

УДК 517.9+532.5+539.3

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГЕМОДИНАМИКИ

А. М. Барлукова*, А. А. Черевко^{*,**}, А. П. Чупахин^{*,**}

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

E-mails: ayuna.barlukova@gmail.com, cherevko1@ngs.ru, chupakhin@hydro.nsc.ru

Рассматривается одномерная модель гемодинамики — движения потока крови в кровеносных сосудах, в основе которой лежит система уравнений Навье — Стокса, осредненная по сечению сосуда и сопряженная с линейной или нелинейной моделью для упругой стенки сосуда. Задача состоит в исследовании решений типа бегущих волн в рамках этой модели. Для таких решений система уравнений в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка. Найдена единственная особая точка соответствующей системы дифференциальных уравнений. Установлено, что в особой точке матрица линеаризации системы имеет вещественные или комплексные корни при различных значениях параметров задачи. При специальном выборе параметров она имеет либо четыре комплексно-сопряженных корня с вещественной частью, не равной нулю, либо только чисто мнимые корни. Для этого случая исследовано влияние на решение параметра модели, соответствующего вязкоупругой реакции стенки сосуда. Проведены численные эксперименты для подтверждения и анализа полученных результатов, рассмотрены различные режимы движения крови.

Ключевые слова: одномерные уравнения гемодинамики, вязкоупругая трубка, решения типа бегущих волн, особая точка, осциллирующие решения.

Введение. Интерес к изучению нелинейных волновых процессов в вязкоупругих трубках обусловлен тем, что они служат моделью гемодинамики сосудов кровеносной системы. Изучение этих волновых процессов способствует прогнозированию развития ряда заболеваний [1, 2]. Сосуды кровеносной системы помимо основной, проводящей функции (перенос крови, обогащенной кислородом и питательными веществами) выполняют также демпфирующую функцию (сглаживание пиков импульсов давления) [1]. Аномалии развития, заболевания сердечно-сосудистой системы обуславливают нарушения обеих функций [3]. Артериосклероз, проявляющийся в увеличении жесткости стенок сосудов, уменьшении их эффективного сечения, приводит к ухудшению демпфирующих свойств, повышению давления крови, дополнительным разрушениям сосудов. Поэтому представляют интерес построение и анализ моделей, учитывающих механические свойства стенок сосуда.

При построении и анализе моделей гемодинамики возникает ряд трудностей. В частности, необходимо учитывать нелинейные эффекты, возникающие при течении крови, а также многослойную анизотропную структуру стенки сосуда и нелинейность ее вязкоупругих свойств. Вследствие сложности получения экспериментальных данных *in vivo* имеется недостаточное количество данных о физических параметрах моделей гемодинамики: вязко-

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта Президиума СО РАН № 44, Программы Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (код проекта 2.13.4) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00036).

© Барлукова А. М., Черевко А. А., Чупахин А. П., 2014

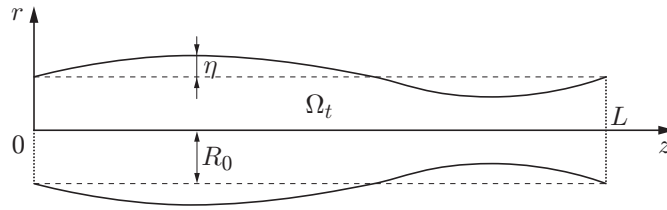


Рис. 1. Схема сосуда

сти стенки артерии, коэффициенте нелинейной упругости и др. Целью настоящей работы является анализ математической модели течения жидкости в вязкоупругой трубке, моделирующей кровеносный сосуд. Изучается влияние параметров модели, характеризующих механические свойства стенки, на решение типа бегущей волны.

1. Система уравнений для описания волн в вязкоупругих трубках. Ниже приведено краткое описание одномерной модели гемодинамики и перечислены предположения, положенные в основу данной модели. Полный вывод системы уравнений представлен в [4, 5].

Одномерные модели гемодинамики дают упрощенное представление о течении крови в сосудах и о взаимодействии крови и стенки. Вместе с тем они качественно описывают распространение волн в случае геометрических и механических изменений сосуда (стеноз, аневризма, установка стента, эмболизация сосуда), поскольку учитывают механические свойства стенки сосуда.

Экспериментальные исследования показывают, что если скорость сдвига при движении крови в сосуде с большой площадью сечения достаточно велика, то с высокой степенью приближения кровь можно рассматривать как ньютоновскую жидкость [6]. Поэтому в настоящее время при моделировании течения крови в основном используются уравнения Навье — Стокса. Кроме того, предполагается, что течение крови происходит в осесимметричной трубке. Уравнения Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P - \operatorname{div} [\nu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

(\mathbf{u} — скорость; P — давление; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность) выполняются в области Ω_t , представляющей собой осесимметричную область, ось которой направлена вдоль оси z (рис. 1). Эта область заключена между сечениями $z = 0$ и $z = L$ (L — длина сосуда, которая считается не зависящей от времени). Для построения модели используются цилиндрические координаты r, θ, z .

Поперечное сечение сосуда остается круглым в каждый момент времени, т. е. для каждого значения $t > 0, z \in [0, L]$ имеем

$$S = S(z, t) = \{(r, \theta, z): 0 \leq r \leq R(z, t), 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

где $R = R(z, t)$ — радиус сосуда в данном сечении. На стенках сосуда задаются условия прилипания, на входе и выходе — краевые условия.

Одномерная модель гемодинамики основана на длинноволновом приближении, согласно которому осевая компонента скорости течения жидкости значительно больше радиальной, а на границе выполнено условие равенства нулю компонент скорости. Отношение характерного радиуса сосуда R_0 к его длине L полагается малым: $R_0/L \ll 1$. Считается, что движение осесимметрично и перемещение стенки происходит только вдоль радиуса. Это равносильно осреднению уравнений Навье — Стокса по поперечному сечению сосуда. Предполагается, что в каждом сечении давление постоянное.

В цилиндрических координатах компонента скорости u_z имеет представление

$$u_z(r, z, t) = \bar{u}(z, t)s(r/R(z, t)),$$

где \bar{u} — средняя скорость в каждом сечении; $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — профиль скорости.

Стенка сосуда считается непроницаемой. Интегрируя уравнения Навье — Стокса (1.1) по каждому сечению $S(z, t)$ и используя приведенные выше предположения, получаем систему двух уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

для всех значений $z \in (0, L)$ и $t > 0$. Неизвестными функциями в (1.2) являются площадь сечения сосуда A , расход Q и давление P :

$$\begin{aligned} A(z, t) &= \int_{S(z, t)} dz, & Q(z, t) &= \int_{S(z, t)} u_z(x, y, z, t) dx dy, \\ P(z, t) &= \frac{1}{A(z, t)} \int_{S(z, t)} P(x, y, z, t) dx dy. \end{aligned}$$

Здесь K_R — зависящий от вязкости крови коэффициент сопротивления; α — коэффициент Кориолиса:

$$\alpha = \frac{1}{A\bar{u}^2} \int_S u_z^2 d\gamma = \frac{1}{A} \int_S s^2 d\gamma.$$

Для того чтобы замкнуть систему (1.2), необходимо использовать еще одно соотношение, представляющее собой уравнение состояния для давления жидкости. Это соотношение получается при исследовании взаимодействия жидкости со стенкой. Стенка кровеносного сосуда, имеющая сложную слоистую структуру, состоит из тканей различного типа с различными механическими характеристиками, обладающих как упругими свойствами твердых тел, так и вязкими свойствами жидкостей. Строение различных слоев стенки меняется в зависимости от типа сосуда и его размеров. При построении математической модели будем учитывать наиболее существенные физические особенности системы. Важным условием демпфирования высокочастотных колебаний в потоке крови является наличие вязкоупругих свойств стенки. Представляется существенным учет нелинейной упругости стенки артерии. Будем предполагать, что стенка трубки однородна, изотропна, несжимаема и состоит из вязкоупругого материала [7]. Деформация трубки характеризуется изменением ее радиуса, который зависит от координаты z и времени t . Предполагается, что деформации стенки малы по сравнению с радиусом трубки, а характерные длины существенно больше равновесного радиуса.

Примем следующие обозначения: $\eta = R - R_0$ — величина отклонения положения стенки от начального состояния, R_0 — радиус сосуда в состоянии покоя, $G(\eta) = b\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3$ — функция, задающая нелинейную упругую реакцию стенки, b, b_2, b_3 — числовые коэффициенты; ρ_w — плотность материала стенки, h_0 — толщина стенки, P_{ext} — давление на стенку сосуда извне.

Существуют различные варианты соотношений, связывающие движения стенки и жидкости (зависимость давления от величины отклонения стенки от состояния равновесия) [8–13]. Будем использовать модель, в которой давление имеет следующее представление [4]:

$$P = P_{ext} + \rho_w h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \tilde{\gamma} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tilde{a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \tilde{c} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2} + G(\eta), \quad z \in (0, L), \quad t > 0. \quad (1.3)$$

Второй член в правой части (1.3), определяющий инерцию, пропорционален ускорению стенки, третий — вязкоупругий член, пропорциональный скорости перемещения стенки, четвертый член соответствует продольному предварительному напряженному состоянию сосуда, пятый — еще один вязкоупругий член, шестой — функция упругой реакции стенки. Коэффициенты \tilde{a} , \tilde{c} , $\tilde{\gamma}$ определяют механические свойства стенки: \tilde{a} характеризует продольные напряжения стенки, \tilde{c} — вязкоупругие свойства стенки, $\tilde{\gamma}$ — взаимодействие стенки с жидкостью. Известно, что в рассматриваемой задаче член в соотношении (1.3), описывающий упругую реакцию стенки, имеет доминирующее влияние по сравнению с другими членами.

2. Исследование решений типа бегущих волн. Особые точки. Запишем систему (1.2), (1.3) через величины отклонения η и расхода Q . Так как $A = \pi R^2$, то

$$A = \pi(\eta + \sqrt{A_0/\pi}), \quad (2.1)$$

где $A_0 = \pi R_0^2$. Введем масштабированный расход $q = Q/\pi$ и подставим представление (1.3) во второе уравнение системы (1.2). В результате получаем систему уравнений одномерной гемодинамики, записанную через величины отклонения η и расхода q :

$$\begin{aligned} & [(\eta + R_0)^2]_t + q_z = 0, \\ & q_t + \alpha \left(\frac{q^2}{(\eta + R_0)^2} \right)_z + \frac{K_R}{\pi} \frac{q}{(\eta + R_0)^2} + \\ & + \frac{(\eta + R_0)^2}{\rho} \left(P_{ext} + \rho_w h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \tilde{\gamma} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tilde{a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \tilde{c} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2} + G(\eta) \right)_z = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем искать решения системы (2.2) в виде бегущих волн, т. е. искомые функции η и q зависят от одного параметра λ :

$$\eta = \eta(\lambda), \quad q = q(\lambda), \quad \lambda = z - c_0 t \quad (2.3)$$

(c_0 — скорость волны). Подставляя (2.3) в систему (2.2), находим

$$\begin{aligned} & -c_0 [(\eta + R_0)^2]' + q' = 0, \\ & -c_0 q' + \alpha \left(\frac{q^2}{(\eta + R_0)^2} \right)' + \frac{K_R}{\pi} \frac{q}{(\eta + R_0)^2} + \\ & + \frac{(\eta + R_0)^2}{\rho} (P_{ext} + c_0^2 \rho_w h_0 \eta'' + c_0 \tilde{\gamma} \eta' - \tilde{a} \eta'' + c_0 \tilde{c} \eta'' + G(\eta))' = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где штрих обозначает производную по λ .

Интегрируя первое уравнение системы (2.4), получаем выражение для q

$$q = q_0 + c_0(\eta + R_0)^2, \quad q_0 = \text{const}. \quad (2.5)$$

Подставим представление (2.5) во второе уравнение системы (2.4) и преобразуем полученное выражение. В результате система дифференциальных уравнений (2.4) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\begin{aligned} & \eta^{IV} + \frac{c_0^2 \rho_w h_0 - \tilde{a}}{c_0 \tilde{c}} \eta''' + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{c}} \eta'' + \frac{\rho K_R}{\pi c_0 \tilde{c}} \frac{q_0 + c_0(\eta + R_0)^2}{(\eta + R_0)^4} + \\ & + \frac{\rho}{c_0 \tilde{c} (\eta + R_0)^5} \left(-2\alpha (c_0^2 (\eta + R_0)^4 - q_0^2) + (\eta + R_0)^4 (\rho^{-1} (\eta + R_0) G'(\eta) - 2c_0^2) \right) \eta' = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введя обозначения

$$\eta = x_1, \quad \eta' = x_2, \quad \eta'' = x_3, \quad \eta''' = x_4, \quad (2.7)$$

уравнение (2.6) можно записать в виде системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, & x_2' &= x_3, & x_3' &= x_4, \\ x_4' &= F_0(x_1) + F_1(x_1)x_2 + \mu_3x_3 + \mu_4x_4, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_3 &= -\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{c}}, & \mu_4 &= -\frac{c_0\rho_w h_0 - \tilde{a}}{c_0\tilde{c}}, & F_0(x_1) &= -\frac{K_R\rho(c_0(x_1 + R_0)^2 + q_0)}{\pi\tilde{c}c_0(x_1 + R_0)^4}, \\ F_1(x_1) &= \frac{\rho}{c_0\tilde{c}(x_1 + R_0)^5} \left(-2\alpha(c_0^2(x_1 + R_0)^4 - q_0^2) + (x_1 + R_0)^4(\rho^{-1}(x_1 + R_0)G'(x_1) - 2c_0^2) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для того чтобы найти состояния равновесия — особые точки системы (2.8), (2.9), приравняем к нулю правые части системы (2.8):

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad F_0(x_1) = -\frac{K_R\rho(c_0(x_1 + R_0)^2 + q_0)}{\pi\tilde{c}c_0(x_1 + R_0)^4} = 0. \quad (2.10)$$

Из равенств (2.10) следует, что имеется две особые точки, координаты которых равны

$$x_1 = -R_0 \pm \sqrt{-q_0/c_0}, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Однако, поскольку выражение $R = \eta + R_0$ должно быть неотрицательным, решение со знаком “-” не имеет физического смысла. В результате получаем единственную особую точку, в которой

$$x_1 = x_* = -R_0 + \sqrt{-q_0/c_0}. \quad (2.11)$$

Эта особая точка существует, только если $q_0 c_0 < 0$. Заметим, что существование этой точки зависит только от параметров, задающих волну.

Система (2.8) имеет также особую точку при $x_1 + R_0 = 0$. Эта точка является сильно вырожденной, поскольку в системе (2.8) все собственные числа линеаризации равны нулю и соответствуют предельному стенозу сосуда ($R = 0$). Будем считать, что анализ проводится для области, расположенной вдали от этой точки.

Матрица линеаризации системы (2.8) записывается следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ F_0'(x_*) & F_1(x_*) & \mu_3 & \mu_4 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Здесь

$$F_0'(x_*) = \frac{2\rho K_R}{\pi\tilde{c}(\sqrt{-q_0/c_0})^{3/2}}, \quad F_1(x_*) = -\frac{2c_0^3\rho\sqrt{-q_0/c_0} + q_0G(\sqrt{-q_0/c_0} - R_0)}{\tilde{c}c_0q_0}.$$

Характеристическое уравнение матрицы (2.12) имеет вид

$$k^4 - \mu_4 k^3 - \mu_3 k^2 - kF_1(x_*) - F_0'(x_*) = 0. \quad (2.13)$$

Заметим, что в силу системы (2.8) дивергенция равна коэффициенту μ_4 . Следовательно, динамика объема в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ зависит от знака коэффициента μ_4 , в частности, при $\mu_4 = 0$ фазовый объем сохраняется [14].

3. Анализ решений вблизи особой точки типа фокуса и центра. Рассмотрим уравнение (2.13) в частном случае, когда оно имеет только чисто мнимые корни. Тогда интегральные кривые линеаризации системы (2.8) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$

лежат внутри компактного многообразия и можно получить решения уравнения (2.6), близкие к периодическим. Так как центр не является грубой особой точкой, то, вообще говоря, траектории системы (2.8) и ее линеаризованного варианта не совпадают [14, 15]. Такие решения представляют интерес, поскольку движение крови в сосудах имеет периодический характер.

Пусть $\pm i\beta_1, \pm i\beta_2$ ($\beta_{1,2} \in \mathbb{R}_+$) — корни уравнения (2.13). Тогда из общей теоремы Виета следует, что в (2.13)

$$\mu_4 = 0, \quad F_1(x_*) = 0. \quad (3.1)$$

Характеристическое уравнение (2.13) принимает более простой вид

$$k^4 - \mu_3 k^2 - F'_0(x_*) = 0. \quad (3.2)$$

Поскольку уравнение (3.2) биквадратное, согласно теореме Виета имеют место выражения

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = -\mu_3, \quad \beta_1^2 \beta_2^2 = -F'_0(x_*). \quad (3.3)$$

Введем новые обозначения: $\mu = \mu_3$, $F = F'_0(x_*)$ и выразим β_i из соотношений (3.3), учитывая, что $\beta_{1,2} > 0$:

$$\beta_1 = \sqrt{-\mu + \sqrt{4F + \mu^2}} / \sqrt{2}, \quad \beta_2 = \sqrt{-\mu - \sqrt{4F + \mu^2}} / \sqrt{2}. \quad (3.4)$$

Корни уравнения (3.2) являются чисто мнимыми, если β_i вещественны, тогда согласно (3.4)

$$4F + \mu^2 > 0 \quad \text{или} \quad -F < \mu^2/4. \quad (3.5)$$

Рассмотрим случай, когда упругая реакция стенки сосуда представляется в виде линейной функции $G(\eta) = b\eta$. Из соотношений (3.1) можно выразить некоторые коэффициенты в (3.1):

$$\tilde{a} = c_0^2 \rho_w h_0, \quad b = -2(c_0^3/q_0)\rho\sqrt{-q_0/c_0}. \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.5) представление (2.9) для F и μ через параметры задачи и учитывая (3.6), получаем неравенство

$$\frac{8K_R\rho\tilde{c}}{\pi\tilde{\gamma}^2} < \left(-\frac{q_0}{c_0}\right)^{3/2}. \quad (3.7)$$

В правой части неравенства (3.7) содержатся параметры q_0, c_0 , задающие движение, в левой — параметры $\tilde{c}, \tilde{\gamma}$, определяющие прочностные свойства сосуда, и характеристики потока K_R, ρ . Если неравенство (3.7) не выполняется, то характеристическое уравнение (3.2) имеет комплексные корни вида $\pm\alpha \pm i\beta$, где $\alpha \neq 0$, а особая точка является фокусом.

Таким образом, выполнено разбиение плоскости параметров $\mathbb{R}^2(c_0, q_0)$ на две области, в первой из которых уравнение (3.2) имеет четыре чисто мнимых корня и особая точка является центром, а во второй характеристические корни имеют вид $\pm\alpha \pm i\beta$ ($\alpha \neq 0$) и особая точка является фокусом. На рис. 2 представлены эти области в квадранте $c_0 > 0, q_0 < 0$ при $K_R = 1, \rho = 1$ (значения параметров $\tilde{c}, \tilde{\gamma}$ заданы ниже).

В области параметров D_1 уравнение (3.2) имеет четыре чисто мнимых корня, в области D_2 находятся фокусы. Заметим, что на границе между областями D_1 и D_2 характеристические корни являются чисто мнимыми.

Давление и скорость жидкости определяются формулами

$$P = P_{ext} + b\eta + c_0\tilde{\gamma}\eta' + c_0\tilde{c}\eta''', \quad \bar{u} = c_0 + q_0/(\eta + R_0)^2. \quad (3.8)$$

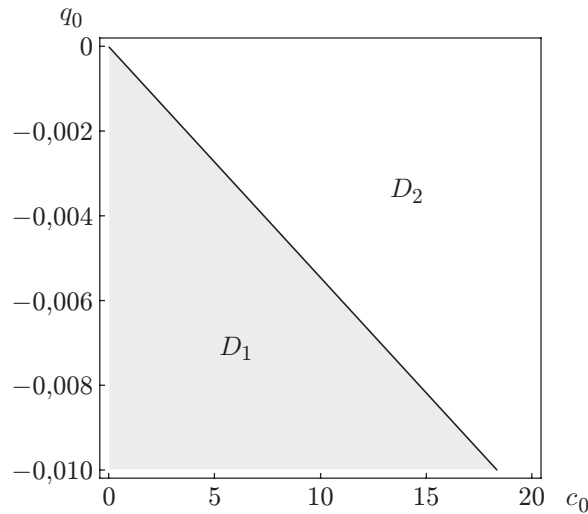


Рис. 2. Область параметров $c_0 > 0$, $q_0 < 0$

4. Численный эксперимент. Ниже приведены результаты численного эксперимента. Решения уравнения (2.6) ищутся с использованием пакета МАТНЕМАТИСА. В расчетах используются следующие значения параметров в системе единиц СГС [1, 2, 6]: $\rho = 1$, $R_0 = 0,5$, $h_0 = 0,01$, $\rho_w = 1,1$, $\alpha = 1$, $K_R = 1$, $P_{ext} = 1$.

Положим $c_0 = 0,5$, $q_0 = -0,002$. При $R_0 = 0,5$ согласно (2.11) получаем значение особой точки $x_* = -0,436754$. В этом случае $R_* = x_* + R_0 = 0,063246$, поэтому особая точка находится достаточно далеко от предельной точки $R_* = 0$ (стеноз). Выберем следующие начальные данные для уравнения (2.6): $\eta(0) = x_*$, $\eta'(0) = 0,0001$, $\eta''(0) = 0$, $\eta'''(0) = 0$. Зафиксируем параметр $\tilde{\gamma} = 100$ и будем варьировать параметр \tilde{c} , определяющий вязкоупругие свойства стенки. Согласно (3.7) и рис. 2 значения $\tilde{c} > 1$ соответствуют области D_2 .

На рис. 3 представлены зависимости величины отклонения стенки сосуда от начального состояния η , скорости \bar{u} и давления P от параметра $\lambda = z - c_0 t$, а также интегральные кривые уравнения (2.6) в окрестности особой точки в плоскостях $\mathbb{R}^2(x_1, x_2)$, $\mathbb{R}^2(x_2, x_3)$ фазового пространства $\mathbb{R}^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$. В этом случае собственные числа матрицы A (2.12) равны $k_1 = -2,36613 - 3,34911i$, $k_2 = -2,36613 + 3,34911i$, $k_3 = 2,36613 - 3,34911i$, $k_4 = 2,36613 + 3,34911i$ ($i^2 = -1$). Решение является осциллирующим. Поскольку $c_0 > 0$, колебания затухают со временем. Таким образом, если материал стенки сосуда обладает достаточно большой вязкоупругостью, то при движении жидкости через сосуд имеют место значительные потери энергии. Вследствие демпфирования колебания со временем затухают. Расчеты показывают, что изменение параметра \tilde{c} в этой области приводит к изменению лишь числовых параметров решения, но качественно оно не меняется.

Рассмотрим решения, соответствующие значениям параметра \tilde{c} в области D_1 , где $\tilde{c} < 1$. Значения остальных расчетных величин остаются прежними. Положим $\tilde{c} = 0,1$. Тогда собственные числа матрицы (2.12) равны $k_1 = 0 - 5,08251i$, $k_2 = 0 + 5,08251i$, $k_3 = 0 - 31,2117i$, $k_4 = 0 + 31,2117i$ ($i^2 = -1$). На рис. 4 представлены зависимости величин η , \bar{u} , P от переменной λ . С большой точностью решение является периодическим, что хорошо согласуется с механикой процесса: вязкость стенки небольшая, потери энергии практически отсутствуют, имеет место незатухающий колебательный процесс. По-видимому, в этом случае в фазовом пространстве существует предельный цикл, аналогичный предельному циклу бифуркации Андронова — Хопфа [15]. В области D_1 изменение значений параметра \tilde{c} практически не влияет на поведение функций.

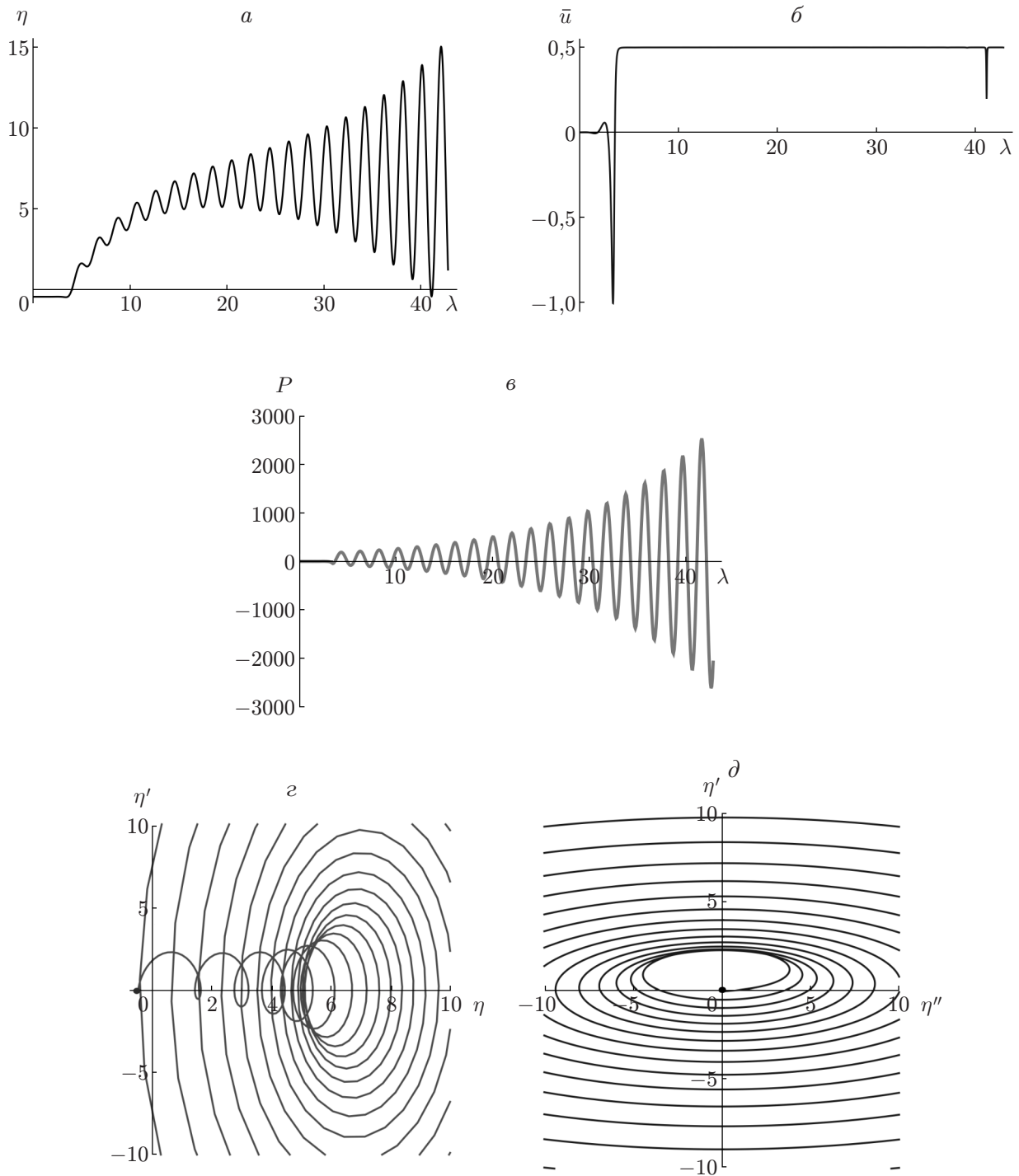


Рис. 3. Осциллирующее решение в области фокусов:

a — величина отклонения стенки сосуда, $б$ — скорость, $в$ — давление, $г, д$ — интегральные кривые уравнения (2.6) в плоскостях $\mathbb{R}^2(x_1, x_2)$, $\mathbb{R}^2(x_2, x_3)$ фазового пространства соответственно

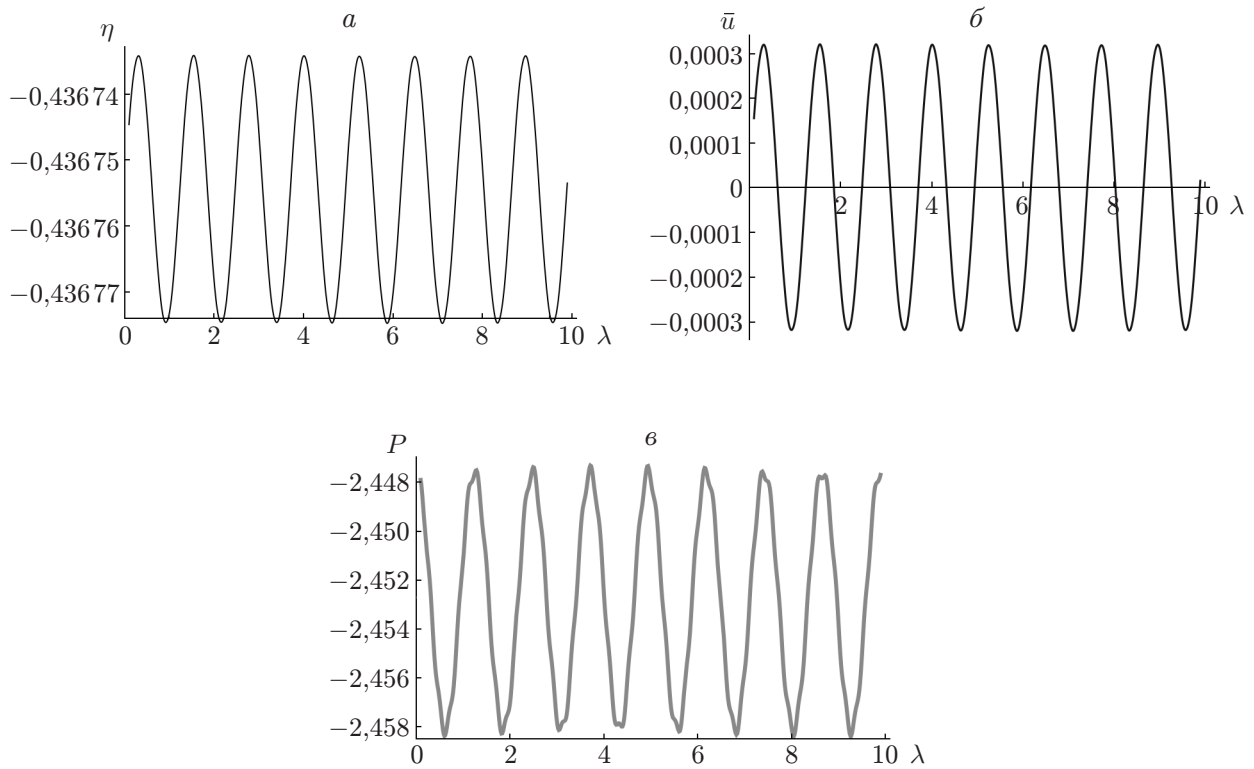


Рис. 4. Периодическое решение в области центров:
a — величина отклонения стенки сосуда, *б* — скорость, *в* — давление

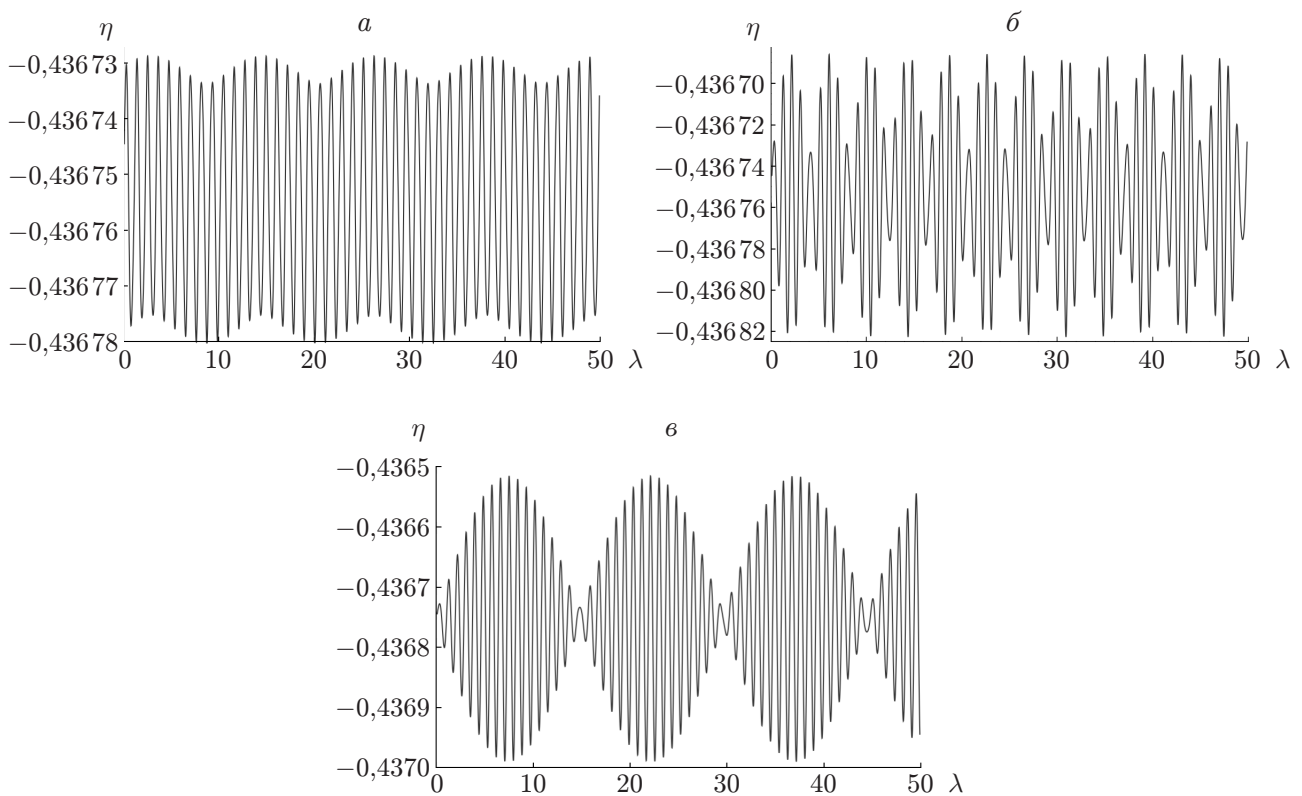


Рис. 5. Величина отклонения стенки сосуда в области центров:
a — $\tilde{c} = 0,60$, *б* — $\tilde{c} = 0,95$, *в* — $\tilde{c} = 0,99$

Выберем значение параметра \tilde{c} вблизи границы, разделяющей области D_1 и D_2 , т. е. в (3.7) выполняется равенство

$$\frac{8K_R\rho\tilde{c}}{\pi\tilde{\gamma}^2} \approx \left(-\frac{q_0}{c_0}\right)^{3/2}. \quad (4.1)$$

Особая точка является центром. На рис. 5 приведена зависимость $\eta(\lambda)$ при $\tilde{c} = 0,60; 0,95; 0,99$. Видно, что в этой области значений изменение параметра \tilde{c} существенно влияет на решение. В решении возникают две моды колебаний: низко- и высокочастотная. Появление биений и высокочастотных колебаний оказывает негативное влияние на функционирование системы.

Заключение. Одномерная модель гемодинамики имеет содержательные решения типа бегущих волн. Следует отметить, что для системы четвертого порядка, описывающей такие решения, существует лишь одна особая точка. Модель содержит большое количество физических параметров, характеризующих течение жидкости через сосуд и прочностные свойства стенки. Заметим, что при значениях параметров, близких к реальным, модель содержит решения, соответствующие различным режимам течения через сосуд: затухающие колебания, периодические движения, биения. Представляются перспективными дальнейшие численные расчеты решений уравнения (2.6) при других значениях параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Каро К.** Механика кровообращения / К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид. М.: Мир, 1981.
2. **Pedley T. J.** The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
3. **Панарин В. А., Орлов К. Ю., Кривошапкин А. Л. и др.** Использование гидродинамических расчетов в выборе сценария эмболизации церебральной артериовенозной мальформации с наличием фистульного компонента // Патология кровообращения и кардиохирургия. 2012. № 3. С. 39–43.
4. **Quarteroni A., Formaggia L.** Mathematical modelling and numerical simulation of the cardiovascular system // Computational models for the human body. Handbook of numerical analysis. Amsterdam: Elsevier, 2004. P. 3–129.
5. **Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.** One-dimensional models for blood flow in arteries // J. Engng Math. 2003. V. 47. P. 251–276.
6. **Левтов В. А.** Реология крови / В. А. Левтов, С. А. Регирер, Н. Х. Шадрина. М.: Медицина, 1982.
7. **Жермен П.** Курс механики сплошных сред. Общая теория. М.: Высш. шк., 1983.
8. **Кудряшов Н. А., Чернявский И. Л.** Нелинейные волны при течении жидкости в вязкоэластичной трубке // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 1. С. 54–67.
9. **Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И., Чернявский И. Л.** Нелинейные эволюционные уравнения для описания возмущений в вязкоэластичной трубке // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 69–86.
10. **Bukac M., Canic S., Glowinski R., et al.** Fluid-structure interaction in blood flow capturing non-zero longitudinal structure displacement // J. Comput. Phys. 2013. V. 235. P. 515–541.
11. **Muha B., Canic S.** Existence of a weak solution to a nonlinear fluid-structure interaction problem modeling the flow of an incompressible, viscous fluid in a cylinder with deformable walls // Arch. Rational Mech. Anal. 2013. V. 207, N 3. P. 919–968.
12. **Григорян С. С., Саакян Ю. З., Цатурян А. К.** О механизме генерации звуков Короткова // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 3. С. 570–574.

13. **Григорян С. С., Саакян Ю. З., Цатурян А. К.** К теории метода Короткова // Биомеханика. София: Българска акад. на науките, 1984. Т. 15/16. С. 54–75.
14. **Шильников Л. П.** Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. М. Чуа. Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004. Ч. 1.
15. **Шильников Л. П.** Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. М. Чуа. Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2009. Ч. 2.

Поступила в редакцию 18/IX 2013 г.
