

УДК 536.3

Об адекватности модели излучательной способности экспериментальным данным при определении истинной температуры непрозрачного материала по спектру теплового излучения

С.П. Русин

Объединённый институт высоких температур РАН, Москва

E-mail: sprusin@yandex.ru

При определении термодинамической (истинной) температуры непрозрачного материала по спектру теплового излучения параметрическая модель спектральной излучательной способности подбирается таким образом, чтобы эту модель и искомую температуру материала можно было считать адекватными исходным экспериментальным данным. Анализируются возможные условия адекватности. В качестве примера рассматривается процесс выбора модели на основе опубликованных экспериментальных данных для образца из вольфрама, нагретого в вакууме при постоянной температуре.

Ключевые слова: истинная температура, спектр теплового излучения, неизвестная излучательная способность.

Введение

Как известно, для определения термодинамической (истинной) температуры свободно излучающего непрозрачного тела в диатермической среде с помощью термометра (пирометра) излучения необходимо знать спектральную излучательную способность визируемой площадки [1, 2]. Однако спектральная излучательная способность зависит от температуры, направления излучения, шероховатости поверхности и т.п. и, как правило, неизвестна с необходимой точностью. Поэтому в монографиях [3, 4] были предприняты попытки создания методов определения истинной температуры T непрозрачного объекта по его зарегистрированному спектру теплового излучения. При постановке подобной задачи в качестве исходных данных обычно используется набор интенсивностей (яркостей) $I_c(\lambda_i)$, определенных экспериментально при различных фиксированных длинах волн λ_i . При этом полагается, что ни температура, ни спектральная излучательная способность места визирования не известны. Далее задается параметрическая форма искомой функции $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(\lambda, \vec{a})$, где $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — вектор неизвестных параметров, подлежащих определению вместе с T из системы уравнений

$$I_c(\lambda_i) = \varepsilon(\lambda_i, \vec{a}) I_0(\lambda_i, T), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

где m — число уравнений, а интенсивность абсолютно черного тела (АЧТ) согласно формуле Планка записывается в виде

$$I_0(\lambda_i, T) = c_1 n^2(\lambda_i) / \left\{ \pi \lambda_i^5 \left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda_i T}\right) - 1 \right] \right\},$$

здесь $c_1 = 3,74177 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2$, $c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$ — первая и вторая постоянные излучения соответственно [1, 2]. Также задаются априорные интервалы значений для T и λ_i : $T \in [T_a, T_b]$, $\lambda_i \in [\lambda_c, \lambda_d]$.

Предполагается, что при $n + 1 < m$ «обратная задача» нахождения величин T и вектора \vec{a} из системы уравнений (1) по данным $I_c(\lambda_i)$ на указанных интервалах разрешима, например, с помощью метода наименьших квадратов (МНК). При этом получают физически интерпретируемые решения для T и $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(\lambda, \vec{a})$.

Подбор моделей для $\varepsilon(\lambda, \vec{a})$ осуществляется, начиная с самых простейших. Однако в настоящее время не выявлены четкие критерии, по которым можно считать предложенную модель и найденную температуру адекватными экспериментальным данным. Так, в работе [5] предлагалась полиномиальная аппроксимация $\ln \varepsilon(\lambda)$ и МНК, причем модель $\ln \varepsilon(\lambda_i, \vec{a})$ считается адекватной экспериментальным данным если при одной и той же температуре два приближения $\ln \varepsilon(\lambda)$ близки. Например, если для $\ln \varepsilon(\lambda)$ приближения полиномами 2-го и 3-го порядка близки, то последнее приближение из двух является верным. Такой критерий, как правило, не реализуем, т.к. при добавлении нового параметра изменяются величины всех параметров, в том числе и искомой температуры.

В настоящей работе анализируются критерии и условия, по которым предложенную модель спектральной излучательной способности и искомую температуру можно считать адекватными экспериментальным данным. Для этой цели используются экспериментальные данные работы [6], в которой определялась спектральная зависимость излучательной способности вольфрама, нагретого в вакууме при постоянной температуре. Исходные данные задаются в относительных единицах с помощью относительных излучательных способностей.

1. Задание исходных данных

Исходные данные были получены в результате следующей процедуры. В качестве объекта измерения использовался свободно излучающий образец из вольфрама, для которого была экспериментально определена зависимость ε в направлении нормали к поверхности от λ при температуре 1800 К [6]. Генерирование спектрального распределения интенсивностей $I_c(\lambda_i)$ собственного излучения в виде набора из m значений проводилось в спектральном диапазоне от 310 до 800 нм по соотношению (1). В связи с тем, что измерения в [6] проводились в вакууме, показатель преломления $n(\lambda) \equiv 1$ при всех длинах волн. Поскольку в вышеуказанной работе относительная стандартная неопределенность (относительная стандартная средняя квадратичная погрешность) для ε равнялась $\delta_\varepsilon = 0,5\%$ во всем спектральном диапазоне, то полагалось, что значения $I_c(\lambda_i)$ имеют ту же относительную неопределенность (погрешность) $\delta_\varepsilon = 0,5\% = 0,005$ в рассматриваемом спектральном диапазоне. Отметим, что величины $I_c(\lambda_i)$ в этом спектральном диапазоне различаются на порядки. Так, отношение интенсивности при $\lambda = 800$ нм к интенсивности при $\lambda = 310$ нм равно $5,5586 \cdot 10^4$.

Как известно, на финальной стадии расчета в целях определения адекватности модели экспериментальным данным для каждой длины волны λ_i вычисляется разность вида

$$\Delta_{c,i} = \varepsilon_p(\lambda_i) I_0(\lambda_i, T_p) - I_c(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

где T_p — расчетное значение искомой температуры, $\varepsilon_p(\lambda_i)$ — значение излучательной способности, рассчитанное в соответствии с параметрической моделью.

При использовании МНК каждое значение $\Delta_{c,i}$ должно быть меньше или равно абсолютной погрешности $I_c(\lambda_i)$, которую дают измерения $I_c(\lambda_i)$. Однако эту процедуру невозможно осуществить корректно, поскольку, как уже отмечалось, исходные данные по $I_c(\lambda_i)$, и соответственно $\Delta_{c,i}$, различаются на порядки величины. Поэтому необходимо либо анализировать отдельно каждое значение $\Delta_{c,i}$, что усложняет алгоритм, либо перейти к заданию набора $I_c(\lambda_i)$ в относительных величинах, когда все входные величины будут иметь один и тот же порядок. В принципе, можно исходное распределение задать в относительных величинах. Вспомним, что спектральная излучательная способность определяется как отношение спектральной интенсивности $I_c(\lambda_i)$, зарегистрированной в данном направлении, к интенсивности $I_0(\lambda_i, T)$ АЧТ при истинной температуре T . Однако температура T неизвестна, она является искомой. Как известно, если все члены уравнения разделить на одно и то же число, то полученное таким способом новое уравнение будет равносильное исходному. Можно воспользоваться еще одним способом: задать величину искомой температуры приближенно, например, того же порядка, что и T . Обозначим эту приближенно выбранную величину как T_f и назовем ее температурой отнесения. Величину T_f можно выбрать различными способами. Например, она может быть равна или несколько больше значения наибольшей яркостной температуры из данного спектрального интервала. Главное требование — чтобы значения $\varepsilon_f(\lambda_i, T_f) = I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_f)$ имели один и тот же порядок.

Рассмотрим (1) в качестве системы уравнений, где неизвестными будут значения $\varepsilon(\lambda_i)$ и T . Для того, чтобы в этой системе элементы столбца свободных членов имели один и тот же порядок величин, в работе [7] предлагалось вместо нее использовать равносильную систему

$$\varepsilon(\lambda_i) f(\lambda_i, T, T_f) = \varepsilon_f(\lambda_i, T_f), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

где $\varepsilon_f(\lambda_i, T_f)$ — известная относительная излучательная способность, имеющая вид

$$\varepsilon_f(\lambda_i, T_f) = I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_f) \quad (4)$$

T_f — известная температура отнесения, а

$$f(\lambda_i, T, T_f) = \left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda_i T_f}\right) - 1 \right] / \left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda_i T}\right) - 1 \right] — \quad (5)$$

функция, нелинейная по T .

2. Метод решения

Все функции в выражении (3) являются безразмерными. Для аппроксимации $\varepsilon(\lambda_i)$ используем полиномиальную модель с постоянными коэффициентами a_j :

$$\varepsilon(\lambda_i) \cong \varepsilon_p(\lambda_i) = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_i^{j-1}. \quad (6)$$

Модель (5) линейна по параметрам. Подставив (5) в (3), получим систему уравнений, нелинейную по T из-за нелинейности по T функции $f(\lambda_i, T, T_f)$. Нелинейность системы может быть обойдена с помощью следующего приема. Пусть искомая температура T принадлежит известному температурному интервалу $[T_a, T_b]$. Разделив этот интервал на несколько равных частей, получим набор значений T_k . При каждом значении T_k система (3) будет линейна по параметрам, и в этом случае можно использовать линейный МНК. Процесс вычислений начинается с самых простых моделей: $\varepsilon_p(\lambda_i) = a_1$, $\varepsilon_p(\lambda_i) = a_1 + a_2\lambda_i$ и т.д. При этом для каждой модели вычисляется относительная невязка по соотношению

$$\delta = \left(\sum_{i=1}^m \Delta_{f,i}^2 \right)^{1/2} / S = \|\Delta_f\| / \|\varepsilon_f\|, \quad (7)$$

где

$$\Delta_{f,i} = \varepsilon_p(\lambda_i) f(\lambda_i, T_k, T_f) - \varepsilon_f(\lambda_i, T_f), \quad (8)$$

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^m \varepsilon_f^2(\lambda_i) \right\}^{1/2} = \|\varepsilon_f\|. \quad (9)$$

Для системы (3) необходимо оценить величину погрешности столбца правой части. Абсолютная погрешность $\varepsilon_f(\lambda_i, T_f)$ определяется соотношением

$$\Delta \varepsilon_{f,i} = \Delta I_c(\lambda_i) / I_0(\lambda_i, T_f) = \delta_\varepsilon I_c(\lambda_i) / I_0(\lambda_i, T_f) = \delta_\varepsilon \varepsilon_f(\lambda_i, T_f). \quad (10)$$

Тогда

$$\delta_{\varepsilon,f} = \left(\sum_{i=1}^m \Delta \varepsilon_{f,i}^2 \right)^{1/2} / \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_{f,i}^2 \right)^{1/2} = \delta_\varepsilon = 0,005, \quad (11)$$

где $\varepsilon_{f,i} = \varepsilon_f(\lambda_i, T_f)$.

В процессе вычислений величина относительной невязки δ_{\min} в точке минимума сравнивается с величиной $\delta_{\varepsilon,f}$, которая характеризует точность экспериментального определения правой части системы (3). Модель $\varepsilon_p(\lambda_i)$ считается адекватной экспериментальным данным и величина $T_k = T_{p,N}$ (где N — номер модели) принимается за значение искомой температуры, если выполняются соотношение (I) и условия проверки сделанных предположений (II, III):

I: $\delta_{\min} < \delta_{\varepsilon,f}$;

II: модельная зависимость $\varepsilon_p(\lambda_i)$ совпадает с зависимостью $\varepsilon_p^*(\lambda_i) = I_c(\lambda_i) / I_0(\lambda_i, T_{p,N})$ в пределах точности эксперимента;

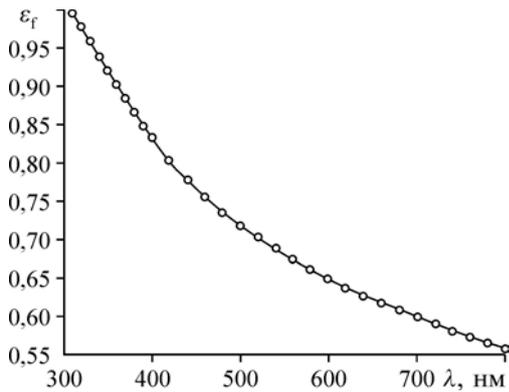
III: искомая температура, рассчитанная по заданным значениям $I_c(\lambda_i)$ и полученным значениям $\varepsilon_p(\lambda_i)$, постоянна на всем спектральном интервале в пределах точности эксперимента.

Отдельный вопрос представляет выбор величины T_f . Поскольку объект измерения находится в состоянии свободного излучения, то величина T_f должна быть такой, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon_f(\lambda_p, T_f) \leq 1$. Задавая различные значения T_f , находим, что при $T_f = 1750$ К (значение округлено до ближайшего целого) и длине волны 310 нм величина $\varepsilon_f(\lambda_1 = 310 \text{ нм}) \cong 1$. Заметим, что это же значение будет иметь и яркостная температура при данной длине волны.

Рис. 1. Зависимость ε_f от λ при $T_f = 1750$ К.

На рис. 1 представлена зависимость ε_f от λ при $T_f = 1750$ К. Из приведенных данных и результатов расчета следует, что в рассматриваемом спектральном интервале ε_f монотонно убывает от 0,994 до 0,718 с ростом λ и, соответственно, имеет один и тот же порядок величин.

Выбор температурного интервала происходит следующим образом. Поскольку объект измерения не является АЧТ, то из физических соображений следует, что его истинная температура будет больше 1750 К. Поэтому полагаем, что $T_a = 1750$ К. Что касается значения T_b , то оно может быть выбрано весьма произвольно. Главное, чтобы в этом температурном интервале функция δ принимала минимальное значение. Пусть $T_b = 1900$ К. После нахождения минимума δ_{\min} температурный интервал $[T_a, T_b]$ будет сужен.



3. Обсуждение результатов

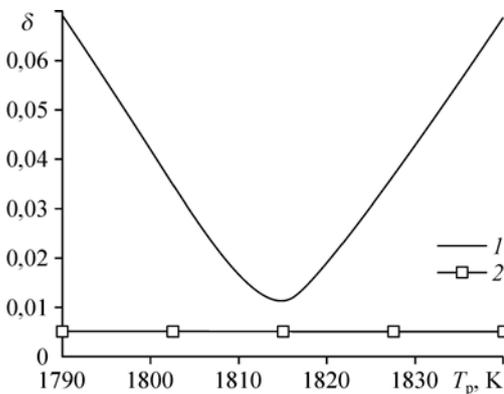
3.1. Модель 1

В рассматриваемом спектральном интервале $\varepsilon_p = a_1 = \text{const}$ («серое» приближение). После подстановки $\varepsilon_p = a_1$ в (3) получим

$$a_1 f(\lambda_i, T_k, T_f) = \varepsilon_f(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (12)$$

Шаг по T в зависимости от ширины интервала $[T_a, T_b]$ выбирался равным 5, 1 и 0,1 К. Для решения системы при заданных значениях λ_i, T_k, T_f использовалась стандартная процедура-функция `nls` системы MathLab. Эта программа находит неотрицательные решения для линейной системы уравнений вида $Ax = b$ по МНК. Поскольку искомые параметры могут принимать только положительные значения, можно проследить влияние знаков этих параметров на результат решения системы уравнений.

Проверка по условию I. На рис. 2 представлена зависимость δ от расчетной (референтной) температуры T_p . Из рисунка и вычислений следует, что условие I ($\delta_{\min} < \delta_{\varepsilon, f}$)



не выполняется. Следовательно, модель 1 неадекватна экспериментальным данным. Определим насколько уклоняется «серое» приближение от реальных зависимостей для образца из вольфрама. Так, в точке минимума функции δ расчетное значение искомой температуры $T_{p,1} = 1814,6$ К.

Рис. 2. Зависимость δ от расчетной температуры T_p для модели 1.

1 — δ , 2 — $\delta_{\varepsilon, f} = 0,005$.

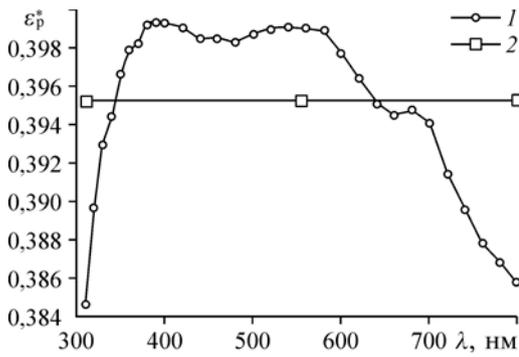


Рис. 3. Зависимость $\varepsilon_p^*(\lambda_i) = I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_{p,1})$ и $\varepsilon_p = a_1 = 0,3952$ от λ для модели 1.
1 — ε_p^* , 2 — ε_p .

Проверка по условию II. Было высказано предположение, что излучательная способность исследуемого материала постоянна в заданном спектральном интервале. Предстояло проверить справедливо ли это в пределах погрешности экспериментальных данных. На рис. 3 представлены зависимости ε_p^* и $\varepsilon_p = a_1 = 0,3952$ для модели 1 от λ_i . Для $\varepsilon_p^*(\lambda_i)$ расчеты проводились по формуле

$$\varepsilon_p^*(\lambda_i) = I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_{p,1}), \tag{13}$$

а для ε_p — по (5) при $n = 1$. Как следует из графиков рис. 3, эти две зависимости существенно различаются. Более полное представление о количественном различии графиков дает зависимость $\Delta_\varepsilon(\lambda_i)/\varepsilon_p(\lambda_i)$ от λ_i (рис. 4), рассчитанная по соотношению

$$\Delta_\varepsilon(\lambda_i)/\varepsilon_p(\lambda_i) = (\varepsilon_{p,i} - \varepsilon_{p,i}^*)/\varepsilon_{p,i}. \tag{14}$$

Из рис. 4 следует, что значения $\Delta_\varepsilon(\lambda_i)/\varepsilon_p(\lambda_i)$ в коротковолновой и длинноволновой областях спектрального интервала более чем в 4 раза превышают величину $\delta_\varepsilon = 0,005$. Таким образом, условие II также не выполняется.

Проверка по условию III. Задан набор $\varepsilon_f(\lambda_i, T_f) = I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_f)$, излучательная способность материала рассчитана с помощью модели 1 ($\varepsilon_p = a_1 = 0,3952$). В этом случае искомая температура T может быть определена с помощью соотношения

$$T_{*,i} = \frac{c_2}{\lambda_i \ln \left\{ \frac{\varepsilon_p(\lambda_i)}{\varepsilon_f(\lambda_i)} \left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda_i T_f}\right) - 1 \right] + 1 \right\}}. \tag{15}$$

Если излучательная способность $\varepsilon_p(\lambda_i)$ определена верно, то значения $T_{*,i}$ хотя и будут зависеть от длины волны, но должны быть постоянны в пределах погрешностей экспериментальных данных.

На рис. 5 представлены значения относительной погрешности T в рассматриваемом спектральном интервале. Расчеты выполнялись по формуле

$$\Delta_T/T_{p,1} = (T_{*,i} - T_{p,1})/T_{p,1}. \tag{16}$$

Рис. 4. Зависимость $\Delta_\varepsilon(\lambda_i)/\varepsilon_p(\lambda_i) = (\varepsilon_{p,i} - \varepsilon_{p,i}^*)/\varepsilon_{p,i}$ от λ для модели 1.

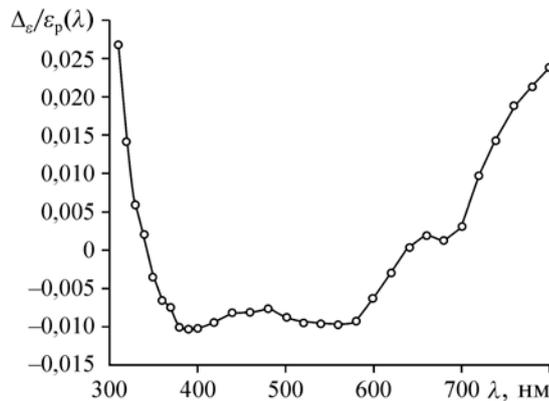


Рис. 5. Зависимость относительной погрешности определения температуры от λ для модели 1.

$$1 - \Delta_T/T_{p,1} = (T_{*,i} - T_{p,1})/T_{p,1};$$

$$2 - (\Delta T_{\text{rad}}/T_{\text{rad}})_{\text{lim}} = \pm \lambda_i T_{\text{rad}}(\lambda_i) \delta_I / c_2.$$

Также на рисунке обозначена область допустимых значений относительных погрешностей яркостных температур T_{rad} , которые рассчитывались в пределах применимости приближения Вина по формуле

$$\left(\frac{\Delta T_{\text{rad}}}{T_{\text{rad}}} \right)_{\text{lim}} = \frac{\lambda_i T_{\text{rad}}(\lambda_i)}{c_2} \cdot \frac{\Delta I}{I} = \frac{\lambda_i T_{\text{rad}}(\lambda_i)}{c_2} \delta_I. \quad (17)$$

Это выражение, полученное из соотношения $\Delta I_c = \frac{\partial I_c}{\partial T_{\text{rad}}} \Delta T_{\text{rad}} = \frac{\partial I_0(\lambda_i, T_{\text{rad}})}{\partial T_{\text{rad}}} \Delta T_{\text{rad}}$, часто используется для оценки точности измерения температуры [1, 4]. Поскольку $\delta_I = \pm 0,005$, то в одном случае полагалось, что $\delta_I = +0,005$ (верхняя штриховая линия), в другом — $\delta_I = -0,005$ (нижняя штриховая линия).

Как следует из рис. 5 и вычислений, в коротковолновой и длинноволновой областях спектрального интервала значения $\Delta_T/T_{p,1}$ выходят за допустимые пределы. Соответственно, условие 3 не выполняется.

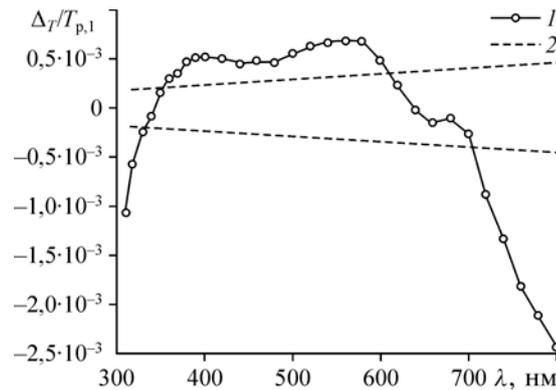
3.2. Модель 2

В рассматриваемом интервале полагается, что $\varepsilon_p = a_1 - a_2 \lambda$ (линейное приближение). Перед параметром a_2 поставлен знак «минус» в связи с тем, что для металлов величина спектральной излучательной способности, как правило, уменьшается при увеличении длины волны. После подстановки $\varepsilon_p = a_1 - a_2 \lambda$ в (3) получим

$$a_1 f(\lambda_i, T_k, T_f) - a_2 \lambda_i f(\lambda_i, T_k, T_f) = \varepsilon_f(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (18)$$

Далее применялся тот же алгоритм, что и для модели 1, но с тем различием, что при использовании процедуры-функции nnls в матрицу A добавлялся еще один столбец, соответствующий $-\lambda_i f(\lambda_i, T_k, T_f)$. Оценки адекватности проводились по тем же соотношениям, что и для модели 1.

Проверка по условию I. На рис. 6 представлена зависимость δ от расчетной (референтной) температуры T_p . Из рисунка и вычислений следует, что условие I ($\delta_{\text{min}} < \delta_{\varepsilon,f}$) выполняется. Причем неравенство $\delta < \delta_{\varepsilon,f}$ выполняется для интервала расчетных температур от 1796,6 до 1803,0 К. Следовательно, по этому условию модель 2 адекватна экспериментальным данным в указанном температурном интервале. В точке минимума функция $\delta = \delta_{\text{min},2} = 4,3842 \cdot 10^{-3}$, а расчетное значение искомой температуры $T_{p,2} = 1799,8$ К.



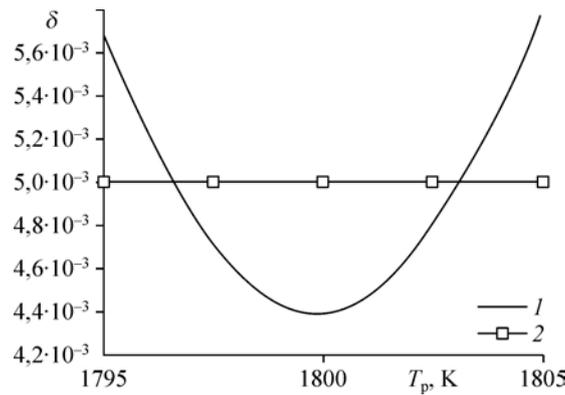


Рис. 6. Зависимость δ от расчетной температуры T_p для модели 2.
1 — δ , 2 — $\delta_{\epsilon, f} = 0,005$.

Проверка по условию II. На рис. 7 приведены зависимости ϵ_p^* и $\epsilon_p = a_1 - a_2\lambda_i$ от λ_i для модели 2. Из графиков следует, что эти две зависимости существенно не различаются. Более полное представление о количественном различии графиков дает зависимость $\Delta_\epsilon(\lambda_i)/\epsilon_p(\lambda_i)$ от λ_i , которая показана на рис. 8. Наибольшее отклонение наблюдается при $\lambda = 310$ нм. В пределах $2\delta_\epsilon$ расчетные данные $\epsilon_p^*(\lambda_i) = I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_{p,2})$ и ϵ_p совпадают. Итак, в пределах относительной погрешности условие II выполняется.

Проверка по условию III. На рис. 9 представлены значения относительной погрешности T в рассматриваемом спектральном интервале. Видно, что наибольшее отклонение от допустимого имеет место при $\lambda = 310$ нм. Если пренебречь незначительными отклонениями от допустимых в коротковолновой области спектрального интервала, то условие III выполнено. Таким образом, можно констатировать, что в пределах допустимых экспериментальных погрешностей величина искомой температуры найдена: $T_{p,2} = 1800$ К (округляем до целого значения). Это значение совпадает с величиной термодинамической температуры, полученной экспериментально.

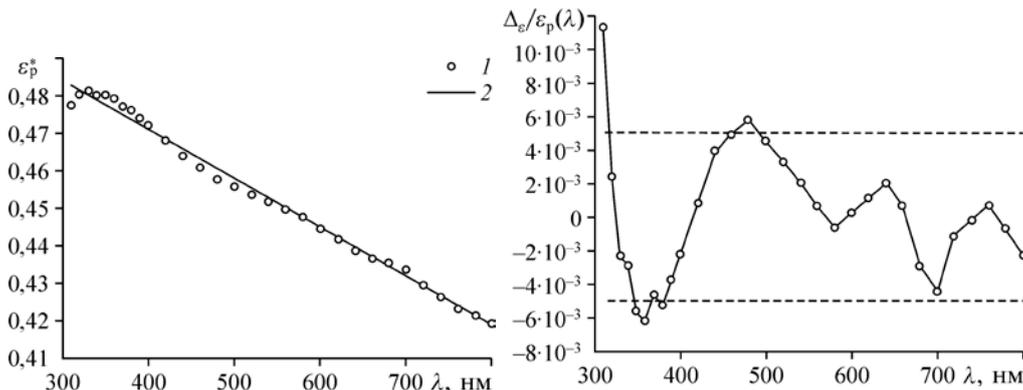


Рис. 7. Зависимости $\epsilon_p^*(\lambda_i) = I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_{p,2})$ и $\epsilon_p(\lambda_i) = a_1 - a_2\lambda_i$ для модели 2.
1 — ϵ_p^* , 2 — ϵ_p .

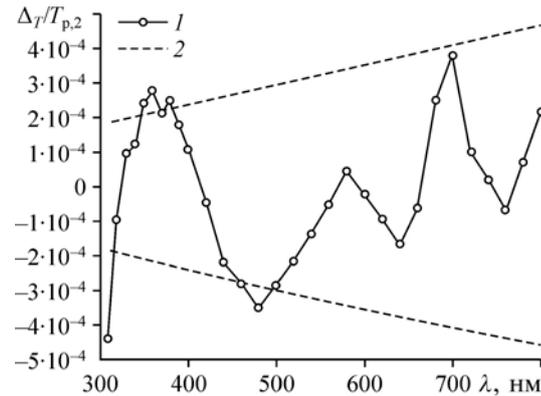
Рис. 8. Зависимость $\Delta_\epsilon(\lambda_i)/\epsilon_p(\lambda_i) = (\epsilon_{p,i} - \epsilon_{p,i}^*)/\epsilon_{p,i}$ от λ для модели 2.
1 — $\Delta_\epsilon(\lambda_i)/\epsilon_p(\lambda_i)$, 2 — $\delta_\epsilon = 0,005$ (верхняя штриховая линия) и $\delta_\epsilon = -0,005$ (нижняя штриховая линия).

Рис. 9. Зависимость относительной погрешности определения температуры от λ для модели 2.

$$1 - \Delta_T/T_{p,2} = (T_{*,i} - T_{p2})/T_{p,2},$$

$$2 - (\Delta T_{\text{rad}}/T_{\text{rad}})_{\text{lim}} = \pm \lambda T_{\text{rad}}(\lambda_i) \delta_i/c_2.$$

Имеет ли смысл увеличивать число параметров модели для подтверждения надежности полученного решения? Ответ на этот вопрос отрицательный. Для его подтверждения была рассмотрена модель 3, в которой излучательная способность аппроксимировалась полиномом третьей степени.



3.3. Модель 3

В рассматриваемом спектральном интервале полагалось, что $\varepsilon_p(\lambda_i) = a_1 - a_2\lambda_i + a_3\lambda_i^2$. Второй член в формуле взят со знаком минус с тем, чтобы сохранить тенденцию к убыванию ε_p при увеличении λ . Подставляя эту аппроксимацию в (3), получим систему уравнений вида

$$a_1 f(\lambda_i, T_k, T_f) - a_2 \lambda_i f(\lambda_i, T_k, T_f) + a_3 \lambda_i^2 f(\lambda_i, T_k, T_f) = \varepsilon_f(\lambda_i),$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (19)$$

При данной аппроксимации как в предыдущих случаях используется процедура-функция nnls с добавлением в матрицу A этой процедуры еще одного столбца, соответствующего $+\lambda_i^2 f(\lambda_i, T_k, T_f)$. В результате вычислений получаем $\delta_{\min,3} = 3,9401 \cdot 10^{-3}$, $T_{p,3} = 1790,6$ К. По первому условию ($\delta < \delta_{\varepsilon,f}$) модель 3 адекватна экспериментальным данным в интервале расчетных температур T_p от 1777,8 до 1802,9 К. Причем по сравнению с соответствующим интервалом для модели 2 этот интервал увеличился более чем в три раза. Такое отличие можно объяснить более плавной зависимостью ε_p от λ для модели 3. Остальные два условия выполняются примерно с той же точностью, что и для модели 2. Вместе с тем, величина $T_{p,3} = 1790,6$ К существенно отличается от значения $T_{p,2} = 1799,6$ К, полученного для модели 2. При использовании модели вида $\varepsilon_p(\lambda_i) = a_1 - a_2\lambda_i + a_3\lambda_i^2$ было получено значение $a_3 = 0$. В этом случае трехпараметрическая модель ε_p свелась к модели 2.

Как известно, при минимизации относительной невязки δ по МНК каждый раз вычисляются величины искомых параметров. При добавлении в модель нового параметра значения всех параметров вычисляются заново. Причем если новый параметр не равен нулю, то величины прежних параметров изменяются. Поэтому, добавив в модель еще один параметр, в частности a_3 , следует ожидать, что значения всех прежних параметров изменятся, в том числе и значение искомой температуры. В связи с этим при подборе параметрических моделей для излучательной способности важно первое попадание в область адекватности по указанным трем условиям.

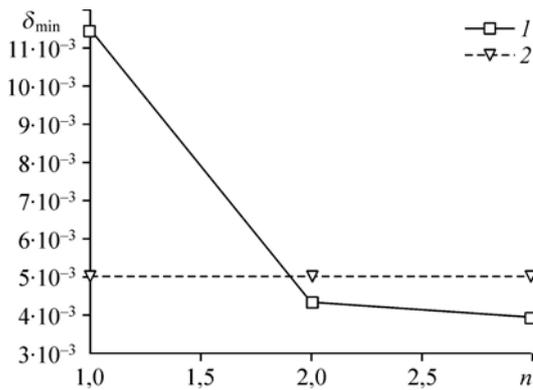


Рис. 10. Зависимость δ_{\min} от n , спектральный интервал от 310 до 800 нм.

1 — δ_{\min} , 2 — δ_{exp} .

На рис. 10 представлена зависимость относительной невязки δ_{\min} в точке минимума от числа параметров n модели для ε_p . Для наглядности точки соединены отрезками прямых линий. Здесь же штриховой линией показаны значения $\delta_{\varepsilon, f}$. Из рис. 10 и вычислений

следует, что при попадании модели для ε_p в область адекватности значение δ_{\min} уменьшается более чем в 2,5 раза.

Заключение

Показано, что параметрическую модель спектральной излучательной способности и истинную температуру материала можно считать адекватными экспериментальным данным, если выполняются следующие условия:

— $\delta_{\min} < \delta_{\varepsilon, f}$;

— модельная зависимость $\varepsilon_p(\lambda_i)$ совпадает с зависимостью $\varepsilon_p^*(\lambda_i) = I_c(\lambda_i) / I_0(\lambda_i, T_{p, N})$ в пределах точности эксперимента;

— искомая температура, рассчитанная по заданным значениям $I_c(\lambda_i)$ и полученным значениям $\varepsilon_p(\lambda_i)$, постоянна на всем спектральном интервале в пределах точности эксперимента.

Как показали компьютерные вычисления при проверке, выполненной согласно пп. 2 и 3, значения параметров модели и величина искомой температуры имеют наименьший разброс в точке минимума относительной невязки по сравнению с другими адекватными моделями.

Вычисления показали, что относительная невязка δ_{\min} уменьшается более чем в два раза при первом попадании параметров модели ε в область адекватности. Дальнейшее увеличение числа параметров нецелесообразно, т.к. при добавлении нового параметра, отличного от нуля, изменяются значения всех остальных параметров, в том числе и значение искомой температуры, и увеличивается область выполнения неравенства $\delta < \delta_{\varepsilon, f}$, минимумы δ становятся менее острыми. При этом невязка δ_{\min} уменьшается незначительно.

В связи с изменением величин $I_c(\lambda_i)$ на порядки входные данные при решении задачи были преобразованы в относительные величины — относительные излучательные способности $\varepsilon_f(\lambda_i, T_f) = I_c(\lambda_i) / I_0(\lambda_i, T_f)$, где T_f — температура отнесения. Алгоритм реализовывался в вычислительной среде MathLab с использованием стандартных процедур-функций.

Согласно рассмотренному подходу в работе [8] была проведена оценка адекватности модели $\ln \varepsilon = b_1 - b_2 \lambda$ (здесь b_1 и b_2 — постоянные параметры) экспериментальным данным для того же примера, но входные данные были заданы в виде набора яркостных температур $T_{\text{rad}}(\lambda_i)$, эквивалентного набору спектральных интенсивностей $I_c(\lambda_i)$.

В результате было получено практически то же значение искомой температуры ($T_p = 1800,1$ К) и близкая зависимость ε от λ . Такое совпадение говорит о том, что в пределах погрешности экспериментальных данных для $\varepsilon(\lambda)$ может быть получено несколько адекватных параметрических моделей. Эта особенность решения некорректных задач была отмечена ранее [9].

Поскольку наибольшую точность определения истинной температуры дают простые модели $\varepsilon(\lambda)$, важен поиск этих моделей по зарегистрированному спектру теплового излучения визируемой площадки. Такой поиск может быть осуществлен с помощью зависимости ε_f или $\ln \varepsilon_f$ от λ или от $1/\lambda$ соответственно [7]. Кроме того, полезную информацию об излучательной способности объекта измерения можно получить на основании экспериментальной зависимости $1/T_{\text{rad}}$ от λ . Причем чем короче длина волны, тем большую чувствительность к температуре обнаруживают эти зависимости.

Список литературы

1. **Radiometric** temperature measurements. I. Fundamentals / Eds. Z.M. Zhang, B.K. Tsai, G. Mashin // Experimental Methods in the Physical Sciences. Elsevier, 2009. Vol. 42. 343 p.
2. **Radiometric** temperature measurements. II. Applications / Eds. Z.M. Zhang, B.K. Tsai, G. Mashin // Experimental Methods in the Physical Sciences. Elsevier, 2010. Vol. 43. 478 p.
3. **Свет Д.Я.** Оптические методы измерения истинных температур. М.: Наука, 1982. 295 с.
4. **Снопко В.Н.** Основы методов пирометрии по спектру теплового излучения. Минск: Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Белоруси, 1999. 224 с.
5. **Girard F., Battuello M., Florio M.** Multiwavelength thermometry at high temperature: why it is advantageous to work in the ultraviolet // Int J. Thermophys. 2014. Vol. 35. P. 1401–1413.
6. **Larrabee R.D.** Spectral emissivity of tungsten // J. Optical. Society America. 1959. Vol. 49, No. 6. P. 619–625.
7. **Русин С.П.** Восстановление температуры непрозрачных тел по спектру теплового излучения: использование относительной излучательной способности для выбора оптимального спектрального участка // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20, № 5. С. 643–659.
8. **Русин С.П.** Определение температуры непрозрачного объекта по спектру теплового излучения: формы представления исходных данных и методы // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 4. С. 561–576.
9. **Леонов А.С., Русин С.П.** О решении обратной задачи определения температуры по спектру теплового излучения нагретых тел // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8, № 3. С. 475–486.

*Статья поступила в редакцию 2 декабря 2018 г.,
после доработки — 9 декабря 2018 г.,
принята к публикации 11 декабря 2018 г.*

