

УДК 004.93

## СИНТЕЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ЗАДАННОЙ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ\*

Б. Н. Грудин, Е. Л. Кулешов, В. С. Плотников, С. В. Полищук

*Дальневосточный федеральный университет,  
690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8  
E-mail: grudin.bn@dvfu.ru*

На основе пространственно-частотной фильтрации разработаны методы синтеза фрактальных изображений, для которых структурные функции являются степенными в большом интервале приращений, составляющем около четверти размера изображения. Показано, что с помощью функции Вейерштрасса могут быть смоделированы только стационарные процессы (изображения). Предложен и исследован алгоритм моделирования фрактальных броуновских изображений. Установлено, что интегральная характеристика спектра броуновского изображения с параметром Хёрста  $\alpha$  хорошо аппроксимируется степенной функцией с показателем  $2(\alpha + 1)$  при  $\alpha \in (0, 1/2]$  и показателем степени равным 3 для  $\alpha \in (1/2, 1)$ . На примерах модификации изображений образцов аморфных сплавов продемонстрировано, что можно смоделировать мало отличающиеся от исходного статистически самоподобные изображения. Это позволяет установить, в какой степени визуализированные на изображениях структуры проявляют фрактальные свойства.

*Ключевые слова:* фрактальный броуновский процесс, корреляционная функция, спектральная плотность, пространственно-частотная фильтрация, структурная функция.

**Введение.** Фрактальный анализ изображений в электронной и оптической микроскопии, аэрокосмическом мониторинге природных ресурсов и облачного покрова, медицине, компьютерной графике и т. д. [1–3] проводится в тех случаях, когда необходимо установить, в какой степени отображённые на изображениях структуры проявляют фрактальные свойства. Один из наиболее распространённых критериев наличия фрактальных признаков основан на спектрах. Например, стохастическое двумерное поле можно считать спектрально самоподобным, если его спектр описывается степенной функцией, убывающей с ростом частоты [4, с. 356]. В этом случае спектральная плотность поля инвариантна при мультипликативных изменениях масштаба [2, с. 174].

Другой критерий основан на использовании структурной функции первого порядка (математическое ожидание модуля приращения) и структурной функции второго порядка (математическое ожидание квадрата модуля приращения). Данный критерий предпочтительнее, поскольку, например, фрактальные броуновские процессы и двумерные поля должны иметь степенную структурную функцию, при этом не накладываются ограничения на вид спектральной плотности. Интервал (начиная от самых малых приращений), в пределах которого структурные функции хорошо аппроксимируются степенной зависимостью, определяет ширину области скейлинга. Для изображений с фрактальными свойствами этот интервал должен быть значительным [5]. По показателю степени  $\alpha$  структурной функции первого порядка можно методом покрытий изображения кубами оценить фрактальную размерность  $d = 3 - \alpha$ . Если показатель степени структурной функции второго

\*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК № 16.552.11.7059, госзадание № 2.8649.2013) и проекта «Научный фонд ДВФУ» (№ 12-02-13004-19/13).

порядка точно в 2 раза превосходит показатель степени структурной функции первого порядка, то можно говорить о статистическом самоподобии в распределении вероятностей приращений [5, 6].

К сожалению, на сегодняшний день даже смоделированные изображения не удовлетворяют второму критерию, особенно при малых значениях приращений, а область скейлинга для них, как правило, незначительна [5]. Это связано с цифровым представлением изображений, особенностями алгоритмов моделирования, применением дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Для реальных изображений фрактальные свойства маскируются шумами, недостаточной разрешающей способностью и особенностями частотной характеристики системы визуализации [7].

Цель данной работы — создание на основе пространственно-частотной фильтрации методов синтеза фрактальных изображений, для которых структурные функции являются степенными в большом диапазоне изменения приращений.

**Моделирование стохастических изображений со степенной структурной функцией.** Пусть функция  $f(x, y)$  представляет собой распределение яркости непрерывного изображения, а  $F(u_1, u_2)$  и  $I(u_1, u_2) = |F(u_1, u_2)|^2$  — соответственно фурье-образ и энергетический спектр изображения  $f(x, y)$ , где  $(x, y)$  — декартовы координаты,  $(u_1, u_2)$  — декартовы пространственные частоты. В полярной системе координат ( $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ ,  $\varphi = \arctg(u_2/u_1)$ ) интегрирование энергетического спектра  $I(u, \varphi)$  по углу даёт интегральную характеристику  $V(u)$ , инвариантную относительно сдвига и вращения исходного изображения [7, 8].

Для изотропного случайного двумерного поля  $f(x, y)$  корреляционная функция  $B(r)$  и спектральная плотность  $W(u)$  поля связаны между собой преобразованием Фурье, а структурная функция второго порядка  $D_2(r) = 2B(0) - 2B(r)$  [9, с. 65], причём  $B, W, D_2$  — это функции одного аргумента. Далее положим, что матрица дискретного представления  $f(j_1, j_2)$  непрерывного изображения  $f(x, y)$  квадратная размера  $N \times N$  элементов и  $j_1, j_2$  принимают значения  $0, 1, \dots, N - 1$ . В результате дискретного преобразования Фурье матрица  $f(j_1, j_2)$  преобразуется в матрицу  $F(m, n)$  того же размера  $N \times N$ . Энергетический спектр дискретного изображения обозначим как  $I(m, n) = |F(m, n)|^2$ , а в полярной системе координат ( $k = \sqrt{m^2 + n^2}$ ,  $\theta = \arctg(n/m)$ ) дискретные представления энергетического спектра  $I(u, \varphi)$  и интегральной характеристики  $V(u)$  запишем в виде  $I(k, \theta)$  и  $V(k)$  соответственно.

Для спектрально самоподобных изотропных изображений энергетический спектр  $I(m, n)$  зададим в виде степенной функции  $I(m, n) = (m^2 + n^2)^{-\beta/2}$ ,  $2 < \beta < 4$ , тогда оценку корреляционной функции найдём через обратное ДПФ от  $I(m, n)$ :

$$B(l_1, l_2) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [H^2(m, n)(m^2 + n^2)^{-\beta/2}] \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} (ml_1 + nl_2) \right], \quad (1)$$

с последующим приведением результата к диапазону  $[0, 1]$ . Здесь  $l_1, l_2$  принимают значения  $0, 1, \dots, N - 1$ ,  $H(m, n)$  — передаточная функция фильтра, структуру которого определим далее. Оценки функций  $B(r)$  и  $D_2(r)$  зададим как интегральные характеристики  $V_B(l)$  и  $V_D(l)$  ( $l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ ), полученные из  $B(l_1, l_2)$  и  $D_2(l_1, l_2)$  соответственно.

Отметим, что вычисления на основе ДПФ могут существенно отличаться от аналитических расчётов для полей в непрерывном случае. В частности, известно, что  $(u_1^2 + u_2^2)^{-1/2} \sim \mathcal{F}(x^2 + y^2)^{-1/2}$  ( $\mathcal{F}$  — оператор преобразования Фурье). Однако интегральная характеристика  $V(k)$ , вычисленная для этого случая с использованием ДПФ, практически

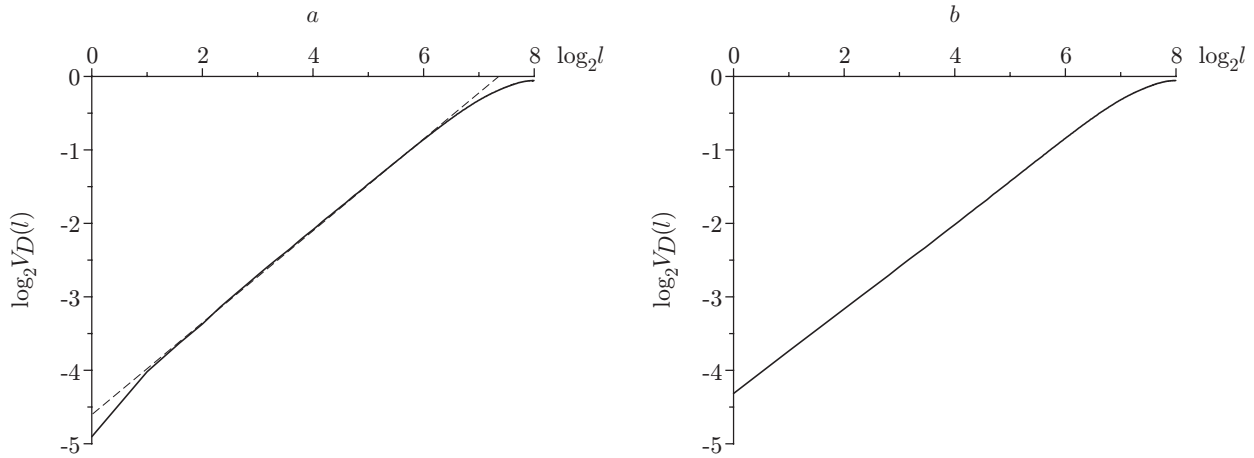


Рис. 1

не отличается от теоретической только в диапазоне частот  $(2\pi k/N) \in [\pi/64; \pi/8]$ . Особенно значительны отличия на высоких частотах, когда  $(2\pi k/N) \in [\pi/2; \pi]$ . Здесь  $V(k)$  очень быстро убывает с ростом частоты.

На рис. 1, *a* показан график функции  $\log_2 V_D(l)$  в зависимости от  $\log_2 l$ , полученный при вычислениях с использованием (1). В данном случае для функции  $V_D(l)$  число отсчётов  $L = 256$ , параметр  $\beta = 2,5$ ,  $H(m, n) = 1$ . График можно аппроксимировать прямой с тангенсом угла наклона  $\mu = 0,588$  на отрезке  $L_S = [8; 64]$  (область скейлинга). В то же время на начальном участке кривой  $\mu = 0,89$ .

Для расширения области  $L_S$  предлагается два метода. В первом используем высоко-частотный фильтр, для которого [10]

$$H(m, n) = H(\omega) = \begin{cases} a_0 + \frac{a_1 - a_0}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi\omega}{2b}\right)^\gamma, & \omega \leq b, \\ a_1 - \frac{a_1 - a_0}{2} \left(1 - \sin \frac{\pi(\omega - b)}{2(1 - b)}\right)^\gamma, & \omega > b, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\omega = \sqrt{m^2 + n^2}/\sqrt{2}(N - 1)$ . Параметры  $a_0$  и  $a_1$  задают значения функции  $H(\omega)$  на краях:  $a_0 = H(0)$ ,  $a_1 = H(1)$ . Параметр  $b$  определяет частоту среза, на которой  $H(\omega = b) = (a_0 + a_1)/2$ , а параметр  $\gamma$  — крутизну изменения  $H(\omega)$  вблизи частоты среза. На рис. 1, *b* показан график функции  $\log_2 V_D(l)$  в зависимости от  $\log_2 l$ , полученный из формулы (1) при  $\beta = 2,5$ ,  $H(a_0 = 0,5, a_1 = 1, b = 0,63, \gamma = 2,5)$ . Здесь при  $N = 512$ ,  $L_S = [1; 128]$  относительное отклонение функции  $\log_2 V_D(l)$  от прямой на отрезке  $L_S$  не превышает величины  $\varepsilon = 0,008$ , а  $\mu = 0,574$ .

Во втором методе предлагается выбрать  $H(m, n) = 1$  и оценку  $I(m, n)$  в соотношении (1) задать как степенную функцию с различными значениями  $\beta$  на отдельных участках области определения энергетического спектра. Если, например, использовать области  $S_1 = \{k \in [0; \pi/64]\}$ ,  $S_2 = \{k \in (\pi/64; \pi/2]\}$ ,  $S_3 = \{k \in (\pi/2; \pi]\}$ , для которых соответственно  $\beta_1 = 3$ ,  $\beta_2 = 2,5$ ,  $\beta_3 = 1$ , то для графика зависимости  $\log_2 V_D(l)$  от  $\log_2 l$  при  $N = 512$  область скейлинга  $L_S = [1; 170]$ ,  $\varepsilon = 0,009$ ,  $\mu = 0,582$ . Возможна также комбинация рассмотренных вариантов. Так, применение формулы (1) для получения оценки структурной функции при  $\beta = 2,5$ ,  $H(a_0 = 0,5, a_1 = 1, b = 0,63, \gamma = 2,5)$  и аппроксимации оценки  $I(m, n)$  в области  $S_1 = \{k \in [0; \pi/64]\}$  степенной зависимостью с показателем  $\beta = 3,2$  позволяет достичь скейлинга на отрезке  $L_S = [1; 180]$  при  $\varepsilon = 0,0065$ .

Для моделирования стохастических изображений со степенной структурной функцией генерировались реализации белого шума, которые пропускались через амплитудные фильтры с характеристиками, соответствующими рассмотренным выше методам. Далее оценивались структурные функции  $D_1(l)$  и  $D_2(l)$  по формуле [5, 11]

$$D_q(l) = \frac{1}{2N(N-l)} \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{N-l-1} |f(j_1, j_2) - f(j_1, j_2 + l)|^q + \frac{1}{2N(N-l)} \sum_{j_1=0}^{N-l-1} \sum_{j_2=0}^{N-1} |f(j_1, j_2) - f(j_1 + l, j_2)|^q. \quad (3)$$

Параметр Хёрста  $\alpha$  и фрактальная размерность  $d = 3 - \alpha$  определялись по тангенсу угла наклона аппроксимирующей прямой в области скейлинга функции  $D_1(l)$ , заданной в двойном логарифмическом масштабе. Например, использование фильтрации в соответствии со вторым методом (с приведёнными выше параметрами) позволяет смоделировать изображения размером  $512 \times 512$  отсчётов, структурная функция  $D_1(l)$  которых имеет область скейлинга  $L_S = [1; 170]$ ,  $\alpha = 0,29 \pm 0,08$ , а для структурной функции  $D_2(l)$  область скейлинга  $L_S = [1; 168]$ ,  $2\alpha = 0,56 \pm 0,1$ . При этом  $V(k)$  для  $k \in [\pi/64; \pi/2]$  является степенной функцией ( $\beta = 2,5 \pm 0,1$ ), т. е. смоделированные изображения в этом диапазоне пространственных частот будут спектрально самоподобными. Машинные эксперименты по моделированию показали, что всегда можно подобрать предлагаемые выше фильтры так, чтобы для смоделированных изображений в случае  $0,01 \leq \alpha < 1$  область скейлинга  $L_S = [1; N/4]$ , если  $\varepsilon = 0,02$ , причём в области скейлинга распределения приращений можно считать статистически самоподобными.

Иногда моделирование стохастических изображений и сигналов со степенной структурной функцией осуществляется с помощью функции Вейерштрасса [5]. Покажем, что таким образом могут быть смоделированы, как и в методе фурье-фильтрации, стационарные (однородные) сигналы (изображения). Для простоты рассмотрим одномерную функцию Вейерштрасса вида

$$w(t) \sim \sum_{i=0}^K \frac{1}{b^{\alpha i}} \cos(ab^i t + \varphi_i), \quad (4)$$

где  $a, b$  — параметры пространственно-частотного масштабирования;  $K+1$  — количество гармоник (при  $K \rightarrow \infty$  функция Вейерштрасса представляет собой идеальный математический фрактал [4]);  $\alpha = 2 - d$ ;  $\varphi_i$  — независимые случайные величины, равномерно распределённые на интервале  $[0, 2\pi]$ . Пусть  $\mathbf{M}$  — оператор математического ожидания, тогда

$$\mathbf{M} \cos(ab^i t + \varphi_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(ab^i t + z) dz = 0 \quad (5)$$

и  $\mathbf{M}w(t) = 0$ . Корреляционная функция процесса  $w(t)$  имеет вид

$$B(t_1, t_2) = \mathbf{M}w(t_1)w(t_2) = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K \frac{1}{b^{\alpha(i+j)}} \mathbf{M} \cos(ab^i t_1 + \varphi_i) \cdot \cos(ab^j t_2 + \varphi_j) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^K \frac{1}{b^{2\alpha i}} \mathbf{M} \cos(ab^i t_1 + \varphi_i) \cdot \cos(ab^i t_2 + \varphi_i) + \\
&+ \sum_{i \neq j} \sum \frac{1}{b^{\alpha(i+j)}} \mathbf{M} \cos(ab^i t_1 + \varphi_i) \cdot \cos(ab^j t_2 + \varphi_j). \quad (6)
\end{aligned}$$

Во втором слагаемом  $i \neq j$  и  $\varphi_i, \varphi_j$  — независимые случайные величины, поэтому

$$\mathbf{M} \cos(ab^i t_1 + \varphi_i) \cdot \cos(ab^j t_2 + \varphi_j) = 0. \quad (7)$$

Выражение в первом слагаемом преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M} \cos(ab^i t_1 + \varphi_i) \cdot \cos(ab^i t_2 + \varphi_i) = \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{M} \{ \cos[ab^i(t_1 + t_2) + 2\varphi_i] + \cos[ab^i(t_1 - t_2)] \} = \frac{1}{2} \cos[ab^i(t_1 - t_2)]. \quad (8)
\end{aligned}$$

Подставим (7), (8) в соотношение (6), тогда

$$B(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^K \frac{1}{2b^{2\alpha i}} \cos[ab^i(t_1 - t_2)]. \quad (9)$$

Таким образом, случайный процесс (4) является стационарным в широком смысле.

Эксперименты по машинному моделированию с помощью функции Вейерштрасса показывают, что в области скейлинга при  $\alpha > 0,5$  значения  $\varepsilon > 0,1$ . При этом из-за дискретного характера спектра функции Вейерштрасса рассмотренные выше методы фильтрации не позволяют получить приемлемые значения  $\varepsilon$ .

**Моделирование фрактальных броуновских изображений.** Случайный процесс  $\xi(t)$  с математическим ожиданием  $\mathbf{M}\xi(t) = 0$ , удовлетворяющий условию

$$\mathbf{M}[\xi(t_2) - \xi(t_1)]^2 = \sigma^2 |t_2 - t_1|^{2\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (10)$$

где  $\sigma^2$  — приращение дисперсии за единицу времени, будем считать фрактальным броуновским. Других ограничений на процесс не накладывается. Можно показать, что для такого процесса спектральная плотность существует и совпадает с известной степенной зависимостью только для значений показателя  $\alpha \in (0, 1/2]$ . В интервале  $\alpha \in (1/2, 1)$  спектральная плотность не существует, а периодограммная оценка показателя имеет постоянное значение  $1/2$  [12]. Этот факт наряду с нестационарностью фрактального броуновского процесса существенно ограничивает применение рассмотренных выше методов для моделирования фрактальных броуновских полей.

Для примера рассмотрим частный случай процесса (10) при условиях, что  $\xi(0) = 0$  (процесс начинается в нуле) и его приращения — величины независимые. Тогда в соответствии с центральной предельной теоремой случайный процесс — нормальный с нулевым математическим ожиданием, дисперсией  $\mathbf{M}\xi^2(t) = \sigma^2 t$  и параметром  $\alpha = 0,5$ . Если  $P_0$  — вероятность события  $|\xi(t)| > \sigma\sqrt{t}$ , то несложно получить  $P_0 \approx 0,32$ . Это означает, что примерно  $1/3$  всех траекторий процесса выходит за интервал  $(-\sigma\sqrt{t}, \sigma\sqrt{t})$ , чего не может обеспечить стационарная модель.

Используем тот факт, что в одномерном случае приращение  $v(t) = \xi(t + \Delta) - \xi(t)$  процесса  $\xi(t)$  по интервалу фиксированной длительности  $\Delta$  является стационарным в широком смысле случайным процессом с коэффициентом корреляции [13]

$$\psi(\tau) = \frac{\mathbf{M}v(t + \tau)v(t)}{\mathbf{M}v^2(t)} = \frac{1}{2}[|1 + z|^{2\alpha} + |1 - z|^{2\alpha} - 2|z|^{2\alpha}], \quad (11)$$

где  $z = \tau/\Delta$ . Спектральная плотность  $I(\omega)$  ( $\omega$  — частота) процесса приращений имеет вид  $I(\omega) \sim \mathcal{F}[\psi(\tau)]$ . Процесс  $v(t)$  можно смоделировать, пропуская реализации белого шума через фильтр с передаточной функцией  $\sqrt{I(\omega)}$ . Затем траектории процесса  $\xi(t)$  находятся интегрированием стационарных приращений  $v(t)$ .

Двумерный процесс  $\eta(x, y)$  зададим в виде суперпозиции [14]

$$\eta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^K \xi_i(x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i) \quad (12)$$

независимых фрактальных броуновских процессов  $\xi_i$  с параметром Хёрста  $\alpha$ , математическим ожиданием  $\mathbf{M}\xi_i = 0$  и структурной функцией вида (10):  $\varphi_i = 2\pi i/K$ ,  $i = 1, \dots, K$ . В соотношении (12) каждое слагаемое  $\xi_i$  представляет собой функцию двух аргументов  $(x, y)$ , которая является постоянной величиной на прямой  $t = x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i$  для любого фиксированного  $t$  и совпадает с фрактальным броуновским процессом в направлении, перпендикулярном этой прямой. Структурная функция поля  $\eta$

$$\begin{aligned} D_2(x_1 y_1; x_2 y_2) &= \mathbf{M}|\eta(x_2, y_2) - \eta(x_1, y_1)|^2 = \mathbf{M} \frac{1}{K} \left| \sum_{i=1}^K [\xi_i(t_2) - \xi_i(t_1)] \right|^2 = \\ &= \frac{1}{K} \mathbf{M} \sum_{i=1}^K [\xi_i(t_2) - \xi_i(t_1)]^2 = \frac{\sigma^2}{K} \sum_{i=1}^K |(x_2 - x_1) \cos \varphi_i + (y_2 - y_1) \sin \varphi_i|^{2\alpha}, \end{aligned} \quad (13)$$

поскольку  $\xi_i$  независимы и  $\mathbf{M}\xi_i = 0$ . В полярной системе координат  $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ,  $\vartheta = \arctg[(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)]$ , из выражения (13) получаем

$$D_2 = \frac{\sigma^2}{K} \sum_{i=1}^K |r \cos \vartheta \cdot \cos \varphi_i + r \sin \vartheta \cdot \sin \varphi_i|^{2\alpha} = \frac{\sigma^2}{K} r^{2\alpha} \sum_{i=1}^K |\cos(\vartheta - \varphi_i)|^{2\alpha}. \quad (14)$$

Если  $K \rightarrow \infty$ , то сумма в соотношении (14) может быть представлена интегралом

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{K} \sum_{i=1}^K |\cos(\vartheta - \varphi_i)|^{2\alpha} = \int_0^{2\pi} |\cos(\vartheta - z)|^{2\alpha} dz = \int_{\vartheta}^{2\pi + \vartheta} |\cos u|^{2\alpha} du = \int_0^{2\pi} |\cos u|^{2\alpha} du. \quad (15)$$

Таким образом, при большом  $K$  структурная функция  $D_2 \sim r^{2\alpha}$  и, следовательно,  $\eta(x, y)$  — фрактальное броуновское поле с параметром Хёрста  $\alpha$ .

Для моделирования фрактальных броуновских изображений использовался следующий алгоритм. Генерировались из белого шума одномерные броуновские процессы  $\xi_i(j)$  с показателем Хёрста  $\alpha$  при  $i = 1, \dots, K$ ,  $j = -N, \dots, 0, \dots, N$ . Далее формировались  $K$  изображений, в которых строки заполнялись соответствующими значениями процесса  $\xi_i(j)$ . Каждое изображение поворачивалось вокруг точки  $(0, 0)$  на заданный угол

$\varphi_i = 2\pi i/K$ , и все  $K$  изображений суммировались. Затем из суммарного изображения вырезалась область размером  $N \times N$  отсчётов с центром в точке  $(0, 0)$ . Статистический анализ смоделированных таким образом фрактальных броуновских изображений ( $K \geq 32$ ) показал, что если  $0,35 \leq \alpha < 1$ , то для функции  $D_1(l)$  область скейлинга  $L_S = [1; N/8]$  при  $\varepsilon = 0,02$ . Если  $0,01 \leq \alpha < 0,35$ , то при малых значениях  $l$  отклонения функции  $D_1(l)$  от степенной зависимости становятся значительными. Для устранения этих отклонений можно применить пространственно-частотную фильтрацию к уже смоделированным изображениям. Важно отметить, что интегральная характеристика оценки спектральной плотности  $V(k)$  смоделированных фрактальных броуновских изображений для частот  $2\pi k/N$  в интервале  $[\pi/64; \pi/2]$  хорошо аппроксимируется степенной функцией  $V(k) \sim k^{-\beta}$  ( $\beta \approx 2\alpha + 2$ ), если  $0 < \alpha \leq 0,5$ , и  $V(k) \sim k^{-3}$ , если  $0,5 < \alpha < 1$ , что согласуется с результатами, полученными в [12].

**Синтез изображений с фрактальными признаками.** В работе [7] предложены алгоритмы синтеза изображений на основе пространственно-частотной фильтрации, при которой сохраняется распределение фаз фурье-образа исходного и полученного на его основе изображений, что обеспечивает их сходство при степенном характере убывания интегральной характеристики спектра синтезированного изображения. Для моделирования изображений со степенными структурными функциями несложно модифицировать эти алгоритмы в соответствии с вышеприведёнными методами. Рассмотрим результаты такого моделирования применительно к микроскопическим изображениям аморфных сплавов.

На рис. 2, *a* показано микроскопическое изображение наноструктур в аморфной плёнке состава Co—W. Размер изображения  $1024 \times 1024$  отсчёта, расстояние между отсчётами 0,185 нм. На рис. 2, *b* приведён график оценки структурной функции  $D_1(l)$  изображения в двойном логарифмическом масштабе. На кривой можно выделить несколько достаточно узких участков, где её можно аппроксимировать линейной зависимостью. Затем моделировалось изображение со степенной ( $\beta = 2,5$ ) интегральной характеристикой спектра. График оценки структурной функции  $D_1(l)$  в двойном логарифмическом масштабе для смоделированного изображения показан на рис. 2, *d* (кривая 1). Здесь оценка имеет значительный по протяжённости (около шести двоичных октав) участок скейлинга, для которого  $\alpha = 0,25$ . Однако в область скейлинга не входит область с малыми значениями аргумента структурной функции. Для расширения области скейлинга использовался фильтр  $H(a_0 = 0,5, a_1 = 1, b = 0,63, \gamma = 2,5)$ . Полученное в результате фильтрации изображение показано на рис. 2, *c*, а график оценки его структурной функции  $D_1(l)$  в двойном логарифмическом масштабе — на рис. 2, *d* (кривая 2). Основные детали на синтезированном и исходном изображениях совпадают за счёт сохранения фазы ДПФ при фильтрации. Среднее на один пиксел расстояние  $\delta$  между смоделированным изображением  $f_1$  и исходным  $f_0$  составляет  $\delta = 0,058$  (яркости обоих изображений приведены к диапазону  $[0, 1]$ ). В пересчёте на реальные размеры область скейлинга включает в себя наноструктуры с размерами  $[0,185; 44,5]$  нм. При этом структурные функции  $D_q(l)$  в области скейлинга в двойном логарифмическом масштабе хорошо аппроксимируются прямыми с тангенсом угла наклона  $q\alpha \approx 0,25q$  при  $\varepsilon = 0,012$ , т. е. элементы наноструктур с размерами  $[0,185; 44,5]$  нм можно считать статистически самоподобными с фрактальной размерностью  $d = 2,75$ . Интегральная характеристика спектра модифицированного изображения также убывает по степенному закону ( $\beta \approx 2,5 \pm 0,05$ ) для элементов изображения с пространственными периодами  $189,44/k$  нм,  $k = 1, 2, \dots, 128$ .

На рис. 3, *a* приведено изображение структуры аморфной плёнки состава Co—Ni—P. Размер изображения  $1024 \times 1024$  отсчёта, расстояние между отсчётами 7,5 нм. Для модификации изображения во фрактальное использовалась фильтрация при  $\beta = 2,2$ ,  $H(a_0 = 0,35, a_1 = 1, b = 0,5, \gamma = 1,8)$ . Модифицированное изображение показано на рис. 3, *b*. Для структурной функции  $D_1(l)$  этого изображения  $\alpha = 0,115$ ,  $d = 2,885$ ,  $L_S = [7,5; 1755]$  нм,

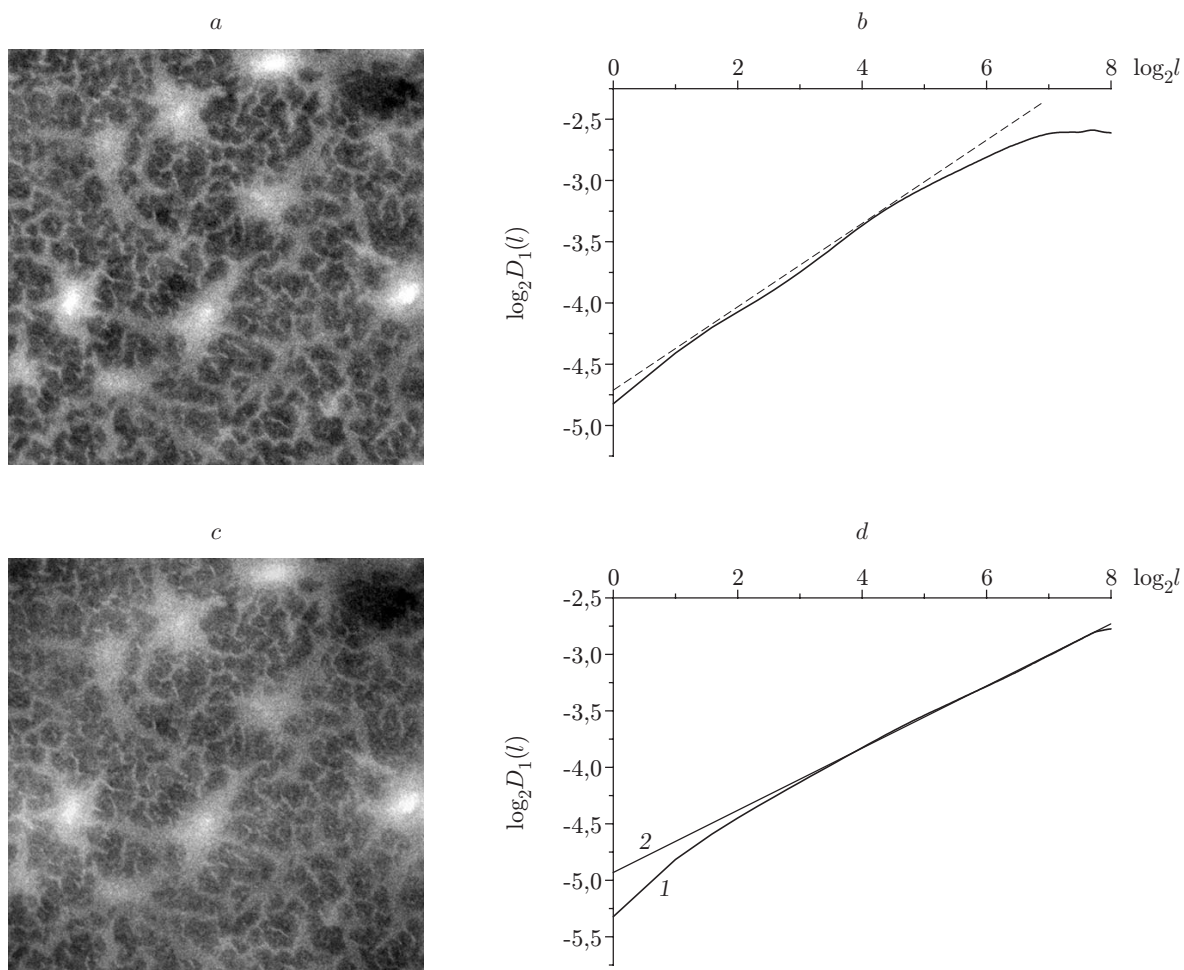


Рис. 2

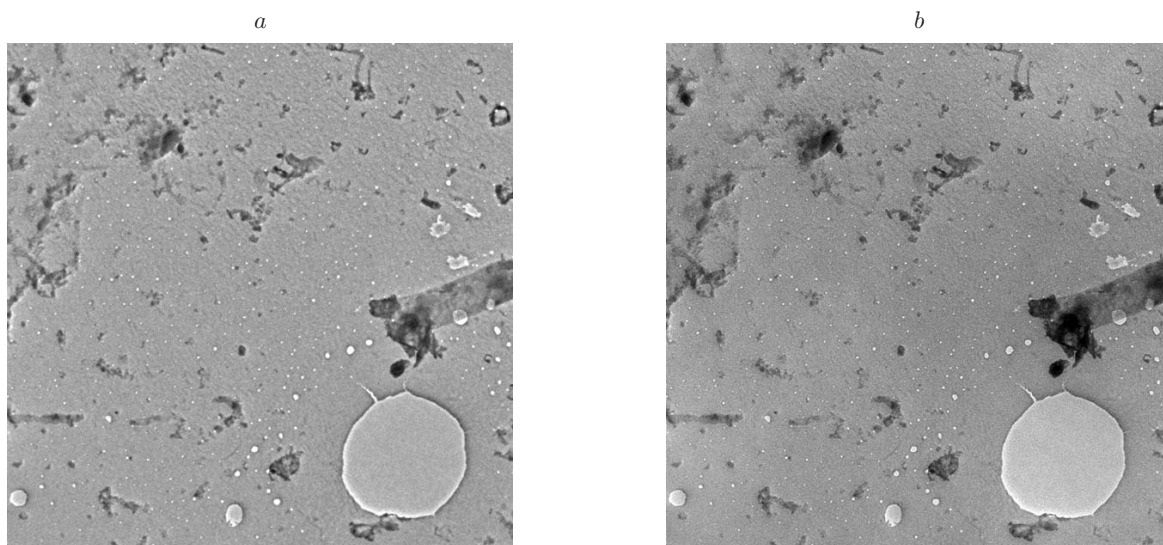


Рис. 3



$\varepsilon = 0,015$ , а для структурной функции  $D_2(l)$   $2\alpha = 0,248$ ,  $L_S = [7,5; 1755]$  нм,  $\varepsilon = 0,023$ . Интегральная характеристика спектра  $V(k)$  модифицированного изображения убывает по степенному закону ( $\beta \approx 2,12 \pm 0,07$ ) для элементов изображения с пространственными периодами  $7680/k$  нм,  $k = 1, 2, \dots, 128$ . Таким образом, и в данном случае можно говорить о спектральном и статистическом самоподобии элементов структуры на смоделированном изображении в значительном диапазоне масштабов. Расстояние между смоделированным и исходным изображениями  $\delta = 0,05$ . Хорошо заметны отличия между изображениями в области больших масштабов, особенно для неоднородностей, не попадающих в область скейлинга. Кроме того, на смоделированном изображении значительно усилены высокочастотные компоненты.

**Заключение.** В данной работе на основе пространственно-частотной фильтрации смоделированных и реальных изображений созданы методы синтеза фрактальных изображений, для которых структурные функции являются степенными в большом диапазоне изменения приращений. Машинные эксперименты показали, что для смоделированных изображений область скейлинга может составлять около четверти размера изображения.

Предложен и исследован алгоритм моделирования фрактальных броуновских изображений на основе генерирования одномерных реализаций фрактального броуновского процесса. Установлено, что существует достаточно широкий диапазон пространственных частот, в котором интегральная характеристика спектра броуновского изображения хорошо аппроксимируется степенной функцией  $V(k) \sim k^{-2(\alpha+1)}$ , если  $0 < \alpha \leq 0,5$ , и  $V(k) \sim k^{-3}$ , если  $0,5 < \alpha < 1$ .

Показано, что с помощью функции Вейерштрасса, как и в методе фурье-фильтрации, могут моделироваться только стационарные в широком смысле процессы (изображения).

На примерах модификации изображений образцов аморфных сплавов продемонстрировано, что можно смоделировать мало отличающиеся от исходного статистически самоподобные изображения. Это позволяет установить, в какой степени визуализированные на изображениях структуры проявляют фрактальные свойства.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Федер Е.** Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
2. **Шредер М.** Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: «РХД», 2001. 528 с.
3. **Плешанов В. С., Напряшкин А. А., Кибиткин В. В.** Особенности применения теории фракталов в задачах анализа изображений // Автометрия. 2010. **46**, № 1. С. 86–97.
4. **Мандельброт Б.** Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
5. **Короленко П. В., Маганова М. С., Меснянкин А. В.** Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. М.: Изд-во МГУ, 2004. 82 с.
6. **Кронвер Р. М.** Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
7. **Грудин Б. Н., Плотников В. С., Смольянинов Н. А.** Моделирование изображений с заданными фрактальными характеристиками // Автометрия. 2010. **46**, № 3. С. 13–21.
8. **Грудин Б. Н., Плотников В. С., Кисленок Е. Г., Фищенко В. К.** Анализ, фильтрация и декомпозиция микроскопических изображений на основе ортогональных преобразований // Автометрия. 2007. **43**, № 1. С. 24–36.
9. **Voss R.** Fractals in nature: from characterization to simulation // The Science of Fractals Images /Eds. H. O. Peitgen, D. Saupe. N. Y.: Springer-Verlag, 1988. 312 p.

10. **Пустовалов Е. В., Войтенко О. В., Грудин Б. Н., Плотников В. С.** Графические процессоры в задачах электронной томографии // Автометрия. 2012. **48**, № 1. С. 72–79.
11. **Pentland A. P.** Fractal-based description of natural scenes // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1984. **6**, N 6. P. 661–674.
12. **Кулешов Е. Л., Грудин Б. Н.** Спектральная плотность фрактального броуновского процесса // Автометрия. 2013. **49**, № 3. С. 18–24.
13. **Mandelbrot B. B., van Ness J. W.** Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Rev. 1968. **10**, N 4. P. 422–437.
14. **Yin Z.-M.** New method for simulation of fractional Brownian motion // Journ. Computat. Phys. 1996. **127**, N 1. P. 66–72.

*Поступила в редакцию 27 июня 2013 г.*

---