ПМТФ, № 1, 1972

УДК 532.523

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ПЕРЕСЧЕТА ЗАКОНА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Л. В. Овсянников

(*Новосибирск*)

Предлагается метод приближенного вычисления поправки к универсальному закону распространения одномерных ударных волн в покоящемся политропном газе в случае, когда волна идет по неоднородной среде.

Законы распространения одномерных взрывных ударных волн в покоящемся политропном газе с постоянным давлением p_{01} и плотностью ρ_{01} обладают свойством универсальности в том смысле, что относительный скачок давления $q_0 = (p_{02} - p_{01}) / p_{01}$ в такой ударной волне, рассматриваемый как функция от относительного расстояния $\xi = r / r_0$ (при надлежащем выборе масштаба длин r_0), не зависит от величины p_{01}. Эти законы достаточно хорошо изучены. В частности, для точечного взрыва имеются рассчитанные детальные таблицы [1] и аппроксимирующие их формулы [2].

Если начальное распределение давления в газе $p_1 = p_1(\xi)$, оставаясь одномерным, не является постоянным, то относительный скачок давления в ударной волне $q = (p_2 - p_1) / p_1$ уже не будет универсальной функцией ξ, но будет зависеть от всего распределения $p_1(\xi')$ при $\xi' < \xi$. Ввиду этого соответствующую зависимость надо записывать в виде $q = q(\xi, p_1)$. Аналитическое исследование операторной зависимости q от $p_1(\xi)$ является очень сложной задачей, к решению которой прямого подхода пока не видно. Поэтому имеют смысл предложения приближенного анализа этой зависимости, которые дожны приводить к методам приближенного пересчета универсального закона $q_0(\xi)$ в закон $q(\xi, p_1)$. Эта работа и посвящена построению одного из таких приближений.

Обе зависимости ($q_0(\xi)$ и $q(\xi, p_1)$) сравниваются в тех точках, в которых величины q_0 и q равны. Это приводит к задаче об отыскании функции $\eta(\xi)$, при которой будет выполнено равенство

$$q(\xi, p_1) = q_0(\eta(\xi)) \tag{1}$$

Пусть в некоторой точке ξ и $\eta = \eta(\xi)$ равенство (1) выполнено. Его продолжение в точку $\xi + d\xi$, $d\xi > 0$ осуществляется путем сравнения дифференциалов левой и правой частей. Для правой части это будет просто

$$dq_0 = q_0'(\eta) \frac{d\eta}{d\xi} d\xi \tag{2}$$

штрих здесь и всюду ниже означает производную функцию по обозначенному аргументу.

Дифференциал левой части представляется в виде

$$dq(\xi, p_1) = \partial q + \delta q \tag{3}$$

где ∂q берется для распределения, совпадающего с заданным левее точки ξ и равного $p_1(\xi)$ правее точки ξ, а δq означает дифференциал, взятый соответственно изменению $p_1(\xi)$ от значения p_1 до $p_1 + s$, где $s = p_1'(\xi)\,d\xi$. Для приближенного вычисления этих дифференциалов делаются два упрощающих предположения.

1°. Величина ∂q не зависит от «истории» движения. Это означает, что если для $d\xi > 0$ измененное давление p_1 остается постоянным и равным $p_1(\xi)$, то при $d\xi > 0$ ударная волна будет распространяться по универсальному закону. Так как в рассматриваемой точке выполнено равенство (1), то из предположения 1° следует, что входящая в ∂q «скорость изменения» величины q равна $q_0'(\eta)$, в силу чего

$$\partial q = q_0'(\eta)\,d\xi \tag{4}$$

2°. Величина δq формируется за счет того, что ударная волна в точке ξ встречает покоящийся газ с давлением $p_{1s} = p_1 + s$, а затем происходит распад разрыва между состоянием 2 за пришедшей в точку ξ ударной волной и состоянием $1s$. Пусть в этом распаде разрыва сформировалась ударная волна с давлением p_{2s} на фронте за волной. Тогда измененное значение q будет равно $q_s = (p_{2s} - p_{1s}) / p_{1s}$. Предположение 2° сводится к тому, что δq полагается равным главной части приращения $q_s - q$. Поэтому учет лишь малой величины первого порядка по s дает

$$\delta q = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p_{2s}}{p_{1s}}\right)\Big|_{s=0} p_1'(\xi)\,d\xi \tag{5}$$

Удобно ввести в рассмотрение функцию, которая вполне определяется вышеупомянутым распадом разрыва

$$\psi(q) = p_1 \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p_{2s}}{p_{1s}}\right)\Big|_{s=0} \tag{6}$$

Сравнение (2) и (3) с учетом выражений (4), (5) и обозначения (6) после деления на $q_0'(\eta)\,d\xi$ приводит к соотношению

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 1 + \frac{\psi(q_0(\eta))}{q_0'(\eta)}\,\frac{d}{d\xi}\ln p_1(\xi) \tag{7}$$

Так как правая часть в (7) — известная функция переменных ξ, η, то (7) — дифференциальное уравнение для определения искомой зависимости $\eta(\xi)$. Его решение при начальном условии $\eta(0) = 0$ после подстановки в (1) даст относительный скачок давления в ударной волне, идущей по распределению $p_1(\xi)$.

Итак, предлагаемый метод пересчета сводится к интегрированию уравнения (7) и использованию равенства (1).

Остается вычислить функцию $\psi(q)$ по формуле (6). Для этого используется уравнение распада разрыва между левым состоянием 2 и правым состоянием $1s$ в политропном газе с показателем адиабаты γ (u_2 — массовая скорость в левом состоянии)

$$u_2 = \sqrt{2\tau_2}\,\frac{p_{2s} - p_2}{\sqrt{(\gamma+1)\,p_{2s} + (\gamma-1)\,p_2}} + \sqrt{2\tau_{1s}}\,\frac{p_{2s} - p_{1s}}{\sqrt{(\gamma+1)\,p_{2s} + (\gamma-1)\,p_{1s}}} \tag{8}$$

где удельные объемы τ даются формулами

$$\tau_2 = \tau_1\,\frac{(\gamma-1)\,p_2 + (\gamma+1)\,p_1}{(\gamma+1)\,p_2 + (\gamma-1)\,p_1}, \qquad \tau_{1s} = \tau_1\left(\frac{p_{1s}}{p_1}\right)^{1/\gamma}$$

Дифференцирование (8) по s в точке $s = 0$ и учет того, что $p_2 = (1 + q)\, p_1$, дает уравнение для ψ, из которого получается следующий результат:

$$\psi(q) = -\frac{2(1+\mu q)\sqrt{1+q}\,[\sqrt{1+(1-\mu)q}\,\sqrt{1+q} + (1-\mu)q]}{2(1+\mu q)\sqrt{1+(1-\mu)q} + (2+\mu q)\sqrt{1+q}}$$

$$\mu = \frac{(\gamma+1)}{2\gamma} \qquad (9)$$

Для практически важного случая малых значений q можно использовать вытекающее из (9) приближенное представление

$$\psi(q) \approx -{}^{1}/_{2}\,[1 + (2-\mu)q]$$

В заключение автор считает своим долгом отметить, что предложение о реализации подобного приближенного метода пересчета было выдвинуто В. А. Бронштэном и что эта работа возникла в результате совместной плодотворной дискуссии.

Поступила 22 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Охоцимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1957, т. 50.
2. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.