина, натяг посадки, изгиб, оптимальное проектирование.

**Введение.** Как показывает практика, многокомпонентные конструкции более надежны и долговечны, чем однородные [1]. При проектировании композитных материалов для повышения несущей способности перфорированной пластины с круглыми отверстиями целесообразно контуры этих отверстий подкреплять с натягом упругими шайбами из другого упругого материала. Подкрепляющие элементы, сравнительно небольшие по массе, существенно влияют на прочность пластины. Ресурс работы составной (многокомпонентной) конструкции зависит от распределения напряжений в зонах взаимодействия ее элементов, поэтому большое значение приобретает оптимальное проектирование таких конструкций, т. е. определение их оптимальных характеристик. Работоспособность составной пластины можно повышать с помощью конструкторско-технологических приемов, в частности путем изменения геометрии (натяга) соединения ее элементов. Решению подобных задач механики посвящены работы [2–9].

**Постановка задачи.** Пусть имеется изотропная упругая пластина, ослабленная двоякопериодической системой круглых отверстий радиуса $\lambda$ ($\lambda < 1$), центры которых находятся в точках $P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), где $\omega_1 = 2$; $\omega_2 = 2h_* \exp(i\alpha)$; $h_* > 0$; $\operatorname{Im}\omega_2 > 0$.

Требуется определить натяг для посадки включений в отверстия такой пластины. Следует отметить, что до сих пор неизвестны решения задач теории упругости по построению системы концентраторов (включений) таким образом, чтобы созданное ими упругое поле снижало концентрацию напряжений в перфорированной пластине. Пластина подвергается однородному изгибу равномерно распределенными постоянными моментами (изгиб на бесконечности)

$$M_x = M_x^\infty, \qquad M_y = M_y^\infty, \qquad H_{xy} = 0.$$

Начало системы координат совмещено с геометрическим центром отверстия $L_{0,0}$ в срединной плоскости $x0y$ пластины.

Будем считать, что в круглые отверстия пластины $L_{mn}$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) путем запрессовки или теплового воздействия вставлены с натягом упругие шайбы из другого упругого материала. Шайбы имеют бо́льшие размеры, чем отверстия пластины, а их толщина равна толщине пластины. На основании симметрии краевых условий и геометрии области, занятой упругой средой, напряжения в изгибаемой пластине являются двоякопериодическими функциями с основными периодами $\omega_1$ и $\omega_2$.

Комплексные потенциалы, относящиеся к шайбе, обозначим через $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, а относящиеся к пластине — через $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. Так как решение для пластины обладает свойством двоякопериодичности, достаточно рассмотреть условия сопряжения пластины с включением лишь вдоль контура основного отверстия $L_{0,0}$.

Краевые условия рассматриваемой задачи имеют вид [10]

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar\tau\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]\,\mathrm{e}^{2i\theta} = \Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\bar\tau\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)]\,\mathrm{e}^{2i\theta} + g'(\tau); \qquad (1)$$

$$\varepsilon\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\bar\tau\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]\,\mathrm{e}^{2i\theta} = \\ = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)}\{\varepsilon_0\overline{\Phi_0(\tau)} + \Phi_0(\tau) - [\bar\tau\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)]\,\mathrm{e}^{2i\theta}\}. \qquad (2)$$

Здесь $\tau = \lambda\,\mathrm{e}^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$); $\nu$, $\nu_0$ — коэффициенты Пуассона материала пластины и шайбы соответственно; $D$, $D_0$ — цилиндрические жесткости пластины и шайбы; $g(\tau)$ — искомая функция натяга, которая подлежит определению из дополнительного условия; $\varepsilon = -(3+\nu)/(1-\nu)$; $\varepsilon_0 = -(3+\nu_0)/(1-\nu_0)$.

Искомая комплексная функция $g(\tau)$ характеризует скачки смещений при переходе через линию раздела сред:

$$(u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-) = g(\tau) \qquad \text{на } L_{mn}.$$

Функция $g(\tau)$ зависит от геометрии вставленных шайб до деформации и от способа, которым были приведены в соприкосновение точки, принадлежащие контурам шайб и отверстий пластины.

Согласно теории Кирхгофа рассматриваемая задача сводится к отысканию двух пар функций $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ и $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$, аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющих граничным условиям (1), (2).

Для нахождения функции натяга соединения введем в задачу в качестве условия определения натяга соединения (функции $g(\theta)$) условие равнопрочности на контурах круглых отверстий. Требуется определить функцию $g(\theta)$, так чтобы созданное натягом в процессе нагружения составного тела напряженно-деформированное поле обеспечивало выполнение условия равнопрочности на контурах круглых отверстий в изгибаемой пластине. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию $g(\theta)$ натяга запрессовки.

**Метод решения.** Комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние шайбы, будем искать в виде [11]

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \qquad \Psi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_{2k} z^{2k}. \qquad (3)$$

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние пластины, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий, с учетом средних моментов найдем в виде [10]

$$\Phi(z) = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)} + \Phi_1(z), \qquad \Psi(z) = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-\nu)} + \Psi_1(z),$$

$$\Phi_1(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\,\frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \qquad (4)$$

$$\Psi_1(z) = \beta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}\,\frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\,\frac{\lambda^{2k+2}Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

где $\gamma(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса; $Q(z)$ — специальная мероморфная функция (см. [10]).

Приведем зависимости [10], которым должны удовлетворять коэффициенты представлений (4). Из условий равенства нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области, занятой материалом пластины, следует

$$\alpha_0 = (K_0\alpha_2 + K_1\beta_2)\lambda^2, \qquad \beta_0 = (K_2\alpha_2 + K_3\beta_2)\lambda^2.$$

Выражения для величин $K_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ приведены в работе [10].

Из условий симметрии относительно координатных осей находим

$$\operatorname{Im}\alpha_{2k} = 0, \qquad \operatorname{Im}\beta_{2k} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Можно убедиться, что представления (4) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением напряжений.

Не уменьшая общности поставленной задачи оптимизации, искомую функцию $g'(\tau)$ можно представить в виде отрезка ряда Фурье

$$g'(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^{\text{н}}_{2k}\, \mathrm{e}^{i2k\theta},$$

где

$$A^{\text{н}}_{2k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g'(\tau)\, \mathrm{e}^{-2ki\theta}\, d\theta, \qquad \operatorname{Im} A^{\text{н}}_{2k} = 0 \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

В этом случае задача оптимизации сводится к определению коэффициентов $A^{\text{н}}_{2k}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ — параметров управления.

Обозначим левую часть краевого условия (1) через $f_1 - if_2$ и предположим, что на контуре $L_{0,0}$ функция $f_1 - if_2$ разлагается в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1 - if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}\, \mathrm{e}^{2ki\theta}, \qquad \operatorname{Im} A_{2k} = 0 \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{5}$$

На основе граничного условия (1) и соотношений (3), (5), применяя метод степенных рядов, получим соотношения

$$a_0 = \frac{A_0 - A^{\text{н}}_0}{2}, \qquad a_{2k} = \frac{A_{-2k} - A^{\text{н}}_{-2k}}{\lambda^{2k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$a'_{2k} = -(2k+1)\,\frac{A_{-2k-2} - A^{\text{н}}_{-2k-2}}{\lambda^{2k}} - \frac{A_{2k+2} - A^{\text{н}}_{2k+2}}{\lambda^{2k}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

определяющие коэффициенты $a_{2k}$, $a'_{2k}$ функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$.

Для определения величин $A_{2k}$ рассмотрим решение задачи для пластины.

Используя комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, после некоторых преобразований краевые условия на контуре круглого отверстия $(\tau = \lambda\, \mathrm{e}^{i\theta})$ для потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ можно записать в виде

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]\, \mathrm{e}^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}\, \mathrm{e}^{2ki\theta}; \tag{6}$$

$$\varepsilon\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]\,\mathrm{e}^{2i\theta} =$$
$$= \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)}\Big(\frac{1+\varepsilon_0}{2}\,C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}\,\mathrm{e}^{2ki\theta} + \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_{-2k}\,\mathrm{e}^{-2ki\theta}\Big). \qquad (7)$$

Здесь $C_{2k} = A_{2k} - A_{2k}^{\text{н}}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Краевое условие (6) служит для определения коэффициентов $\alpha_{2k}$ и $\beta_{2k}$, а граничное условие (7) — для определения величин $A_{2k}$.

Используя методы решения, изложенные в [10], получим три бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно $\alpha_{2k}$, $\beta_{2k}$ и $A_{2k}$:

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k}\alpha_{2k+2} + b_j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots), \qquad a_{j,k} = (2j+1)\gamma_{j,k}\lambda^{2j+2k+2}; \qquad (8)$$

$$\gamma_{0,0}^{*} = \frac{3}{8}\,g_2\lambda^2 + K_2 + \frac{(1+\varepsilon)\lambda^2 K_0 K_3}{K_4} + \varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i+1)g_{i+1}^2\lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}},$$

$$\gamma_{0,k}^{*} = -\frac{(2k+2)\rho_{k+1}}{2^{2k+2}} + \frac{(2k+4)!\,g_{k+2}\lambda^2}{2!(2k+2)!2^{2k+4}} + \frac{(1+\varepsilon)\lambda^2 K_3 g_{k+1}}{K_4 2^{2k+2}} +$$
$$+ \varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2j+2i+1)!\,g_{i+1}g_{k+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2k+1)!(2i)!2^{2k+4i+4}} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\gamma_{j,0} = -\frac{(2j+2)!\rho_{j+1}}{2^{2j+2}} + \frac{(2j+4)!\,g_{j+2}\lambda^2}{(2)!(2j+2)!2^{2j+4}} + \frac{(1+\varepsilon)\lambda^2 K_0 g_{j+1}}{[1-(1+\varepsilon)K_1\lambda^2]2^{2j+2}} + \qquad (9)$$
$$+ \varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2j+2i+1)!\,g_{i+1}g_{j+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2i)!2^{4j+4i+4}} \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

$$\gamma_{j,k} = \gamma_{k,j} = -\frac{(2j+2k+2)!\rho_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)!2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)!\,g_{j+k+2}\lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)!2^{2j+2k+4}} +$$
$$+ \frac{g_{j+1}g_{k+1}\lambda^2}{2^{2j+2k+4}}\Big[1 + \frac{(1+\varepsilon)^2 K_1\lambda^2}{1-(1+\varepsilon)K_1\lambda^2}\Big] +$$
$$+ \varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)!\,g_{j+i+1}g_{k+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)!2^{2j+2k+4i+4}} \quad (j, k = 1, 2, \ldots).$$

Величины $\gamma_{j,k}$, входящие в систему (8), определены в (9) при $\varepsilon = 1$. Величины $\gamma_{j,k}^{*}$ находятся по формулам (9) при $\varepsilon = -(3+\nu)/(1-\nu)$. Постоянные $\beta_{2k}$ определяются из следующих соотношений:

$$\beta_2 = \frac{1}{1-2K_1\lambda^2}\Big(-A_0 + \frac{M_x^{\infty} + M_y^{\infty}}{2D(1+\nu)} + 2\lambda^2\alpha_2 K_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}\alpha_{2k+2}}{2^{2k+2}}\Big),$$
$$\beta_{2j+4} = (2j+3)\alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2j+2k+3)!\,g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}\alpha_{2k+2}}{(2j+2)!(2k+1)!2^{2j+2k+4}} - A_{-2j-2}; \qquad (10)$$
$$A_{2j+2} = \frac{1-\varepsilon}{1-\mu_0/\mu}\,\alpha_{2j+2} - \frac{\mu_0}{\mu(1-\mu_0/\mu)}\,A_{2j+2}^{\text{н}},$$

$$A_{-2j} = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon_0\mu_0/\mu}\sum_{k=0}^{\infty} r_{j,k}\lambda^{2k+2j+2}\alpha_{2k+2} - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\mu(1-\varepsilon_0\mu_0/\mu)}\, A^{\text{н}}_{-2j} \qquad (j=0,1,2,\ldots),$$

$$A_0 = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{0,k}\lambda^{2k+2}A_{2k+2} + Q_0\,\frac{M_x^{\infty}+M_y^{\infty}}{4D(1+\nu)} - \sum_{k=0}^{\infty} Q'_{0,k}\lambda^{2k+2}A^{\text{н}}_{2k+2} - \frac{(1+\varepsilon_0)\mu_0/\mu}{(1-2K_1\lambda^2)Q}\, A^{\text{н}}_0;$$

$$A_{2j} = \sum_{k=0}^{\infty} d_{j,k}A_{2k+2} + T_j \qquad (j=0,1,2,\ldots), \tag{11}$$

где

$$Q_{0,k} = r_{0,k}\,\frac{1-\mu_0/\mu}{(1-2K_1\lambda^2)Q}, \qquad r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)!\,g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)!\,2^{2j+2k+2}},$$

$$Q'_{0,k} = -r_{0,k}\,\frac{\mu_0/\mu}{(1-2K_1\lambda^2)Q}, \qquad Q_0 = \frac{\varepsilon-1}{(1-2K_1\lambda^2)Q},$$

$$Q = -\frac{\mu_0}{\mu}\,\frac{1-\varepsilon_0}{2} + \frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{1-\varepsilon}{1-2K_1\lambda^2}, \qquad g_{j+k+1} = {\sum_{m,n}}'\,\frac{1}{T^{2j+2k+2}},$$

$$\rho_j = {\sum_{m,n}}'\,\frac{\overline{T}}{T^{2j+1}}, \qquad T = \frac{1}{2}\,P_{mn},$$

$$d_{j,k} = \frac{(2j+1)\lambda^{2j+2k+2}S_{j,k}}{\gamma}, \qquad T_j = \frac{t_j}{\gamma}, \qquad S_{j,k} = \frac{1-\mu/\mu_0}{1-\varepsilon}\Big(\gamma_{j,k} + \frac{\mu_0}{\mu\varepsilon_0}\,\gamma^{*}_{j,k} + D_{j,k}\Big),$$

$$D_{j,k} = \frac{g_{j+1}g_{k+1}\lambda^2}{2^{2j+2k+4}}\,\eta\Big(\frac{\mu}{\mu_0}\Big), \qquad D_{0,0} = \lambda^2K_0^2\eta\Big(\frac{\mu}{\mu_0}\Big), \qquad \eta\Big(\frac{\mu}{\mu_0}\Big) = \frac{C}{C_1},$$

$$D_{0,k} = \lambda^2K_0^2\,\frac{g_{k+1}}{2^{2k+2}}\,\eta\Big(\frac{\mu}{\mu_0}\Big), \qquad T_j = T_j^{*} + H_j,$$

$$C = \frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{1-(1+\varepsilon)K_1\lambda^2} - \frac{2}{1-2K_1\lambda^2}, \qquad T_j^{*} = \frac{t_j^{*}}{\gamma},$$

$$C_1 = 1-(1-2K_1\lambda^2)\Big(\frac{\mu}{\mu_0}\,\frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\Big), \qquad H_j = \frac{h_j}{\gamma},$$

$$t_0^{*} = \frac{M_y^{\infty}-M_x^{\infty}}{2(1-\nu)D}\Big(1+\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\mu}\Big), \qquad t_j^{*} = \frac{M_x^{\infty}+M_y^{\infty}}{4(1+\nu)D}\,\frac{(2j+1)g_{j+1}}{2^{2j+2}}\,\lambda^{2j+2}\eta_1\Big(\frac{\mu}{\mu_0}\Big),$$

$$\eta_1\Big(\frac{\mu}{\mu_0}\Big) = \frac{C_2}{C_3}, \qquad C_2 = \Big(1-\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\mu}\Big)\Big(1+\varepsilon-\frac{\mu}{\mu_0}\,(1+\varepsilon_0)\Big),$$

$$C_3 = 1-(1+\varepsilon)K_1\lambda^2 - \frac{\mu}{2\mu_0}\,(1+\varepsilon_0)(1-2K_1\lambda^2),$$

$$\gamma = \frac{(1-\mu/\mu_0)(1-\varepsilon\mu_0/(\varepsilon_0\mu))}{1-\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}, \qquad h_0 = -\frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{k+2}\lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}}\,A^{\text{н}}_{-2k-2},$$

$$h_j = \frac{(2j+1)g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}}\,(1-\varepsilon_0)\Big[\frac{\mu}{2Q\mu_0}\Big(\frac{1}{1-2K_1\lambda^2} - \frac{1+\varepsilon_0}{2(1-(1+\varepsilon)K_1\lambda^2)\varepsilon}\Big) -$$
$$- \frac{1}{2(1-(1+\varepsilon)K_1\lambda^2)\varepsilon}\Big](-A_0^{\text{н}}) + \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}}\,A_{2k+2}^{\text{н}}$$

(штрих у знака суммы означает, что при суммировании исключаются индексы $m = n = 0$).

В случае правильных решеток, представляющих наибольший практический интерес, систему уравнений (8), (10), (11) можно упростить.

Для треугольной сетки отверстий ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2\exp(i\pi/3)$) система уравнений (11) принимает вид

$$A_{6j} = \sum_{k=1}^{\infty} d_{3j-1,3k-1}A_{6k} + T_{3j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Для квадратной сетки отверстий ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$) система уравнений (11) имеет вид

$$A_{4j} = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2j-1,2k-1}A_{4k} + T_{2j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Полученные системы (8), (10) и (11) при заданном натяге полностью определяют решение задачи о напряженно-деформированном состоянии упругой пластины, подкрепленной шайбами из другого упругого материала.

До сих пор натяг формально считался заданным. Вернемся к задаче оптимизации и определим коэффициенты $A_{2k}^{\text{н}}$. Для этого построим недостающие уравнения для замыкания систем уравнений (8), (10), (11).

С помощью формул [11]

$$M_\theta + M_\rho = -4D(1+\nu)\operatorname{Re}\Phi(z),$$
$$M_\theta - M_\rho + 2iH_{\rho\theta} = 2D(1-\nu)[\bar z\Phi'(z) + \Psi(z)]\,\mathrm{e}^{2i\theta}$$

найдем изгибающий момент $M_\theta$ на контуре отверстия в пластине $|\tau| = \lambda$:

$$M_\theta = \frac{1}{2}\,(M_x^\infty + M_y^\infty) + \frac{1}{2}\,(M_y^\infty - M_x^\infty)\cos 2\theta -$$
$$- 2D(1+v)\Big(\alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\cos{(2k+2)\theta} + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{2k+2j+2}r_{j,k}\cos 2j\theta\Big) +$$
$$+ D(1-\nu)\Big(\beta_0\cos 2\theta - \sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)\alpha_{2k+2}\cos{(2k+2)\theta} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\lambda^{2k+2j+2}2jr_{j,k}\cos 2j\theta +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+2}\cos 2k\theta + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{2k+2}\lambda^{2k+2j+2}r_{j,k}\cos{(2j+2)\theta} -$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(2k+2)\alpha_{2k+2}\lambda^{2k+2j+2}S_{j,k}\cos{(2j+2)\theta}\Big). \qquad (12)$$

В формуле (12) коэффициенты $\alpha_{2k}$ и $\beta_{2k}$ зависят от величин $A_{2k}^{\text{н}}$ — коэффициентов ряда Фурье искомой функции натяга. Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить эти коэффициенты, используем принцип наименьших квадратов, т. е. подберем такие значения коэффициентов $A^{\text{н}}_{2k}$, чтобы обеспечить минимизацию напряжений на контуре отверстий пластины:

$$\sum_{i=1}^{N}[M_\theta(\theta_i) - M_0]^2 \to \min.$$

Здесь $M_0$ — оптимальное значение изгибающего момента на контуре отверстия, подлежащее определению в процессе решения задачи.

Разбиваем отрезок $[0, 2\pi]$ на $N$ равных частей: $\Delta\theta = 2\pi/N$. В точках разбиения (узлах) $\theta_i$ вычисляем значения функции $M_\theta(\theta_i)$. Правая часть выражения

$$U = \sum_{i=1}^{N}[M_\theta(\theta_i) - M_0]^2$$

представляет собой функцию, которая зависит от управляющих параметров $A^{\text{н}}_{2k}$, $M_0$ и явно зависит от коэффициентов $\alpha_{2k}$, $\beta_{2k}$. В свою очередь, коэффициенты $\alpha_{2k}$, $\beta_{2k}$ зависят от коэффициентов $A^{\text{н}}_{2k}$ (см. системы (8), (10), (11)).

Из (12) с использованием (10) исключаем коэффициенты $\beta_{2k}$.

Согласно методу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами $\alpha_{2k}(A^{\text{н}}_{2k})$ и $M_0$ считаются такие, при которых функция $U$ принимает минимальные значения. Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных, получаем бесконечную систему уравнений для определения величин $M_0$, $\alpha_{2k}(A^{\text{н}}_{2k})$:

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \alpha_{2k}} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Система уравнений (13) упрощается, так как функция $M_\theta(\theta, \alpha_{2k})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ линейна относительно параметров $\alpha_{2k}$ и ее можно представить в виде

$$M_\theta(\theta, \alpha_{2k}) = f_0 + \alpha_2 f_2(\theta) + \alpha_4 f_4(\theta) + \alpha_6 f_6(\theta) + \ldots + \alpha_{2k+2} f_{2k+2}(\theta) + \ldots.$$

Остальные величины (частные производные) находятся легко. С учетом полученных соотношений запишем следующую линейную систему относительно неизвестных $M_0, \alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2k+2}, \ldots$:

$$\begin{gathered}
-NM_0 + \alpha_0 \sum_{i=1}^{N} f_2(\theta_i) + \alpha_4 \sum_{i=1}^{N} f_4(\theta_i) + \ldots + \alpha_{2k+2} \sum_{i=1}^{N} f_{2k+2}(\theta_i) + \ldots = -\sum_{i=1}^{N} f_0(\theta_i),\\
\alpha_2(f_2, f_2) + \alpha_4(f_2, f_4) + \ldots + \alpha_{2k+2}(f_2, f_{2k+2}) + \ldots = (f_2, Y),\\
\alpha_2(f_4, f_2) + \alpha_4(f_4, f_4) + \ldots + \alpha_{2k+2}(f_4, f_{2k+2}) + \ldots = (f_4, Y),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_2(f_{2k+2}, f_2) + \alpha_4(f_{2k+2}, f_4) + \ldots + \alpha_{2k+2}(f_{2k+2}, f_{2k+2}) + \ldots = (f_{2k+2}, Y),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(k = 0, 1, 2, \ldots),
\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$(f_j, f_k) = \sum_{i=1}^{N} f_j(\theta_i) f_k(\theta_i), \qquad (f_j, Y) = \sum_{i=1}^{N} f_j(\theta_i) Y_i, \qquad Y_i = M_0 - f_0(\theta_i).$$

**Анализ результатов.** Бесконечная система (14) совместно с системами (8), (10), (11) позволяет определить напряженно-деформированное состояние пластины, оптимальный натяг для посадки упругих шайб в отверстия и оптимальное значение нормального тангенциального изгибающего момента на контуре отверстия пластины. Однако эти системы весьма громоздки. Так как $0 \leqslant \lambda < 1$, а параметр $\lambda$ в высоких степенях входит в данные системы, то их можно значительно упростить. При решении большинства важных практических задач каждую из этих систем можно урезать до двух-трех уравнений и тем не менее получить достаточно точные результаты для рабочих диапазонов радиуса $\lambda$ отверстия.

Для численной реализации изложенного способа решались совместно линейные алгебраические системы (8), (10), (11) и (14). Использовался метод урезания алгебраических систем. Исследовались односторонний изгиб пластины постоянными моментами $M_y^\infty$ ($M_x^\infty = 0$) и всесторонний изгиб моментами $M_x^\infty = M_y^\infty = M$ для правильных решеток. Урезанные системы уравнений решались методом Гаусса с выбором главного элемента в зависимости от радиуса отверстий.

В табл. 1 приведены результаты расчетов коэффициента $A_{2k}^{\text{н}}$ при различных значениях радиуса отверстий для треугольной сетки отверстий, в табл. 2 — для квадратной сетки отверстий. В расчетах было принято: для пластины — $\nu = 0{,}30$; $\mu = 2{,}5 \cdot 10^5$ МПа; для включения — $\nu_0 = 0{,}32$; $\mu_0 = 3{,}6 \cdot 10^5$ МПа.

Таблица 1

Результаты расчета коэффициента $A_{2k}^{\text{н}}$ для треугольной сетки отверстий

| $\lambda$ | $A_0^{\text{н}}$ | | $A_6^{\text{н}}$ | | $A_{12}^{\text{н}}$ | | $A_{18}^{\text{н}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ОИ | ВИ | ОИ | ВИ | ОИ | ВИ | ОИ | ВИ |
| 0,2 | 0,071 | 0,062 | 0,043 | 0,034 | 0,019 | 0,011 | 0,006 | 0,003 |
| 0,3 | 0,094 | 0,078 | 0,062 | 0,048 | 0,023 | 0,017 | 0,009 | 0,005 |
| 0,4 | 0,117 | 0,102 | 0,078 | 0,069 | 0,034 | 0,021 | 0,012 | 0,009 |
| 0,5 | 0,136 | 0,122 | 0,080 | 0,071 | 0,041 | 0,032 | 0,015 | 0,011 |
| 0,6 | 0,159 | 0,141 | 0,095 | 0,084 | 0,053 | 0,039 | 0,019 | 0,013 |
| 0,7 | 0,172 | 0,158 | 0,092 | 0,086 | 0,066 | 0,055 | 0,027 | 0,021 |

Примечание. ОИ — односторонний изгиб, ВИ — всесторонний изгиб

Таблица 2

Результаты расчета коэффициента $A_{2k}^{\text{н}}$ для квадратной сетки отверстий

| $\lambda$ | $A_0^{\text{н}}$ | | $A_4^{\text{н}}$ | | $A_8^{\text{н}}$ | | $A_{12}^{\text{н}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ОИ | ВИ | ОИ | ВИ | ОИ | ВИ | ОИ | ВИ |
| 0,2 | 0,082 | 0,074 | 0,051 | 0,043 | 0,018 | 0,014 | 0,007 | 0,004 |
| 0,3 | 0,108 | 0,096 | 0,067 | 0,061 | 0,025 | 0,020 | 0,008 | 0,005 |
| 0,4 | 0,139 | 0,124 | 0,086 | 0,072 | 0,032 | 0,018 | 0,011 | 0,009 |
| 0,5 | 0,151 | 0,143 | 0,093 | 0,084 | 0,038 | 0,028 | 0,015 | 0,011 |
| 0,6 | 0,173 | 0,158 | 0,108 | 0,091 | 0,046 | 0,033 | 0,017 | 0,015 |
| 0,7 | 0,190 | 0,182 | 0,116 | 0,104 | 0,053 | 0,042 | 0,022 | 0,018 |

Примечание. ОИ — односторонний изгиб, ВИ — всесторонний изгиб

Случай кольцевых шайб рассматривается аналогично: комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ ищутся в виде [11]

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \qquad \Psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_{2k} z^{2k}$$

и добавляется граничное условие отсутствия усилий на внутреннем контуре кольцевой шайбы.

Аналогично задача может быть рассмотрена для иных критериев выбора натяга.

Следует отметить, что значение $M_0$ можно выбирать заранее из условия обеспечения несущей способности пластины. Однако расчеты показывают, что при определении неизвестного оптимального значения $M_\theta$ сумма квадратов отклонений уменьшается, т. е. результаты поиска оказываются более точными.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Решетов Д. Н.** Состояние и тенденции развития деталей машин // Вестн. машиностроения. 2000. № 10. С. 11–15.
2. **Mirsalimov V. M., Allahyarov E. A.** The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching // Intern. J. Fracture. 1996. V. 79, N 1. P. R.17–R.21.
3. **Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М.** Обратная задача теории упругости для составного цилиндра контактной пары // Механика-машиностроение. 2002. № 2. С. 5–7.
4. **Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М.** Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / Под ред. Д. М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 196–207.
5. **Гаджиев Г. Х.** Определение оптимального натяга для составного цилиндра контактной пары с учетом температурных напряжений и шероховатого внутреннего контура // Изв. вузов. Машиностроение. 2003. № 7. С. 15–23.
6. **Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М.** Оптимальное проектирование контактной пары составной цилиндр-плунжер // Трение и износ. 2004. Т. 25, № 5. С. 466–473.
7. **Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М.** Об одном способе снижения износа втулки составного цилиндра контактной пары // Тр. междунар. конгр. “Механика и трибология транспортных систем”, Ростов-на-Дону, 10–13 сент. 2003 г. Ростов н/Д: Ростов. гос. ун-т путей сообщ., 2003. Т. 1. С. 219–221.
8. **Гаджиев Г. Х.** Оптимальное проектирование составного цилиндра контактной пары // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2003. № 5. С. 81–86.
9. **Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М.** Минимизация износа внутренней поверхности втулки составного цилиндра контактной пары // Трение и износ. 2004. Т. 25, № 3. С. 231–237.
10. **Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.** Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970.
11. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.


*Поступила в редакцию 13/IV 2005 г.,*
*в окончательном варианте — 22/IX 2005 г.*