

ЛИТЕРАТУРА

1. Trevena D. H. Cavitation and tension in liquids.— Bristol; Philadelphia: A. Hilger, 1987.
2. Wilson D. A., Hoyt J. W., McKune J. W. Measurement of tensile strength of liquid by explosion technique // Nature.— 1975.— V. 253, N 5494.
3. Carlson G. A., Henry K. W. Technique for studying tension failure in application to glycerol // J. Appl. Phys.— 1973.— V. 42, N 5.
4. Кедринский В. К. Поверхностные эффекты при подводном взрыве (обзор) // ПМТФ.— 1978.— № 4.
5. Коул Р. Подводные взрывы.— М.: ИЛ, 1950.
6. Kedrinskii V. K. Negative pressure profile in cavitation zone at underwater explosion near free surface // Acta Astronautica.— 1976.— V. 3, N 7—8.
7. Бесов А. С., Кедринский В. К., Пальчиков Е. И. Изучение начальной стадии кавитации с помощью дифракционной оптической методики // Письма в ЖТФ.— 1984.— Т. 10, вып. 4.
8. Hammit F. G., Koller A., Ahmed O. et al. Cavitation threshold and superheat in various fluids // Cavitation: Proc. conf., Edinburg, 1974.— London; N. Y.: Mech. Eng. Publ. Ltd, 1976.
9. Kedrinskii V. K. Peculiarities of bubble spectrum behavior in cavitation zone and its effect on wave field parameters. Ultrasonics Intern. 85: Proc. conf., London, 1985.— Gilford, 1985.
10. Kedrinskii V. K. On relaxation of tensile stresses in cavitating liquid // 13th Int. Congress on Acoustics, Beograd, 1989: Proc.— Sabac: Dragan Srnic Press, 1989.
11. Спротюк М. Г. Экспериментальные исследования ультразвуковой кавитации // Мощные ультразвуковые поля.— М.: Наука, 1968.— Ч. 5.
12. Kedrinskii V. K. On multiplication mechanism of cavitation nuclei // 12th Int. Congress on Acoustics, Toronto, 1986: Proc.— Toronto, 1986.
13. Кедринский В. К., Ковалев В. В., Плаксин С. И. Об одной модели пузырьковой кавитации в реальной жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 5.
14. Hansson I., Kedrinskii V., Mørch K. On the dynamics of cavity cluster // J. Phys. D: Appl. Phys.— 1982.— V. 15.
15. Kedrinskii V., Plaksin S. Rarefaction wave structure in cavitating liquid // Проблемы нелинейной акустики: Сб. тр. симпоз. IUPAP — IUTAM по нелинейной акустике.— Новосибирск, 1987.— Ч. 1.
16. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ.— 1968.— № 4.
17. Chernobaev N. N. Modelling of shock-wave loading of liquid volumes // Adiabatic waves in liquid vapor systems: Proc. IUTAM Symp., Gottingen, 1989.— Berlin et al.: Springer, 1989.
18. Kedrinskii V. K. The experimental research and hydrodynamical models of a "sultan" // Arch. Mech.— 1974.— V. 26, N 3.
19. Стебновский С. В. О механизме импульсного разрушения жидкого объема // ПМТФ.— 1989.— № 2.
20. Bergardt A. R., Bichenkov E. T., Kedrinskii V. K., Pal'chikov E. I. Optic and x-ray investigation of water fracture in rarefaction wave at later stage // Optical Methods in Dynamics of Fluids and Solids: Proc. IUTAM Symp., Prague, 1984.— Berlin et al.: Springer, 1985.
21. Гелц И. Г., Кедринский В. К. Динамика взрывного нагружения конечного объема двухфазной смеси // ПМТФ.— 1989.— № 2.
22. Anilkumar A. V. Experimental studies of high-speed dense dusty gases: Thesis.— Pasadena, 1989.

г. Новосибирск

Поступила 29/VI 1992 г.

УДК 534.1

А. В. Дубовик

О КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ И ВОЛНОВОМ ОПИСАНИИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

Квазистатический и волновой подходы к описанию явления соударения твердых тел разработаны в конце прошлого века в трудах Навье, Сен-Венана и других классиков механики [1—4]. Напомним, что, согласно квазистатической теории, силы, возникающие при ударе, носят далекодействующий характер, а соударяющиеся тела рассматриваются

как упругие пружины, в силу чего напряжение сжатия — непрерывная функция времени удара. В волновой теории учитываются конечная скорость распространения сжимающих напряжений и их последующая трансформация на границах соударяющихся тел. Поэтому пространственно-временной профиль напряжений, являющийся суперпозицией всех волновых возмущений, становится существенно негладким.

Хотя единство волнового и квазистатического подходов было продемонстрировано рядом численных расчетов процесса удара, строгое доказательство этого положения отсутствует главным образом из-за трудностей математического характера при точном описании картины удара. Ниже на примере продольного соударения упругих тел выполнен приближенный анализ волновой динамики удара, основанный на линеаризации профилей напряжений на каждой циркуляции волны вдоль воспринимающего удар тела. Получены простые формулы для расчета максимальных давлений удара, которые удовлетворительно согласуются с формулами квазистатической теории и соответствующими эмпирическими выражениями, полученными для случая, когда масса ударяющего тела на 2—3 порядка величины больше массы воспринимающего удар тела.

1. Основные соотношения квазистатической теории удара получим на примере воздействия твердого тела (ударника) массы M по цилиндрическому стержню длины l с плоскими торцами сечением S , установленному на жесткой наковальне. Рассматривая стержень как упругую пружину, обозначим через a величину сжатия стержня. Тогда сила сжатия $F = -ka$, где k — механическая жесткость стержня, равная ES/l ($E = \rho c^2$ — модуль продольного сжатия, ρ , c — плотность и скорость звука материала), удовлетворяет уравнению гармонических колебаний

$$(1.1) \quad d_{tt}F + \omega^2 F = 0, \quad F(0) = 0, \quad F(\pi/2\omega) = F_m, \quad \omega^2 = k/M,$$

откуда

$$(1.2) \quad F = F_m \sin \omega t.$$

Максимальное сжимающее усилие F_m определяется из условия равенства кинетической энергии ударяющего тела $Mv_0^2/2$ (v_0 — скорость удара) и потенциальной энергии сжатия стержня $F_m^2/2k$. Вводя давление при ударе $p = F/S$ и время удара из условия $F(t_k) = 0$, получим

$$(1.3) \quad p_m = (v_0/S) (Mk)^{1/2} = p_0 \alpha^{-1/2}, \quad t_k = \pi (M/k)^{1/2} = \pi/2\alpha^{1/2}, \quad p_0 = \rho c v_0$$

($\alpha = \rho Sl/M$ — отношение масс стержня и ударника). Отметим, что формулы (1.3) записаны в терминах как квазистатического, так и волнового подхода к процессу удара (через скорость звука c). Запись для p_0 совпадает с формулой для давления в продольной волне сжатия, возникающей в стержне в начале удара тела. Очевидно, что введение усилия $F_0 = p_0 S$ в начальное условие (1.1) не влияет на p_m .

2. Прежде чем приступить к решению волновой задачи об ударе, уточним понятие абсолютно твердого ударника. Для этого найдем коэффициенты отражения и прохождения продольной плоской волны произвольного вида на границе ($x = 0$) двух стержней разного сечения S_1 и S_2 с параметрами ρ_1 , E_1 и ρ_2 , E_2 .

Общее решение волнового уравнения в стержне 1 ($x < 0$) запишется в виде

$$u_1(x, t) = f_1(x - c_1 t) + g_1(x + c_1 t)$$

(f_1 и g_1 — падающая и отраженная от границы волна). Пройдя в стержень 2 ($x > 0$) волна описывается выражением вида

$$u_2(x, t) = f_2(x - c_2 t).$$

Приравняв смещения торцов стержней $u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0}$ и силы, действующие со стороны каждого стержня,

$$S_1 E_1 \partial_x u_1|_{x=0} - S_2 E_2 \partial_x u_2|_{x=0},$$

найдем $(1 - z_2/z_1)f_1(-\xi) = (1 + z_2/z_1)g_1(\xi)$, где через $z_i = \rho_i c_i S_i$ ($i = 1, 2$) обозначены ударные импедансы стержней, $\xi = c_1 t$. Таким образом,

$$u(x, t) = f_1(x - \xi) + (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)^{-1} f_1(-x - \xi),$$

т. е. коэффициент отражения $\varphi = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)^{-1}$ и коэффициент прохождения $\psi = 1 + \varphi = 2z_1(z_1 + z_2)^{-1}$. Если материалы стержней одинаковы ($\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$) и $S_1 \gg S_2$, то $\varphi = 1$ и $\psi = 2$. В соответствии с анализом [5] в этом случае стержень 1 можно считать абсолютно твердым по отношению к стержню 2.

Рассмотрим продольный удар абсолютно твердого тела по упругому стержню с закрепленным концом в точке $x = l$. В момент соударения ($t = 0$) массовая скорость на свободном конце стержня ($x = 0$) равна v_0 , а начальное напряжение сжатия $p_0 = \rho c v_0 > 0$. Смещения частиц стержня описываются одномерным волновым уравнением с решением Даламбера

$$u(x, t) = u_+(t - x/c) + u_-(t + x/c)$$

(u_+ — смещения, возникающие от всех волн, движущихся от ударяемого конца, а u_- — от волн, приходящих к ударяемому концу стержня).

До момента прихода волны к закрепленному концу решение задачи определяется одним слагаемым

$$(2.1) \quad u(x, t) = u_0(t - x/c), \quad 0 \leq t \leq l/c.$$

Представляя условие на свободном конце в виде

$$(2.2) \quad M \partial_{tt} u = M \partial_t v = -S \sigma, \quad \sigma = -E \partial_x u, \quad v = \partial_t u$$

(σ, v — напряжение и скорость частиц в сечении $x = 0$) и используя (2.1), получим уравнение, описывающее закон изменения сжимающего усилия от времени:

$$\partial_t \sigma + 2\alpha \sigma / T = 0, \quad \sigma(0) = p_0, \quad T = 2l/c,$$

решая которое находим

$$(2.3) \quad \sigma = p_0 \exp(-2\alpha t / T), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Таким образом, вследствие динамического сопротивления стержня скорость ударника и давление на стержень экспоненциально уменьшаются и вдоль стержня начинает распространяться плоская волна сжатия со спадающим профилем напряжений.

После отражения волны от закрепленного конца решение задачи примет вид

$$(2.4) \quad u(x, t) = u_0(t - x/c) + u'_0(t + x/c), \quad 0 \leq t \leq T.$$

В точке $x = l$ имеем условие $u(l, t) = 0$, которое приводит к равенству

$$u'_0(\xi) = -u_0(\xi - T), \quad \xi = t + l/c.$$

Последнее выполняется при любом положительном значении ξ , поэтому решение (2.4) можно записать как

$$u(x, t) = u_0(t - x/c) - u_0(t + x/c - T).$$

Отсюда, в частности, следует, что напряжение на закрепленном конце

$$\sigma(l, t) = -E \partial_x u|_{x=l} = \sigma_0(\xi) + \sigma_0(\xi - T) = 2\sigma_0(\xi)$$

равно удвоенному значению напряжения в прямой волне.

С начала 2-й циркуляции волны вдоль стержня смещения частиц определяются двумя волнами, двигающимися от ударяемого конца, и одной волной, распространяющейся к этому концу:

(2.5)

$$u(x, t) = u_0(t - x/c) - u_0(t + x/c - T) + u'_1(t - x/c) = u_1(t - x/c) - u_0(t + x/c - T).$$

С помощью (2.5) получим выражения для напряжений и скоростей частиц в точке $x = 0$:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma &= -E\partial_x u|_{x=0} = \sigma_1(t) + \sigma_0(t - T), \\ v &= \partial_t u|_{x=0} = (\rho c)^{-1}(\sigma_1(t) - \sigma_0(t - T)), \quad \sigma_0 = p_0 \exp(-2\alpha t/T). \end{aligned}$$

Обозначим через $\sigma_n(t)$ полные сжимающие напряжения от всех волн, возникающих на свободном конце стержня в моменты времени nT , а через $\sigma_{n-1}(t - T)$ — напряжения от волн, возникающих в предыдущие моменты времени $(n - 1)T$ и задержанных на время T за счет циркуляции вдоль стержня. Тогда по аналогии с (2.6) имеем [1]

$$(2.7) \quad \sigma(t) = \sigma_n(t) + \sigma_{n-1}(t - T), \quad v(t) = (\rho c)^{-1}(\sigma_n(t) - \sigma_{n-1}(t - T)).$$

Подстановка (2.7) в закон торможения ударника (2.2) позволяет установить связь между $\sigma_n(t)$ и $\sigma_{n-1}(t - T)$:

$$\begin{aligned} \sigma_n(t) &= \sigma_{n-1}(t - T) - (4\alpha/T) \exp(-2\alpha t/T) \times \\ &\times \left[\int \exp(2\alpha t/T) \sigma_{n-1}(t - T) dt + C \right]. \end{aligned}$$

Константу интегрирования C находим из условия, что в момент nT сжимающие напряжения на контакте с ударником увеличиваются на $2p_0$:

$$(2.9) \quad \sigma_n(nT) + \sigma_{n-1}((n - 1)T) = \sigma_{n-1}(nT) + \sigma_{n-2}((n - 1)T) + 2p_0.$$

В [1] с начальной величиной $\sigma_0(t)$, даваемой формулой (2.6), найдены несколько первых значений $\sigma_n(t)$. Для больших значений n выражения для $\sigma_n(t)$ становятся громоздкими и труднообозримыми. Там же приведены результаты численных расчетов $\sigma(t)$ для некоторых случаев удара.

В то же время с использованием (2.8), (2.9) простые аналитические выражения получаются для линеаризованных по $nT \leq t \leq (n + 1)T$ напряжений $\sigma_n(t)$. В этом случае без потери общности можно определить полную картину удара, для чего достаточно положить $\alpha \leq 1$.

Представляя $\sigma_0(t)$ в безразмерном виде

$$0 \leq \tau \leq 1: y_0(\tau) = 1 - 2\alpha\tau, \quad \tau = t/T, \quad y(\tau) = \sigma(\tau)/p_0,$$

найдем несколько первых значений $y_n = \sigma_n/p_0$:

$$\begin{aligned} 1 \leq \tau \leq 2: & y_1(\tau) = y_0(\tau) + 1 + 6\alpha(1 - \tau), \\ 2 \leq \tau \leq 3: & y_2(\tau) = y_1(\tau) + 1 + 10\alpha(2 - \tau), \\ 3 \leq \tau \leq 4: & y_3(\tau) = y_2(\tau) + 1 + 14\alpha(3 - \tau), \end{aligned}$$

откуда получим общие формулы для $y_n(\tau)$

$$(2.10) \quad n \leq \tau \leq n + 1: y_n(\tau) = y_{n-1}(\tau) + 1 + 2(2n + 1)\alpha(n - \tau)$$

и сжимающего напряжения на свободном торце $n \leq \tau \leq n + 1$

$$(2.11) \quad y(\tau) = 2n + 1 + (4/3)n(n + 1)(2n + 1)\alpha - 2(1 + 2n(n + 1))\alpha\tau.$$

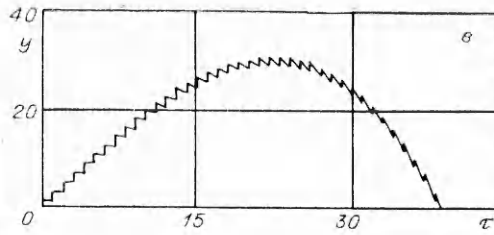
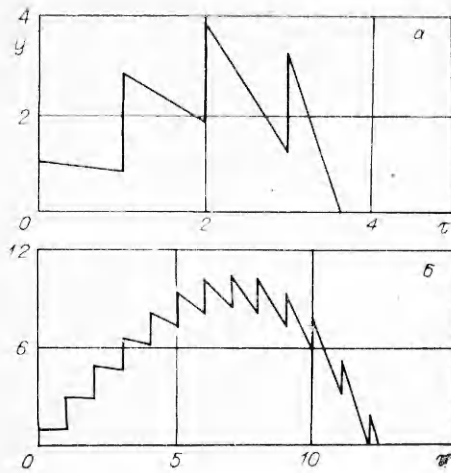
Рассматривая не слишком малые времена τ , для качественного исследования (2.11) положим $n = \tau$ и определим

$$(2.12) \quad y(\tau) = 1 + 2\tau(1 - (\alpha/3)(1 + 2\tau^2)).$$

С помощью (2.12) найдем время достижения максимума напряжений ($d_\tau y(\tau_m) = 0$), продолжительность удара ($y(\tau_k) = 0$) и максимальное напряжение при ударе $y_m(\tau_m)$:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \tau_m &= ((3 - \alpha)/6\alpha)^{1/2}, \quad \tau_k \simeq \sqrt{3} \tau_m, \\ y_m &= 1 + (4/9)(3 - \alpha)\tau_m \simeq 1 + 0,9428\alpha^{-1/2}. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, формулы (1.3), (2.13) квазистатической и волновой теории удара практически совпадают при $\alpha \ll 1$. Выражение



для максимального давления y_m близко к экспериментально найденному соотношению $y_m = 1 + \alpha^{-1/2}$ [4].

На рисунке приведены функции $y(\tau)$, рассчитанные по (2.11) при $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}$ и 10^{-3} (а — в). Видно,

что при целочисленных τ напряжение изменяется скачками. С уменьшением α зависимость $y(\tau)$ все более приближается к плавной кривой, даваемой квазистатической теорией ($y \sim \sin \tau$).

В табл. 1 представлены результаты расчетов некоторых параметров удара по волновой теории (2.11), по приближенным соотношениям (2.13) и квазистатической теории (1.3).

В соответствии с (2.7) функции $y_n(\tau)$ можно использовать для определения напряжений в любом другом сечении стержня. Поскольку максимальное напряжение на его закрепленном конце y_{\max} равно удвоенному максимальному значению $y_n(\tau_{\max})$, то, записывая (2.10) в виде

$$(2.14) \quad y_n(\tau) = n + 1 + \alpha(n(n+1)(4n+5)/3 - 2(n+1)^2\tau)$$

и полагая $n = \tau$, найдем

$$y_n(\tau) = (\tau + 1)(1 - (\alpha\tau/3)(2\tau + 1)),$$

откуда

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \tau_{\max} &= (1/2\alpha + 1/12)^{1/2} - 1/2 \simeq (2\alpha)^{-1/2} \simeq \tau_m, \\ y_{\max} &= 2y_n(\tau_{\max}) \simeq 1 + (2/3)(2\alpha)^{1/2} \simeq y_m, \\ \tau_* &= ((24/\alpha + 1)^{1/2} - 1)/4 \simeq (3/2\alpha)^{1/2} \simeq \tau_K \end{aligned}$$

(приближения сделаны для $\alpha \ll 1$). В табл. 2 приведены расчетные значения параметров удара на закрепленном конце стержня.

Сравнивая между собой результаты расчетов в табл. 1 и 2, отметим, что время удара на свободном конце τ_K больше, чем на закрепленном τ_* , приблизительно на полпериода циркуляции волны вдоль стержня. В соответствии с законом сохранения импульса максимальное сжимающее напряжение на закрепленном конце y_{\max} больше, чем на свободном y_m , причем указанные различия становятся незначительными при $\alpha \rightarrow 0$.

Рассмотрим изменение скорости ударника. Формулу для $v(t)$ можно найти из (2.7), (2.10), однако полученное таким образом выражение содержит значительную ошибку из-за накопления погрешностей при вы-

Т а б л и ц а 1

Параметр	Формула	α		
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
y_m	(2.11)	3,800	10,38	30,79
	(2.13)	3,834	10,38	30,80
	(1.3)	3,162	10,00	31,62
τ_K	(2.11)	3,640	12,30	38,64
	(2.13)	3,808	12,22	38,72
	(1.3)	4,967	15,71	49,67

Т а б л и ц а 2

Параметр	Формула	α		
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
y_{\max}	(2.14)	4,000	10,40	30,82
	(2.15)	4,056	10,45	30,82
τ_*	(2.14)	3,375	11,65	38,32
	(2.15)	3,631	12,00	38,48

читании малых величин. Поэтому, подставив (2.12) в уравнение движения (2.2) и проинтегрировав его при условии $v(0) = v_0$, получим

$$V(\tau) = v/v_0 = 1 - 2\alpha\tau(1 + (1 - \alpha/3)\tau - \alpha\tau^3/3).$$

В момент достижения максимума напряжений скорость

$$V(\tau_m) = 1/6 + 5\alpha/9 - (2\alpha(1 - \alpha/3))^{1/2}$$

близка к 0, а в конце удара

$$V(\tau_k) = -1/2 + \alpha - (2\alpha(3 - \alpha))^{1/2} < 0.$$

При изменении α от $5 \cdot 10^{-2}$ до $5 \cdot 10^{-4}$ коэффициент восстановления скорости при ударе $\epsilon = -V(\tau_k)$ уменьшается от 0,993 до 0,554, т. е. в пределах значений, типичных для лабораторных экспериментов с ударом на копке [2, 4].

Заметим, что результаты расчетов ϵ не следует переоценивать, так как они получены, во-первых, в рамках линеаризованной модели волновых возмущений и, во-вторых, для условий, труднореализуемых на практике (плоскопараллельное сближение торцов стержня и ударника, отсутствие дисперсии волн и пр.). Кроме того, предположение об абсолютно твердом ударнике устраняет зависимость ϵ от материала соударяющихся тел.

Итак, анализ волнового и квазистатического описания процесса продольного соударения упругих тел показал, что при малых отношениях масс стержня и ударника оба подхода дают близкие результаты по максимальным напряжениям и временам удара, которые хорошо согласуются с литературными данными. Найденные величины коэффициентов восстановления скорости при ударе не противоречат их экспериментальным значениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.— М.: Наука, 1975.
2. Гольдемит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.— М.: Стройиздат, 1965.
3. Александров Е. В., Соколинский В. Б. Прикладная теория и расчеты ударных систем.— М.: Наука, 1969.
4. Кильчевский Н. А. Динамическое сжатие твердых тел. Удар.— Киев: Наук. думка, 1976.
5. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Прочность пространственных элементов конструкций. Динамика и волны напряжений.— М.: Высш. шк., 1980.

г. Москва

Поступила 24/IV 1992 г.