

УДК 539.3

## НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Ю. В. Захаров, К. Г. Охоткин\*

Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, 660036 Красноярск

\* Сибирский государственный технологический университет, 660049 Красноярск

Приведены точные решения задачи нелинейного изгиба тонких стержней при различных способах закрепления и приложения сосредоточенной нагрузки при неизменном направлении ее действия. Проведена систематизация полученных решений, записанных в едином параметрическом виде и выраженных через эллиптические функции Якоби. Эти решения зависят от одного параметра — модуля эллиптических функций.

**Введение.** Первое точное решение уравнения нелинейного изгиба стержня, записанного в виде уравнения нелинейного маятника, получено в [1] (см. также [2]). В работах [3, 4] получены решения уравнения равновесия стержня, выраженные через эллиптические интегралы и зависящие от трех параметров, неявным образом связанных с граничными условиями и действующей силой, рассмотрены возможные формы изгиба стержня как отрезки кривых — эластик Эйлера. В работе [5] приведено точное решение для случая поперечного нагружения стержня, выраженное через эллиптические функции Якоби и зависящее от одного внешнего параметра — модуля эллиптических функций, определяемого внешней действующей силой. Такое представление решения позволяет находить формы изогнутого стержня при любом числе точек перегиба. В работе [6] решена задача об определении точных форм равновесия стержня, нагруженного продольной силой, при различных способах закрепления концов стержня. Решения представлены в эллиптических функциях. В [6] также рассматривается возможность вторичной потери устойчивости стержня при определенном изгибе.

В настоящей работе приводится точное аналитическое решение задачи о нелинейном изгибе стержня при нагружении силой, направление действия которой остается неизменным. Вычислены критические нагрузки и равновесные формы изогнутого нагруженного стержня.

**1. Общее решение задачи об изгибе стержня.** Рассмотрим тонкий нерастяжимый стержень длины  $L$  с изгибной жесткостью  $EI$ . Выберем декартову систему координат  $XOY$  так, чтобы изначально прямой стержень был расположен вдоль оси  $OX$ , закреплен на левом конце, находящемся в начале координат, и свободен либо закреплен на правом конце. Стержень сжимается силой  $P$ , направление действия которой не меняется. Обозначим через  $l$  длину вдоль линии стержня, через  $\theta(l)$  угол между касательной в текущей точке к линии стержня и осью  $OX$ , через  $P_x, P_y$  декартовы компоненты силы  $P$ .

Запишем уравнение равновесия стержня [4]

$$EI \frac{d^2\theta}{dl^2} - P_x \sin \theta + P_y \cos \theta = 0. \quad (1)$$

Преобразуем уравнение (1) к уравнению нелинейного маятника. Введем следующие обозначения:  $P$  — модуль сосредоточенной силы, направление действия которой не меняется,  $\varphi_0$  — угол между направлением действия силы  $P$  и осью  $OX$ . При изучении всех возможных случаев изгиба стержня достаточно рассмотреть угол  $\varphi_0$  в интервале от 0 до  $\pi/2$ . Углы  $\varphi_0 > \pi/2$  не рассматриваются, так как при указанном способе нагружения происходит растяжение стержня. Величины  $P$  и  $\varphi_0$  будем считать заданными параметрами состояния. Очевидно, что

$$P_x = -P \cos \varphi_0, \quad P_y = P \sin \varphi_0. \quad (2)$$

Подставляя выражения (2) в уравнение (1), получим

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{P}{EI} \sin(\theta + \varphi_0) = 0.$$

Введем безразмерную длину  $t = l/L$ , изменяющуюся от 0 до 1, и сделаем замену  $\gamma = \theta + \varphi_0$ . Тогда последнее уравнение примет вид

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + q^2 \sin \gamma = 0, \quad (3)$$

где  $q^2 = PL^2/(EI)$ . Решение уравнения (3) записывается в виде

$$\gamma(t) = 2 \arcsin [k \operatorname{sn}(qt + F_1, k)], \quad \frac{d\gamma(t)}{dt} = 2kq \operatorname{cn}(qt + F_1, k), \quad (4)$$

где  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  — эллиптические синус и косинус Якоби. Модуль эллиптических функций  $k$  и параметр  $F_1$  выполняют роль констант интегрирования, и их связь с силой  $P$  и углом  $\varphi_0$  определяется из граничных условий в каждом случае изгиба стержня.

Введем обозначение для аргумента эллиптических функций:

$$u = qt + F_1. \quad (5)$$

Используя (4), получим

$$\cos \gamma(t) = 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u, \quad \sin \gamma(t) = 2k \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad (6)$$

где  $\operatorname{dn}$  — эллиптическая дельта-функция Якоби. Интегрируя соотношения  $dx/dl = \cos \theta$ ,  $dy/dl = \sin \theta$ , получим выражения для координат произвольной точки стержня

$$\begin{aligned} \frac{x}{L} &= \int_0^t \cos \theta dt = \int_0^t \cos(\gamma - \varphi_0) dt = \cos \varphi_0 \int_0^t \cos \gamma dt + \sin \varphi_0 \int_0^t \sin \gamma dt = \\ &= X_0 \cos \varphi_0 + Y_0 \sin \varphi_0, \\ \frac{y}{L} &= \int_0^t \sin \theta dt = \int_0^t \sin(\gamma - \varphi_0) dt = \cos \varphi_0 \int_0^t \sin \gamma dt - \sin \varphi_0 \int_0^t \cos \gamma dt = \\ &= Y_0 \cos \varphi_0 - X_0 \sin \varphi_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$X_0 = \int_0^t \cos \gamma dt = \int_0^t (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u) dt = -t + \frac{2}{q} [E(\operatorname{am} u) - E(\operatorname{am} F_1)], \quad (8)$$

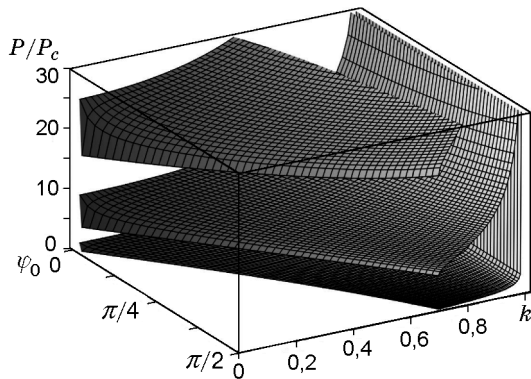


Рис. 1. Спектр собственных значений уравнения равновесия тонкого стержня

$$Y_0 = \int_0^t \sin \gamma dt = \int_0^t 2k \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u dt = \frac{2k}{q} (\operatorname{cn} F_1 - \operatorname{cn} u),$$

$E(\operatorname{am} u)$  — неполный эллиптический интеграл второго рода от эллиптической амплитуды Якоби. Выражения (7), (8) задают форму профиля изогнутого стержня в параметрическом виде с параметром  $t$  — приведенной длиной стержня.

**2. Изгиб стержня с зашечленным и свободным концами при нагружении силой, направление действия которой не меняется.** Граничные условия для рассматриваемого закрепления концов стержня имеют вид

$$\theta(0) = 0, \quad \frac{d\theta(L)}{dl} = 0.$$

Для уравнения (3) эти условия запишутся в виде

$$\gamma(0) = \varphi_0, \quad \frac{d\gamma(1)}{dt} = 0. \quad (9)$$

С учетом первого условия в (9) из (4) получим  $\operatorname{sn} F_1 = \sin(\varphi_0/2)/k$ , и, следовательно,

$$F_1 = F[\arcsin(\sin(\varphi_0/2)/k), k], \quad (10)$$

где  $F$  — эллиптический интеграл первого рода; модуль  $k$  изменяется в интервале  $\sin(\varphi_0/2) < k < 1$ .

Из второго условия в (9) следует  $\operatorname{sn}(q + F_1) = 0$ , откуда

$$q = (2n - 1)K(k) - F_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Здесь  $K(k)$ ,  $F(\varphi, k)$  — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода соответственно. Из выражений (10), (11) следует спектр собственных значений  $q_n(k)$ , который в свою очередь определяет критические нагрузки

$$P/P_c = (2/\pi)^2 \{(2n - 1)K(k) - F[\arcsin(\sin(\varphi_0/2)/k), k]\}^2. \quad (12)$$

Здесь  $P_c = (\pi/2)^2 EI/L^2$  — эйлерова критическая сила;  $n$  — номер моды решения. Зависимость нагрузки  $P/P_c$  от переменных  $k$  и  $\varphi_0$  в соответствии с выражением (12) приведена на рис. 1.

Координаты точек стержня определяются выражениями (7), (8) при подстановке значений  $q$ ,  $F_1$  из (10), (11). Таким образом, каждому значению внешней силы  $P$  и номеру моды  $n$  соответствует своя форма прогиба стержня, задаваемая одним параметром — модулем  $k$ , который определяется из соотношения (12) по известной силе  $P$ . Минимальному значению  $k = \sin(\varphi_0/2)$  соответствует минимальное значение критической силы. Если  $P \rightarrow \infty$ , то  $k \rightarrow 1$ .

При  $n = 1$  получаем эйлерову критическую силу. Критические нагрузки при  $n > 1$  названы М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским динамическими порогами потери устойчивости, которые могут быть достигнуты при ударном приложении нагрузки, когда время нарастания импульса меньше времени релаксации системы [7].

Обычно критические нагрузки находятся из решения уравнения равновесия в линейном приближении (см. [8]). Для упругого стержня с указанными граничными условиями, находящегося под действием продольной ( $\varphi_0 = 0$ ) силы  $P$ , критические нагрузки  $P_n = (2n-1)^2(\pi/2)^2\alpha_r/L^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  являются собственными значениями краевой задачи

$$y'' + (P/\alpha_r)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0,$$

где  $\alpha_r = EI$  — жесткость на изгиб;  $y(x)$  — отклонение стержня от исходного положения.

**3. Изгиб стержня с заземленным и свободным концами под действием поперечной силы.** Для поперечной нагрузки угол  $\varphi_0 = \pi/2$ . При этом спектр собственных значений (12) имеет вид

$$P/P_c = (2/\pi)^2\{(2n-1)K(k) - F[\arcsin(\sqrt{2}/(2k)), k]\}^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Следуя работе [5], рассмотрим случай  $n = 1$ . При нагрузке  $P = 0$  модуль  $k^2 = 1/2$ , при  $P \rightarrow \infty$  модуль  $k^2 \rightarrow 1$ . Если сила действует в противоположном направлении ( $P \rightarrow -\infty$ ), то во всех выражениях достаточно сделать замену  $k \rightarrow k'$ , при этом дополнительный модуль  $k'$  будет определяться равенством  $k^2 + k'^2 = 1$ . При  $P = 0$  модуль  $k'^2 = 1/2$ , при  $P \rightarrow -\infty$  модуль  $k'^2 \rightarrow 1$ . Отсюда следует, что стержень отклоняется от положения равновесия при любой силе  $P$ , отличной от нуля. Отметим, что в данном случае при монотонно возрастающей нагрузке критической нагрузки не существует.

Если  $n > 1$ , то из (13) следует существование критических нагрузок при  $k^2 = 1/2$ :

$$P_n = (n-1)^2[(4/\pi)K(\sqrt{2}/2)]^2 P_c \approx 5,6(n-1)^2 P_c, \quad n = 1, 2, \dots$$

При  $n = 1$  критических нагрузок не существует, при  $n > 1$  критические нагрузки являются динамическими.

При  $\gamma = \theta + \pi/2$  решение уравнения (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= 2 \arcsin(k \operatorname{sn}((pK(k) - F_1)t + F_1, k)), \\ \cos \gamma(t) &= 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u, \quad \sin \gamma(t) = 2k \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \end{aligned}$$

где  $p = 2n - 1 = 1, 3, 5, \dots$ ; аргумент  $u = (pK - F_1)t + F_1$ ;  $F_1 \equiv F[\arcsin(\sqrt{2}/(2k)), k]$ .

Уравнения (7), (8), задающие координаты  $x$ ,  $y$  произвольной точки стержня, имеют вид

$$\frac{x}{L} = \frac{2k}{pK - F_1} \left[ \left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right)^{1/2} - \operatorname{cn} u \right], \quad \frac{y}{L} = t - \frac{2}{pK - F_1} [E(\operatorname{am} u, k) - E_1]. \quad (14)$$

Здесь  $E(\varphi, k)$  — неполный эллиптический интеграл второго рода;  $E[\arcsin(\sqrt{2}/(2k)), k] \equiv E_1$ . При выводе (14) использовалось соотношение  $\operatorname{cn}(F_1, k) = \cos(\arcsin(\sqrt{2}/(2k))) = (1 - 1/(2k)^2)^{1/2}$ .

Уравнения (14) задают в параметрическом виде ( $0 \leq t \leq 1$ ) форму сильноизогнутой консоли под действием статической ( $n = 1$ ) и динамических ( $n = 2, 3, \dots$ ) нагрузок. Модуль  $k$  изменяется в интервале  $1/2 \leq k^2 \leq 1$ , задает общую кривизну консоли и определяется действующей силой  $P$ . При этом для каждой критической нагрузки зависимость  $k^2(P/P_c)$  определяется своим уравнением (13) при соответствующем  $p = 2n - 1$ .

Формы изогнутого стержня для двух мод (статической ( $p = 1$ ) и динамической ( $p = 3$ )) для ряда значений приложенной силы показаны на рис. 2 (см. [5]).

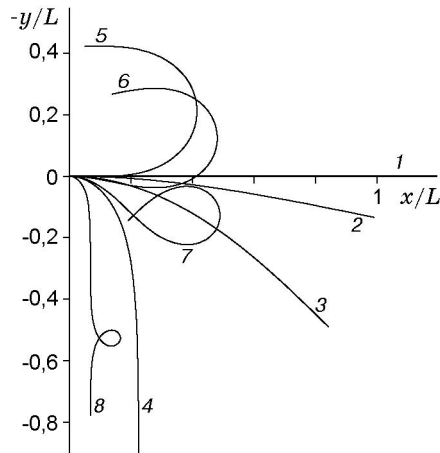


Рис. 2. Равновесные формы стержня с зашечленным левым концом и свободным правым концом под действием поперечной нагрузки:

1–4 — статическая мода ( $n = 1$ ), 5–8 — первая динамическая мода ( $n = 2$ ); 1, 5 —  $k^2 = 0,5$ ; 2, 6 —  $k^2 = 0,6$ ; 3, 7 —  $k^2 = 0,85$ ; 4, 8 —  $k^2 = 1 - 10^{-5}$

Полученный результат для динамических мод имеет парадоксальный характер: под действием импульсной нагрузки со временем нарастания, меньшим, чем время релаксации системы, стержень отгибается навстречу действующей силе. Физическое объяснение такого метастабильного состояния остается неизвестным. В работе [5] рассмотрены некоторые примеры, в которых получены аналогичные результаты. Следует отметить, что в [9] также получены аналогичные результаты численными методами.

**4. Изгиб стержня с зашечленным и свободными концами при продольном сжатии.** В случае продольной нагрузки угол  $\varphi_0 = 0$ . При этом спектр собственных значений (12) принимает вид

$$P/P_c = (2/\pi)^2 [(2n-1)K(k)]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Изгиб стержня описывается уравнением типа (3) при  $\gamma = \theta$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$\theta(t) = 2 \arcsin [k \operatorname{sn}(pK(k)t, k)], \quad \cos \theta(t) = 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u, \quad \sin \theta(t) = 2k \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

где  $u = pKt$ ;  $p = 2n - 1 = 1, 3, 5, \dots$

Уравнения (7), (8), задающие координаты  $x$ ,  $y$  произвольной точки стержня, принимают следующий вид:

$$x/L = -t + 2E(\operatorname{am} u)/(pK), \quad y/L = 2k(1 - \operatorname{cn} u)/(pK).$$

Здесь учтено, что для продольной силы параметр  $F_1 = 0$ . Формы изогнутого стержня для двух мод (статической ( $p = 1$ )) и динамической ( $p = 3$ )) для ряда значений приложенной силы показаны на рис. 3.

**5. Изгиб стержня с зашечленными концами при продольном сжатии.** В случае продольного сжатия ( $P_x = -P$ ,  $P_y = 0$ ) в уравнении (3) и решении (4)–(6) следует положить  $\gamma = \theta$ . Изогнутая ось стержня задается выражениями (7), (8) при  $\varphi_0 = 0$ . Граничные условия в случае зашечленных концов имеют вид

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(1) = 0. \quad (16)$$

Кроме того, необходимо поставить дополнительное условие

$$\frac{y(L)}{L} = \int_0^1 \sin \theta dt = \frac{2k}{q} [\operatorname{cn} F_1 - \operatorname{cn}(q + F_1)] = 0, \quad (17)$$

которое представляет собой равенство нулю ординат зашечленных концов стержня.

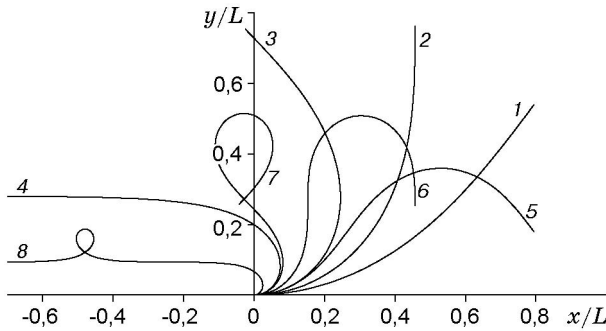


Рис. 3

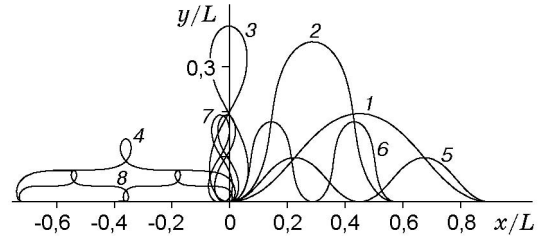


Рис. 4

Рис. 3. Равновесные формы стержня с защемленным левым концом и свободным правым при продольном сжатии:

1-4 — статическая мода ( $n = 1$ ), 5-8 — первая динамическая мода ( $n = 2$ ); 1, 5 —  $k^2 = 0,2$ ; 2, 6 —  $k^2 = 0,5$ ; 3, 7 —  $k^2 = 0,85$ ; 4, 8 —  $k^2 = 1 - 10^{-5}$

Рис. 4. Равновесные формы стержня с защемленными концами при продольном сжатии:

1-4 — статическая мода ( $n = 1$ ), 5-8 — первая динамическая мода ( $n = 2$ ); 1, 5 —  $k^2 = 0,1$ ; 2, 6 —  $k^2 = 0,4$ ; 3, 7 —  $k^2 = 0,85$ ; 4, 8 —  $k^2 = 1 - 10^{-5}$

Из (4) с учетом (16) и свойств нулей эллиптического синуса

$$\operatorname{sn}(0 + F_1, k) = 0, \quad F_1 = 2n_1K(k), \quad \operatorname{sn}(q + F_1, k) = 0, \quad q + F_1 = 2n_2K(k)$$

получим  $q = 2n_2K(k) - F_1 = 2(n_2 - n_1)K(k)$  или  $q = 2mK(k)$ ,  $F_1 = 2K(k)$ . Здесь  $(n_1, n_2, m) = 1, 2, 3, \dots$ . С учетом (17) получим более жесткое условие для собственного числа  $q = 4nK(k)$ . Спектр собственных значений (критические нагрузки) имеют вид

$$P/P_c = (2/\pi)^2 [4nK(k)]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Выражения (7), (8), задающие координаты точек стержня, запишутся в виде

$$x/L = -t + 2E(\operatorname{am} u)/(4nK), \quad y/L = 2k(1 - \operatorname{sn} u)/(4nK), \quad u = 4nK(k)t.$$

Здесь использованы свойства периодичности эллиптических функций. Формы изогнутого стержня для первых двух мод приведены на рис. 4.

**6. Изгиб стержня с шарнирно закрепленными концами при продольном сжатии.** В случае продольного сжатия ( $P_x = -P$ ,  $P_y = 0$ ) в уравнении (3) и решении (4)–(6) следует положить  $\gamma = \theta$ . Изогнутая ось стержня задается выражениями (7), (8) при  $\varphi_0 = 0$ . Граничные условия в случае шарнирно закрепленных концов имеют вид

$$\frac{d\theta(0)}{dl} = 0, \quad \frac{d\theta(1)}{dl} = 0. \tag{18}$$

Кроме того, необходимо поставить условие (17), которое представляет собой равенство нулю ординат закрепленных концов стержня.

Из (4) с учетом (18) и свойств нулей эллиптического косинуса

$$\operatorname{cn}(0 + F_1, k) = 0, \quad F_1 = (2n_1 + 1)K(k), \quad \operatorname{cn}(q + F_1, k) = 0, \quad q + F_1 = (2n_2 + 1)K(k)$$

получим  $q = (2n_2 + 1)K(k) - F_1 = 2(n_2 - n_1)K(k)$  или  $q = 2nK(k)$ ,  $F_1 = K(k)$ . Здесь  $(n_1, n_2, n) = 1, 2, 3, \dots$ . Дополнительное условие (17) удовлетворяется тождественно. Спектр собственных значений (критические нагрузки) имеет вид

$$P/P_c = (2/\pi)^2 [2nK(k)]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

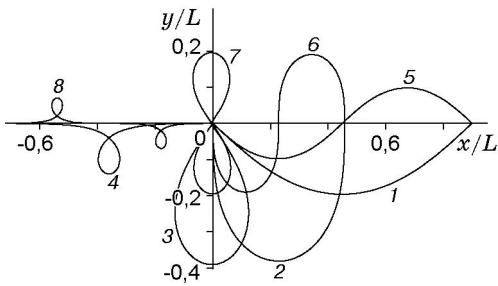


Рис. 5. Равновесные формы стержня с шарнирно закрепленными концами при продольном сжатии:

1–4 — статическая мода ( $n = 1$ ), 5–8 — первая динамическая мода ( $n = 2$ ); 1, 5 —  $k^2 = 0,1$ ; 2, 6 —  $k^2 = 0,5$ ; 3, 7 —  $k^2 = 0,83$ ; 4, 8 —  $k^2 = 1 - 10^{-5}$

Выражения (7), (8), задающие координаты точек стержня, запишутся в виде

$$x/L = -t + 2[E(\operatorname{am} u) - E(k)]/(2nK), \quad y/L = -2k \operatorname{sn} u/(2nK), \quad u = 2nK(k)t + K(k).$$

Здесь использованы свойства периодичности эллиптических функций и соотношения  $E(\operatorname{am}((2n-1)K, k), k) = E((2n-1)\pi/2, k) = 2nE(k) + E(\pi/2, k) = (2n-1)E$ . Формы изогнутого стержня для первых двух мод приведены на рис. 5.

**Заключение.** Полученные результаты можно использовать в качестве тестовых примеров при разработке численных методов решения нелинейных уравнений изгиба стержней [9].

В [10] показано, что при перемагничивании магнитной системы в слое поперек анизотропии намагниченность в слое после динамического порога разворачивается от равновесного положения против поля по всей толщине слоя аналогично тому, как стержень под действием поперечной нагрузки после достижения первого динамического порога отгибается навстречу действующей силе. Эти эффекты могут быть обнаружены в экспериментах по ударному нагружению стержней. Задача о перемагничивании вдоль и поперек направления магнитной анизотропии магнитного слоя с несимметричными граничными условиями аналогична задаче Эйлера об устойчивости упругого стержня. Отметим, что магнитные системы являются более удобным модельным объектом исследований динамической потери устойчивости, прежде всего в связи с их доступностью для проведения большого количества экспериментов. Для магнитной системы виды перемагничивания аналогичны продольной и поперечной сосредоточенной нагрузке на свободном конце упругого стержня, закрепленного на другом конце, что послужило причиной проведения анализа нелинейных решений для изгиба тонкого стержня.

Авторы выражают благодарность К. С. Александрову, Л. И. Шкутину, С. Г. Овчинникову и В. Г. Суховольскому за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Heinzerling Н.** Mathematische Behandlung einiger grundlegender Fragen des Knicksproblems des geraden Stabes: Diss. Karlsruhe, 1938.
2. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Физматгиз, 1968.
3. **Попов Е. П.** Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.; М.: ОГИЗ, 1948.
4. **Попов Е. П.** Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
5. **Захаров Ю. В., Захаренко А. А.** Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 1. С. 48–54.
6. **Левяков С. В.** Формы равновесия и вторичная потеря устойчивости прямого стержня, нагруженного продольной силой // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 153–160.
7. **Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.** Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.

8. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
9. **Шкутин Л. И.** Численный анализ разветвленных форм изгиба стержней // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 141–147.
10. **Захаров Ю. В.** Статическая и динамическая потеря устойчивости ферромагнитного слоя при перемагничивании // Докл. РАН. 1995. Т. 344, № 3. С. 328–332.

*Поступила в редакцию 29/IV 2002 г.*

---