3. **Titov V. M., Bordzilovskij S. A., Sil'vestrov V.V.** Shock compression of liquid hydrogen at various experimental geometries. Paper presented at the V Intern. Colloquium on Gasdynamics of Explosions and Reactive Systems. Bourges, France, 1975.
4. **Сильвестров В. В., Урушкин В. П.** Детонация трубчатых зарядов ВВ в жидком водороде.— ФГВ, 1977, т. 13, № 1.
5. **Мардашев А. М., Митрофанов В. В.** Поддержание ударной волны в канале трубчатого заряда из чувствительного ВВ с оболочкой.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 17. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
6. **Mitrophanov V. V.** Detonation of two-layer systems. Paper presented at the V Intern. Colloquium on Casdynamics of Explosions and Reactive Systems. Bourges, France, 1975.
7. **Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л.А.** Точечный взрыв. М., «Наука», 1974.
8. **Кузнецов Н. Н., Старова Е. Н., Туманов В. Г.** О методе сглаживания.—В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 19. М., изд. Моск. ун-та, 1972.

УДК 532.593; 541.182.3

ФОРМИРОВАНИЕ ПЛОСКОЙ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ВОЛНЫ В АЭРОВЗВЕСИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ

А. Д. Гольцикер, С. В. Тараканов, О. М. Тодес, С. А. Чивилихин

(Ленинград)

Анализ распространения стационарной ударной волны в аэровзвеси [1—4] показал, что позади ударного фронта имеется довольно широкая зона релаксации, в которой взвешенные частицы постепенно ускоряются газовым потоком. В этой зоне идет прогрев частиц до температуры газа, выделение тепла за счет работы сил трения, а также возможны и различные фазовые переходы, например плавление и испарение частиц аэровзвеси. Получение аналитического решения совокупности дифференциальных уравнений, описывающих газ и частицы, весьма затруднительно; как правило, решения для различных частных случаев находились с помощью ЭВМ.

Рассмотрение вопроса о нестационарном участке формирования ударной волны в аэровзвеси, например, когда ударная волна, идущая в чистом газе, налетает на область, заполненную аэровзвесью, представляет еще большие математические трудности.

При малой объемной концентрации частиц передний фронт ударной волны входит в аэровзвесь практически без изменений. Однако контактных поверхностей сразу становится уже две — граница движущегося облака частиц и граница раздела между первоначально (до прихода ударной волны) запыленным и чистым газом *. Начавшие двигаться частицы создают в окружающей среде возмущения — волны разрежения и сжатия. Поскольку в ударной волне передний фронт перемещается относительно движущегося сзади газа со скоростью, меньшей, чем скорость звука, то эти возмущения догоняют фронт и начинают его деформировать. Нако-

* Вторую границу естественно назвать газовой контактной поверхностью. Ясно, что ее траектория есть траектория движения порции газа, находившейся в начальный момент на неподвижной поверхности раздела газа и аэровзвеси.

нец, возникает отраженная ударная волна, распространяющаяся в противоположном направлении.

Следует еще учесть, что с термодинамической точки зрения частицы аэровзвеси играют двойственную роль. С одной стороны, это стоки тепла, когда они прогреваются от сжатого и нагретого в ударной волне газа. С другой стороны, вследствие диссипации энергии при трении газа о частицы на поверхности последних выделяется тепло и имеется дополнительный источник нагрева газа. Эта двойственная роль частиц в общем тепловом балансе может приводить к немонотонному изменению температуры в релаксационной зоне.

Для определения характерных особенностей формирующейся в аэровзвеси релаксационной волны с успехом могут быть использованы разностные методы. Однако прежде, чем просчитывать многочисленные варианты с различными начальными параметрами для выявления определенных количественных закономерностей, желательно хотя бы приближенными методами установить качественную картину влияния всех этих параметров на структуру формирующейся волны. Такой путь решения поставленной задачи излагается ниже.

1. Постановка задачи. В основу разработанного метода положен итерационный подход со своеобразным отделением переменных, характеризующих состояние и движение газа, от переменных состояния и движения твердой фазы.

Чтобы облегчить выявление всех качественных закономерностей, прежде всего вводятся некоторые упрощения. Газ считается идеальным, подчиняющимся уравнению Менделеева —Клапейрона и имеющим определенное значение показателя адиабаты $\gamma = c_p/c_v$. Совокупность частиц рассматривается как сплошная среда. При малой объемной концентрации $\rho_p/\rho_ч < 10^{-3}$, где ρ_p — массовая плотность дисперсной компоненты; $\rho_ч$ — плотность вещества частиц, эта совокупность может рассматриваться как невязкий абсолютно пластичный газ. Размеры частиц достаточно малы, чтобы взвесь заметно не оседала за время прохождения релаксационной волны. Все частицы имеют одинаковый радиус. Теплопроводность твердой компоненты много больше теплопроводности газа, так что градиенты температуры внутри частицы пренебрежимо малы. Локальные изменения поля скоростей газа сосредоточены лишь в непосредственной близости данной частицы и не влияют на соседние. Времена релаксации скорости и прогрева частиц определяются вязкостью и теплопроводностью газа* и равны соответственно

$$\tau_u = \frac{1}{18}\frac{\rho_ч d^2}{\mu}, \qquad \tau_T = \frac{1}{12}\frac{\rho_ч c_ч d^2}{k},$$

где $\rho_ч$, $c_ч$ — плотность и удельная теплоемкость материала частиц; d — диаметр; μ, k — вязкость и теплопроводность газа, т. е. практически близки друг к другу.

Ограничения, наложенные на размер d и массовую плотность ρ_p условиями сплошности дисперсной компоненты, изолированности частиц и условием отсутствия оседания частиц под действием силы тяжести, для конкретной системы песок — воздух при нормальных условиях могут быть записаны в виде неравенств

$$10^{-18} d^{-3}\,\text{кг/м}^3 < \rho_p < 10\,\text{кг/м}^3, \quad d < 10^{-3}\,\text{м}.$$

---

* При необходимости может быть дополнительно учтено влияние критериев Рейнольдса и Маха на величину этих времен релаксации.

При сделанных допущениях аэровзвесь можно рассматривать как совокупность двух взаимопроникающих газов и уравнения баланса массы, импульса и энергии записать для каждого из них отдельно в виде [3]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u = 0; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 + \frac{p}{\gamma} \right) = \rho_p (u_p - u) f \mu^0 (T); \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left[T + \gamma (\gamma - 1) \frac{u^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \rho u \left[T + \gamma (\gamma - 1) \frac{u^2}{2} + (\gamma - 1) \frac{p}{\rho} \right] =$$
$$= \rho_p [\gamma (\gamma - 1) u_p (u_p - u) f + \lambda c (T_p - T) g] \mu^0 (T); \tag{1.3}$$

$$p = \rho T; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_p + \frac{\partial}{\partial x} \rho_p u_p = 0; \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_p u_p + \frac{\partial}{\partial x} \rho_p u_p^2 = - \rho_p (u_p - u) f \mu^0 (T); \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_p \left[c T_p + \gamma (\gamma - 1) \frac{u_p^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \rho_p u_p \left[c T_p + \gamma (\gamma - 1) \frac{u_p^2}{2} \right] =$$
$$= - \rho_p [\gamma (\gamma - 1) u_p (u_p - u) f + \lambda c (T_p - T) g] \mu^0 (T), \tag{1.7}$$

где ρ, u, p, T — плотность, скорость, давление и температура газовой компоненты; p — индекс, отмечающий параметры дисперсной компоненты; $\lambda = \tau_u / \tau_T = (2/3)\gamma / c \Pr$ — отношение характерных времен релаксации; $c = c_ч / c_v$ — относительная удельная теплоемкость материала частиц; $\Pr$ — число Праидтля; $\mu^0(T) = \mu(T)/\mu(T_0)$ — относительная динамическая вязкость газа; f, g — величины, характеризующие отличие сопротивления частиц от закона Стокса и теплообмена от режима, при котором $\mathrm{Nu} = 2$. Считаем [5], что $f = (1 + \mathrm{Re}^{1/2}/6 + \mathrm{Re}/60)[1 + \exp(-0{,}427/\mathrm{M}^{4{,}63} - 3{,}0/\mathrm{Re}^{0{,}88})]$, $g = 1 + 0{,}3\Pr^{1/3}\mathrm{Re}^{1/2}$. Эти уравнения представлены в безразмерной форме, где за масштабы зависимых переменных выбраны значения ρ, p, T и скорости звука a в невозмущенном газе, а в качестве естественных единиц измерения времени и длины взяты характерное время τ_u и длина релаксации $\lambda_u = a\tau_u$, рассчитанные также по параметрам покоящегося газа.

Видно, что полная система дифференциальных уравнений (1.1) — (1.7) распадается на две подсистемы, описывающие отдельную газовую и дисперсную компоненты. Связь между подсистемами осуществляется только через правые части уравнений — объемные источники. Это обстоятельство позволяет построить следующую итерационную схему. Сначала, полагая, что частицы не оказывают влияния на газовый поток, можно определить из (1.5) — (1.7) распределения параметров облака частиц за ударной волной. Используя полученное таким образом описание течения дисперсной компоненты, можно найти теперь из подсистемы (1.1) — (1.4) возмущения параметров газа, а затем попытаться вновь решить (1.5) — (1.7) с целью уточнения полученного ранее распределения параметров частиц в ударной волне и т. д. Для установления качественной картины явлений, возникающих при формировании релаксационной волны, достаточно рассмотреть результаты, получаемые после первого же итерационного шага.

2. Аналитическое решение. Пусть на облако частиц, заполняющее полупространство $x > 0$ и находящееся в равновесии с покоящимся га-

зом, в начальный момент времени $t = 0$ набегает плоская ударная волна бесконечной протяженности с заданными параметрами p_0, u_0, ρ_0, T_0. Будем рассматривать систему координат $\xi = w_0 t - x$, движущуюся совместно с фронтом волны, и введем скорости $v_p = w_0 - u_p$, $v = w_0 - u$. Поскольку принимаем, что сначала частицы не оказывают влияния на газовую компоненту, внутри области, занятой частицами, ρ_p, v_p и T_p не зависят от времени, следовательно, подсистема (1.5) — (1.7) легко интегрируется. Отсюда профили величин ρ_p, v_p, T_p за фронтом скачка, а также закон движения поверхности контакта газа и аэровзвеси $\xi_*(t)$ будем полагать известными.

Рассмотрим теперь влияние движущейся дисперсной компоненты на параметры газа в ударной волне. Если считать, что концентрация частиц невелика, то возмущения, вносимые в газовый поток, будут достаточно малыми. Положив в этом случае

$$\rho_1 = (\rho - \rho_0)/\rho_0,\ T_1 = (T - T_0)/T_0,\ p_1 = (p - p_0)/p_0,\ v_1 = (v - v_0)/a_0,$$

представим подсистему (1.1) — (1.4) в линеаризованной форме

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + a_0 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0; \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = F_1(\xi)\vartheta[\xi_*(t) - \xi]; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + (\gamma - 1) a_0 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = F_2(\xi)\,\vartheta[\xi_*(t) - \xi], \tag{2.3}$$

где

$$F_1 = \frac{1}{a_0} \frac{\rho_p}{\rho_0} (v_p - v_0)\,\mu^0(T_0)\, f(v_p - v_0), \tag{2.4}$$

$$F_2 = \frac{1}{a_0^2} \frac{\rho_p}{\rho_0} [c\lambda (T_p - T_0)\, g(v_p - v_0) + \gamma(\gamma - 1)(v_p - v_0)^2 f(v_p - v_0)]\ \mu^0(T_0) \tag{2.5}$$

— известные функции, зависящие лишь от пространственной переменной ξ, а $\vartheta(\xi)$ — тета-функция.

Скачок уплотнения считаем зафиксированным в точке $\xi = 0$, что верно до тех пор, пока смещение s фронта несущественно по сравнению с длиной релаксационной зоны $l = u_0 \tau_u$. Поскольку время установления стационарного течения за фронтом ударной волны $\sim \tau_u$, в рассматриваемом диапазоне изменения времени $s/l \sim w/u_0 \ll 1$, где w — возмущение скорости фронта волны. В дальнейшем, полагая формально $t = \infty$, будем понимать под этим такой момент времени порядка τ_u, при котором уже можно считать течение установившимся.

Граничные условия при $\xi = 0$ имеют вид

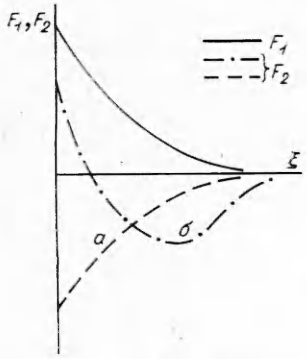
$$\rho_1 = \alpha v_1,\ T_1 = \beta v_1, \tag{2.6}$$

где α, β — постоянные, определяемые из соотношений Ренкина — Гюгонио. Начальные условия тривиальны: $\rho_1 = T_1 = v_1 = 0$.

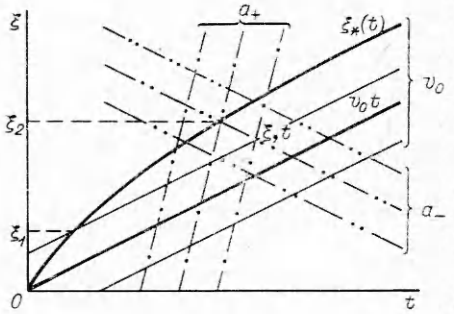
Рассмотрим характер зависимостей $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$. Функция $F_1(\xi)$ (2.4) описывает передачу импульса от дисперсной компоненты к газовой. Поэтому $F_1(\xi)$ всюду положительна и стремится к нулю при больших ξ. Наибольшее значение она принимает непосредственно за фронтом скачка, так как здесь разность скоростей частиц и газового потока максимальна. График $F_1(\xi)$ представляет спадающую кривую (фиг. 1).

Второй источник $F_2(\xi)$ характеризует передачу тепла от газа к дисперсной компоненте (первое слагаемое в (2.5)) и выделение тепла в результате частичной диссипации кинетической энергии при трении между части-

цами и потоком газа. Для слабой ударной волны (кривая *а*) преобладающим оказывается первое слагаемое, поэтому $F_2(\xi) < 0$ (штриховая кривая). В случае сильной волны (кривая *б*) влияние диссипации становится существенным, особенно в непосредственной близости от фронта скачка.



Фиг. 1



Фиг. 2

Можно показать, что для ударных волн достаточно большой интенсивности $F_2(0)$ становится положительным и график $F_2(\xi)$ соответствует штрихпунктирной кривой. Наличие резкого спада функции $F_2(\xi)$ в отрицательную область позволяет условно разделить зону релаксации на две части, в первой из которых, расположенной сразу за скачком, преобладает выделение тепла в результате диссипации кинетической энергии, а во второй — передача тепла от газа к частицам.

Систему уравнений (2.1)—(2.3) будем решать методом характеристик. В принятой постановке характеристические линии прямые, тангенсы углов наклона которых относительно оси известны и равны $v_0 + a_0$, $v_0 - a_0$, v_0. Вводя новые зависимые переменные $S = \gamma T_1 - (\gamma - 1)p_1$, $R_1 = p_1/\gamma + v_1$, $R_2 = p_1/\gamma - v_1$ и заменяя производные в левых частях (2.1) — (2.3) производными вдоль характеристических направлений, получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой в области $\xi < a_+ t$ имеет вид

$$S(\xi, t) = \frac{1}{v_0} \int_{\xi_1(\xi,t)}^{\xi} F_2 d\zeta + S^0\left(t - \frac{\xi}{v_0}\right); \tag{2.7}$$

$$R_1(\xi, t) = \frac{1}{a_+} \int_0^{\xi} \left(F_1 + \frac{F_2}{\gamma}\right) d\zeta + R_1^0\left(t - \frac{\xi}{a_+}\right); \tag{2.8}$$

$$R_2(\xi, t) = -\frac{1}{|a_-|} \int_{\xi}^{\xi_2(\xi,t)} \left(F_1 - \frac{F_2}{\gamma}\right) d\zeta, \tag{2.9}$$

где $a_+ = v_0 + a_0$; $a_- = v_0 - a_0$; S^0, R_1^0 — значения функций S и R_1 на скачке; $\xi_1(\xi, t)$, $\xi_2(\xi, t)$ — ординаты точек пересечения контактной поверхности $\xi_*(t)$ с характеристиками семейств v_0 и a_- соответственно (фиг. 2), проходящими через точку (ξ, t), $\xi_1(\xi, t)$ и $\xi_2(\xi, t)$, определяются из уравнений

$$t - (\xi - \xi_1)/v_0 = t_*(\xi_1), \quad t + (\xi - \xi_2)/|a_-| = t_*(\xi_2),$$

где $t_*(\xi)$ — функция, обратная $\xi_*(t)$.

Для определения значений S и R_1 на скачке уплотнения положим в (2.9) $\xi = 0$. Найденное таким образом значение $R_2^0(t)$ и условия (2.6) позволяют получить искомые величины S^0, R_1^0, поэтому формулы (2.7) — (2.9) дают решение поставленной задачи. Физический смысл слагаемых, входящих в полученные соотношения, очевиден. Пусть источники энергии отсутствуют, т. е. $F_2 \equiv 0$. Положив далее $R_2 \equiv 0$, будем иметь

$$v_1 = \rho_1 = \frac{p_1}{\gamma} = \frac{T_1}{\gamma - 1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_+}\int_0^{\xi} F_1 d\zeta + R_1^0\left(t - \frac{\xi}{a_+}\right)\right],$$

откуда видно, что поскольку интеграл положителен, возмущения, распространяющиеся вдоль характеристик a_+, представляют собой волны сжатия. Аналогично, положив $R_1 \equiv 0$, придем к выражению, показывающему, что характеристики a_- переносят волны разрежения. Оба семейства волн (сжатия и разрежения) образуются в результате обмена импульсом между газовой и дисперсной компонентой. При наличии источника энергии амплитуда возникающих таким образом волн в некоторой точке будет зависеть от интенсивности источника в той же точке. Об этом свидетельствуют вторые члены, стоящие в скобках в (2.8), (2.9). Поскольку далее источники F_1 и F_2 непрерывно распределены по всей области, заполненной взвешенными частицами, происходит суммирование возмущений вдоль соответствующих характеристик. Кроме того, в результате тепловыделения источников, энтропия малой порции газа меняется при движении последней вдоль характеристик семейства v_0 (2.7).

3. Деформация профилей параметров газа за фронтом ударной волны. Покажем, что контактная поверхность $\xi_*(t)$ является поверхностью слабого разрыва функций v_1, ρ_1, p_1 и T_1. Из соотношений (2.7) — (2.9) получим

$$\left\{\frac{\partial v_1}{\partial \xi}\right\} = \frac{[\dot\xi_*(t) - v_0]\,F_1(\xi_*) + \frac{a_0}{\gamma}F_2(\xi_*)}{[a_+ - \dot\xi_*(t)]\,[|a_-| + \dot\xi_*(t)]}, \qquad \left\{\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\right\} = \frac{a_0}{\dot\xi_*(t) - v_0}\left\{\frac{\partial v_1}{\partial \xi}\right\},$$

$$\left\{\frac{\partial p_1}{\partial \xi}\right\} = \gamma\frac{a_0 F_1(\xi_*) + \frac{1}{\gamma}[\dot\xi_*(t) - v_0]\,F_2(\xi_*)}{[a_+ - \dot\xi_*(t)]\,[|a_-| + \dot\xi_*(t)]}, \quad \text{где} \quad \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\right\} = \frac{\partial}{\partial \xi}\Big|_{\xi_* - 0} - \frac{\partial}{\partial \xi}\Big|_{\xi_* + 0}.$$

Можно показать, что в отличие от (2.7) — (2.9) соотношения для скачков производных в интервале времени от 0 до t_*, где t_* — корень уравнения $\dot\xi_*(t) = a_+$, справедливы и тогда, когда поверхность контакта $\xi_*(t)$ расположена выше звуковой линии $\xi = a_+ t$. Такой случай реализуется для ударной волны со сверхзвуковым течением газа за ее фронтом, т. е. когда $\dot\xi_*(0) > a_+$. По этой причине в момент $t = t_*$, при котором скорость передней частицы становится равной скорости генерируемых ею возмущений, разрывы производных всех параметров газа обращаются в бесконечность, что соответствует образованию на поверхности $\xi_*(t)$ отраженного от аэровзвеси скачка уплотнения. Для ударных волн с дозвуковым режимом течения газа за фронтом ($\dot\xi_*(0) < a_+$) этого не происходит.

Видно, что разрывы производных скорости и давления на поверхности $\xi_*(t)$ с течением времени стремятся к нулю. Для плотности же при больших временах имеем

$$\{\partial \rho_1/\partial \xi\} \approx (1/\gamma)F_2(\xi_*)/(\dot\xi_*(t) - v_0). \tag{3.1}$$

Поэтому в зависимости от скорости стремления к пулю числителя и знаменателя в (3.1) величина разрыва производной плотности, а следова-

тельно, и температуры, поскольку $\{\partial p_1/\partial\xi\}_{t\to\infty}\to 0$, может стать либо равной нулю, либо постоянной, отличной от нуля, либо бесконечной. В последнем случае, который реализуется, когда тепловая релаксация протекает медленнее динамической, на поверхности $\xi_*(t)$ образуется сильный разрыв плотности и температуры газовой компоненты.

Рассмотрим изменение профиля температуры газа за фронтом ударной волны. Для простоты будем считать течение установившимся. Можно показать, что для слабого скачка уплотнения

$$v_0\frac{dT_1}{d\xi}=\frac{\gamma(\gamma-1)\,a_0v_0F_1(\xi)+(\gamma-1)\dfrac{\rho_p}{\rho_0}c\lambda\,(T_0-T_p)}{a_0^2-v_0^2}>0,$$

т. е. функция $T_1(\xi)$ монотонно возрастает. В случае сильной ударной волны

$$v_0\frac{dT_1}{d\xi}\to\frac{\gamma(\gamma-1)\,a_0v_0F_1(\xi)+\dfrac{\gamma+1}{2}a_0^2F_2(\xi)}{a_0^2-v_0^2}.$$

Поэтому (см. фиг. 1) $dT_1/d\xi|_{\xi=0}>0$, т. е. сразу за фронтом температура увеличивается. На некотором расстоянии от фронта скачка, где диссипация энергии уже несущественна, могут возникнуть различные ситуации. Если, например, выравнивание температур частиц и газового потока происходит быстрее, чем выравнивание скоростей, то здесь по-прежнему $dT_1/d\xi>0$, следовательно, температурный профиль всюду возрастает. Если же, наоборот, релаксация температур протекает медленнее, то основное влияние на температуру газа в этой области оказывает теплообмен с частицами. В этом случае

$$v_0\frac{dT_1}{d\xi}\approx-\frac{\rho_p}{\rho_0}\frac{c\lambda\,(T_0-T_p)}{a_0^2-v_0^2}<0,$$

т. е. температура газа падает. Таким образом, при указанных условиях наблюдается немонотонность изменения температуры в ударной волне.

Определим характер деформаций профилей параметров газа в ударных волнах малой интенсивности. Будем считать, что при $\xi=0$ $S^0=R_1^0=0$. Это приближение неплохо выполняется для скачков с давлением на фронте вплоть до $p_0=2{,}5$ [6].

Найдем при больших значениях времени величины ρ_1, v_1, p_1 и T_1 на скачке уплотнения, поверхности контакта газа и аэровзвеси $\xi_*(t)$ и газовой контактной поверхности $\xi=v_0t$, представляющей траекторию той порции газа, которая в начальный момент находилась в точке $\xi=0$. Имеем

$$\xi=0,\quad \rho_\Phi=-v_\Phi=\frac{p_\Phi}{\gamma}=\frac{T_\Phi}{\gamma-1}=-\frac{1}{2|a_-|}\int_0^\infty\left(F_1-\frac{F_2}{\gamma}\right)d\zeta;$$

$$\xi=\xi_*(t),\quad \rho_*=v_*=\frac{p_*}{\gamma}=\frac{T_*}{\gamma-1}=\frac{1}{2a_+}\int_0^\infty\left(F_1+\frac{F_2}{\gamma}\right)d\zeta; \tag{3.2}$$

$$\xi=v_0t,\quad v_1=\frac{p_1}{\gamma}=v_*=\frac{p_*}{\gamma},$$

$$\rho_1=\rho_*-\frac{1}{2\gamma v_0}\int_0^\infty F_2d\zeta,\quad T_1=T_*+\frac{1}{2\gamma v_0}\int_0^\infty F_2d\zeta.$$

Из приведенных выражений следует

$$\rho_ф,\ p_ф,\ T_ф,\ T_1 < 0,\ \rho_*,\ p_*,\ T_*,\ \rho_1 > 0,$$

а возмущение скорости всюду положительно. Кроме того, абсолютные величины возмущений всех параметров газовой компоненты принимают наибольшие значения на фронте ударной волны, а наименьшие — на поверхности $\xi_*(t)$.

4. Отраженная ударная волна. Существование отраженного скачка уплотнения при взаимодействии ударной волны с аэровзвесью очевидно, поскольку возникающие при этом волны сжатия, как было показано, распространяются в сторону, противоположную движению падающей волны. Семейство же волн сжатия, как известно, неустойчиво и с течением времени порождает скачок уплотнения.

Определим момент и точку возникновения отраженного скачка. В координатной системе, связанной с потоком газа за фронтом падающей ударной волны и началом координат, расположенным на газовой контактной поверхности ($\xi = v_0 t$), данная задача аналогична задаче о вдвигании в неподвижный газ поршня. Отличие состоит в том, что в рассматриваемом случае скорость движения поршня $\dot\zeta(t) = \dot\xi_*(t) - v_0$ и скорость газа на его поверхности $u_\zeta = a_0 v_*(t)$ различны. Ограничимся случаем дозвуковой скорости движения контактной поверхности $\zeta(t)$. Зависимость скорости газа перед поршнем от координаты и времени неявно можно записать в виде [7]

$$x = \zeta(u) + (a_0 + [(\gamma+1)/2]u)[t - t_\zeta(u)]. \tag{4.1}$$

Из условия пересечения характеристик получаем координату x_x и момент t_x возникновения ударной волны

$$x_x = \frac{2}{\gamma+1}\frac{a_0[a_0 - \dot\zeta(0)]}{\dot u_\zeta(0)}, \quad t_x = \frac{2}{\gamma+1}\frac{a_0 - \dot\zeta(0)}{\dot u_\zeta(0)}. \tag{4.2}$$

Предполагая, что отраженная волна — волна умеренной интенсивности, можно записать для скорости движения ее фронта выражение [6]

$$U = a_0 + [(\gamma+1)/2]\,u + [(\gamma+1)^2/32a_0]u^2. \tag{4.3}$$

Дифференцируя (4.1) и используя (4.3), получим уравнение

$$\frac{(\gamma+1)^2}{32a_0}u\left(u - \frac{8a_0}{\gamma+1}\right)\frac{dt}{du} - \frac{\gamma+1}{2}t = \frac{d}{du}\left[\zeta - \left(a_0 + \frac{\gamma+1}{2}u\right)t_\zeta\right],$$

решение которого при начальном условии $t|_{u=0} = t_x$

$$t = \frac{a_0}{16}\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{a_0}{u}\right)\int_0^u \frac{v\,d\left[\left(a_0 + \frac{\gamma+1}{2}v\right)t_\zeta(v) - \zeta(v)\right]}{\left(a_0 - \frac{\gamma+1}{8}v\right)^3},$$

где v, переменная интегрирования, дает совместно с (4.1) параметрическое задание закона движения фронта отраженного скачка.

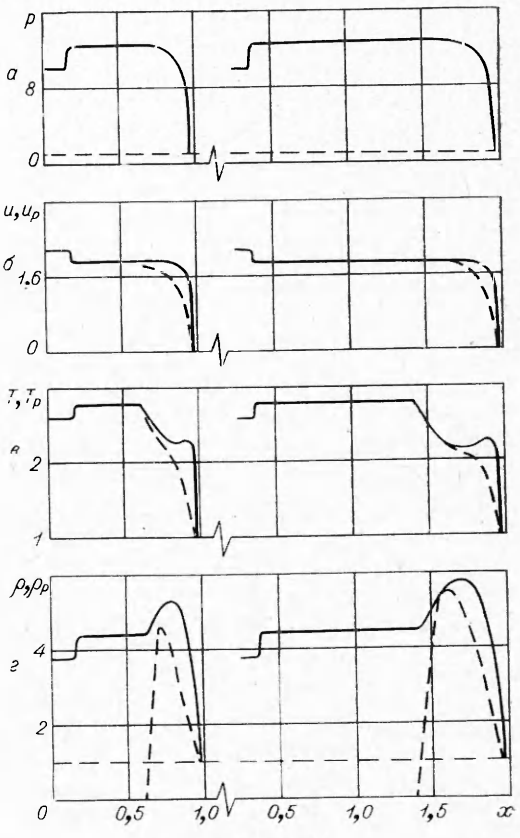
Асимптотическое (при $i \to \infty$) значение скорости U может быть найдено из (4.3) с учетом выражения (3.2). Отсюда, в частности, следует, что с ростом начальной концентрации частиц аэровзвеси интенсивность отраженной ударной волны увеличивается. Кроме того, как вытекает из (4.2), с увеличением концентрации частиц время возникновения ударной волны уменьшается. Однако при околозвуковом режиме течения газа за фронтом падающей волны числитель в (4.2) становится мал и, следовательно, влияние концентрации на величину t_x менее заметно.

Приведенные выше результаты, описывающие образование и динамику отраженного скачка, получены в предположении дозвукового течения газа за фронтом падающей волны. При звуковом течении скорость движения источника возмущений в начальный момент равна скорости распространения самих возмущений. Поэтому сразу образуется отраженный скачок. Из (4.2) также следует, что в этом случае $t_x = 0$.

В случае сверхзвукового течения за фронтом волны частицы поначалу опережают собственные возмущения. Их скорости выравниваются в момент, определяемый условием касания звуковой линии к поверхности контакта. Этому моменту, очевидно, и соответствует точка образования отраженного скачка.

5. Сравнение с численными расчетами. Полученное аналитическое решение линеаризованной задачи о формировании релаксационной ударной волны в аэровзвеси позволило высказать ряд качественных соображений о форме профилей параметров газовой и дисперсной компоненты. Для более точного выявления основных закономерностей исходная система (1.1) — (1.7) интегрировалась численно. Использован разностный метод Лакса—Вендроффа [8, 9]. Считалось, что в невозмущенном состоянии газ (полагалось, что это воздух) находится при нормальных условиях.

Типичные распределения параметров обеих компонент для двух моментов времени ($t = 0{,}4$ и $t = 0{,}84$), полученные в результате численных расчетов, представлены на фиг. 3* относительно лабораторной координатной системы для ударной волны с начальным давлением на фронте $p_0 = 10$ и облака аэровзвеси твердых частиц с $d = 10^{-5}$ м, $c = 1$ при исходной плотности $\rho_p = 1$. Отсчет пространственной переменной производится от первоначального положения границы газ — аэровзвесь, а отсчет времени — с момента прохождения фронта набегающей ударной волны через эту границу.



Фиг. 3

Из фиг. 3 следует, что в результате влияния взвешенных частиц на газовый поток ударная волна деформируется. При этом за ее фронтом происходит постепенное изменение параметров газа от их первоначальных значений в падающей ударной волне до значений, соответствующих стационарной релаксационной волне. Аналогичным образом перестраиваются и профили дисперсной компо-

* На фиг. 3 не отражены незначительные осцилляции, возникающие вблизи скачков и поверхности контакта частиц и газа, являющиеся разностными эффектами.

ненты (фиг. 3, *б—г*). Одновременно происходит формирование отраженного скачка.

За фронтом релаксационной волны наблюдается относительно протяженная зона, в которой происходит обмен импульсом и энергией между компонентами. Характер изменения профилей параметров газа в этой области качественно согласуется с результатами аналитического решения. Как было показано, значения величины скорости u и давления p определяются суперпозицией двух семейств элементарных волн сжатия и разрежения. На фронте ударной волны возмущения сжатия отсутствуют, а амплитуда волн разрежения максимальна по модулю, поэтому здесь u и p принимают наименьшие значения (фиг. 3, *а*, *б*). По мере удаления от фронта волны сжатия начинают играть все более существенную роль, а влияние волн разрежения уменьшается. В результате величины u и p будут возрастать и примут наибольшие значения в конце релаксационной области.

Отметим также немонотонность температуры газа в релаксационной зоне (фиг. 3, *в*). Наличие локального максимума T, как было показано, связано с преобладающим влиянием диссипации энергии над теплоотдачей за фронтом ударной волны (см. фиг. 1). Предсказанные аналитически слабые разрывы функций T и ρ на поверхности контакта газа и аэровзвеси также имеют место (см. фиг. 3, *в*, *г*). Разрывы же производных u и p заметны в более ранние моменты времени, чем те, которые представлены на фиг. 3.

Таким образом, результаты аналитического решения линеаризованной задачи и численного решения системы (1.1) — (1.7) качественно полностью согласуются.

Авторы выражают благодарность профессору И. Н. Таганову за оказанную помощь при выполнении численных расчетов.

Поступила 23 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 5.
2. **Золотарев Л. М., Самсонов И. Д.** Скачок уплотнения в двухфазной среде.— ПМТФ, 1969, № 4.
3. **Marble F. E.** Dynamics of dusty gases.— In: Annual Review on Fluid Mechanics. Vol. 2. Palo Alto, Calif., 1970. Рус. пер. Динамика запыленных газов.— Сб. Механика, 1971, с. 6—130.
4. **Panton R., Oppenheim A. K.** Shock relaxation in a particle-gas mixture with mass transfer between phases.— «AIAA J.», 1968, vol. 6, N 11. Рус. пер. Релаксационные явления за ударной волной в двухфазной смеси при наличии массообмена между фазами.— «Ракет. техн. и космонавтика», 1968, т. 6, № 11.
5. **Carlson D. J., Hoglund R. F.** Particle drag and heat transfer in rocket nozzles.— «AIAA J.», 1964, vol. 2, N 11. Рус. пер. Сопротивление и теплоотдача частиц в соплах ракетных двигателей.— «Ракет. техн. и космонавтика», 1964, т. 2, № 11.
6. **Курант Р., Фридрихс К.** Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., ИЛ, 1950.
7. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
8. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.
9. **Кестонбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А.** Точечный взрыв. М., «Наука», 1974.