НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ОРТОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

С. М. Дургарьян

(Ереван)

1. Рассмотрим бесконечно длинный, ортотропный, однородный полый цилиндр внешним радиусом $R + {}^1/_2\, h$ и внутренним радиусом $R - {}^1/_2\, h$, отнесенный к цилиндрической системе координат z, β, r (ось z совпадает с осью цилиндра, β и r — полярные координаты).

Пусть в начальный момент ($t = 0$) температура цилиндра постоянна и равна T_0, а граничные условия на поверхностях цилиндра не зависят от z и заданы в виде [1]

$$d_1 \frac{\partial T}{\partial r} - g_1'T = F_1' \quad \text{при} \quad r = R - {}^1/_2 h$$

$$d_2 \frac{\partial T}{\partial r} + g_2'T = F_2' \quad \text{при} \quad r = R + {}^1/_2 h$$

Здесь $F_j' = F_j'(\beta)$ — заданные функции угла β; d_j и g_j' ($j = 1,2$) — известные положительные постоянные коэффициенты (разумеется, что исключается случай одновременного равенства нулю d_1 и g_1' или d_2 и g'_2).

Предполагается, что материал рассматриваемого цилиндра по теплофизическим свойствам ортотропен, но главные оси теплопроводности совпадают с главными геометрическими направлениями.

Для рассматриваемого случая уравнение теплопроводности будет иметь вид

$$\frac{\lambda_1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\lambda_2}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} = \rho c_0 \frac{\partial T}{\partial t}$$

Здесь $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ — коэффициенты теплопроводности соответственно в направлениях осей r и β; ρ — плотность, c_0 — удельная теплоемкость материала цилиндра.

Перейдем к безразмерной температуре $\vartheta \equiv T \,/\, T^\circ$ ($T^\circ = T_0$, если $T_0 \neq 0$, в противном случае за $T^\circ > 0$ можно принять любую фиксированную температуру), к безразмерной координате $y \equiv r \,/\, R$ и к безразмерному времени $\tau \equiv t \,/\, t_0$ (где $t_0 = \text{const} > 0$), а также введем обозначения

$$\frac{h}{R} \equiv 2\delta, \qquad \frac{R^2 \rho c_0}{\lambda_1 t_0} \equiv m^2, \qquad \frac{T_0}{T^\circ} \equiv \vartheta^\circ, \quad \beta\Lambda_{12} \equiv \varphi$$

$$RF_j'(\beta) \,/\, T^\circ \equiv F_j(\varphi), \qquad Rg_j' \equiv g_j \quad (j = 1, 2) \qquad \sqrt{\lambda_1 / \lambda_2} = \Lambda_{12}, \quad \sqrt{\lambda_2 / \lambda_1} = \Lambda_{21}$$

Тогда в новых обозначениях решение задачи сведется к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} - m^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = 0 \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$\vartheta = \vartheta^\circ \quad \text{при} \quad \tau = 0 \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$d_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - g_1 \vartheta = F_1 \quad \text{при} \quad y = y_1 = 1 - \delta$$

$$d_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + g_2 \vartheta = F_2 \quad \text{при} \quad y = y_2 = 1 + \delta$$

Для всех случаев, представляющих практический интерес, функции $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ удовлетворяют условиям Дирихле и в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,\Lambda_{12}$ могут быть разложены в ряды Фурье

$$F_j(\varphi) = \frac{a_0^{(j)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(j)} \cos(k\Lambda_{21}\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(j)} \sin(k\Lambda_{21}\varphi) \quad (j = 1, 2) \tag{1.3}$$

$$a_k^{(j)} = \frac{\Lambda_{21}}{\pi} \int_0^{2\pi\Lambda_{12}} F_j(\varphi) \cos(k\Lambda_{21}\varphi)\, d\varphi$$

$$b_k^{(j)} = \frac{\Lambda_{21}}{\pi} \int_0^{2\pi\Lambda_{12}} F_j(\varphi) \sin(k\Lambda_{21}\varphi)\, d\varphi \quad (j = 1,2)$$

Искомую безразмерную температурную функцию $\vartheta(y, \varphi, \tau)$ также представим разложенной в тригонометрический ряд

$$\vartheta(y, \varphi, \tau) = \frac{\vartheta_0(y, \tau)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k(y, \tau)\cos(k\Lambda_{21}\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k^*(y, \tau)\sin(k\Lambda_{21}\varphi) \qquad (1.4)$$

определение коэффициентов $\vartheta_k(y, \tau)$ и $\vartheta_k^*(y, \tau)$ которого и является целью настоящей работы.

2. Изображение функции по Лапласу в плоскости комплексной переменной p будем обозначать соответствующей прописной буквой

$$\Theta(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau}\vartheta(\tau)\,d\tau, \qquad \operatorname{Re}(p) > 0$$

В основных соотношениях перейдя от функций к их изображениям, с учетом (1.2) получим

а) уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2} - m^2p\Theta = -m^2\vartheta^\circ \qquad (2.1)$$

б) граничные условия

$$\begin{aligned} d_1\frac{\partial\Theta}{\partial y} - g_1\Theta &= \frac{F_1}{p} \quad \text{при } y = y_1 = 1-\delta \\ d_2\frac{\partial\Theta}{\partial y} + g_2\Theta &= \frac{F_2}{p} \quad \text{при } y = y_2 = 1+\delta \end{aligned} \qquad (2.2)$$

в) разложение в тригонометрический ряд изображения искомой функции

$$\Theta(y, \varphi) = \frac{\Theta_0(y)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Theta_k(y)\cos(k\Lambda_{21}\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty}\Theta_k^*(y)\sin(k\Lambda_{21}\varphi) \qquad (2.3)$$

Внеся (1.3) и (2.3) в (2.1) и (2.2), получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\Theta_0}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d\Theta_0}{dy} - m^2p\Theta_0 = -2m^2\vartheta^\circ \qquad (2.4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} d_1\frac{d\Theta_0}{dy} - g_1\Theta_0 &= \frac{a_0^{(1)}}{p} \quad \text{при } y = y_1 = 1-\delta, \\ d_2\frac{d\Theta_0}{dy} + g_2\Theta_0 &= \frac{a_0^{(2)}}{p} \quad \text{при } y = y_2 = 1+\delta \end{aligned} \qquad (2.5)$$

для определения Θ_0 и однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2(\ )}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d(\ )}{dy} - \left(m^2p + \frac{\nu^2}{y^2}\right)(\ ) = 0 \qquad (2.6)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} d_1\frac{d\Theta_k}{dy} - g_1\Theta_k &= \frac{a_k^{(1)}}{p}, \quad d_1\frac{d\Theta_k^*}{dy} - g_1\Theta_k^* = \frac{b_k^{(1)}}{p} \quad \text{при } y = y_1 = 1-\delta \\ d_2\frac{d\Theta_k}{dy} + g_2\Theta_k &= \frac{a_k^{(2)}}{p}, \quad d_2\frac{d\Theta_k^*}{dy} + g_2\Theta_k^* = \frac{b_k^{(2)}}{p} \quad \text{при } y = y_2 = 1+\delta \end{aligned} \qquad (2.7)$$

для определения функций Θ_k и Θ_k^* ($k = 1, 2, \ldots$).

В (2.6) использовано обозначение $\nu^2 \equiv k^2\lambda_2 / \lambda_1 > 0$, где в общем случае ν может быть любым (целым или дробным) действительным числом.

Очевидно, что решения уравнений (2.4) и (2.6) представятся в функциях Бесселя соответственно нулевого и ν-го порядков.

3. Как известно [2], общее решение уравнения (2.4) может быть представлено в виде

$$\Theta_0 = A_0J_0(im\sqrt{py}) + B_0N_0(im\sqrt{py}) + 2\vartheta^\circ / p$$

где $J_0(\ )$ и $N_0(\ )$ соответственно функции Бесселя и Неймана [3] нулевого порядка

Определив A_0 и B_0 из граничных условий (2.5) и воспользовавшись обозначениями

$$imy_1 \sqrt{p} \equiv \xi, \quad imy_2 \sqrt{p} = \varepsilon\xi, \quad imy \sqrt{p} = \chi \qquad \left(\frac{y_2}{y_1} = \frac{1+\delta}{1-\delta} \equiv \varepsilon > 1, \quad \frac{\chi}{\xi} \equiv \frac{y}{y_1}\right)$$

будем иметь (3.1)

$$\Theta_0(p) = \frac{2\vartheta^\circ}{p} + \frac{\Omega_0(\xi)}{p\Delta_0(\xi)} \tag{3.2}$$

$$\Omega_0(\xi) / y_1 = \{(a_0^{(1)} + 2g_1\vartheta^\circ)[g_2 y_1 N_0(\varepsilon\xi) - d_2\xi N_1(\varepsilon\xi)] + (a_0^2 - 2g_2\vartheta^\circ)[g_1 y_1 N_0(\xi) + d_1\xi N_1(\xi)]\} J_0(\chi) - \{(a_0^{(2)} - 2g_2\vartheta^\circ)[g_1 y_1 J_0(\xi) + d_1\xi J_1(\xi)] + (a_0^{(1)} + 2g_1\vartheta^\circ) \times [g_2 y_1 J_0(\varepsilon\xi) - d_2\xi J_1(\varepsilon\xi)]\} N_0(\chi)$$

$$\Delta_0(\xi) = [g_1 y_1 J_0(\xi) + d_1\xi J_1(\xi)][-g_2 y_1 N_0(\varepsilon\xi) + d_2\xi N_1(\varepsilon\xi)] + [g_2 y_1 J_0(\varepsilon\xi) - d_2\xi J_1(\varepsilon\xi)][g_1 y_1 N_0(\xi) + d_1\xi N_1(\xi)]$$

Имея изображение Θ_0, по известной теореме обращения преобразования Лапласа

$$\vartheta_0(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\tau p}\, \Theta_0(p)\, dp \tag{3.3}$$

найдем оригинал ϑ_0, т. е. одну из искомых функций разложения (1.4).

Заметим, что в (3.3) подынтегральная функция является однозначной функцией p с полюсом при $p = 0$ и с простыми полюсами при $p = p_{0n} \equiv -\xi^2_{0n} / m^2 y^2_1$, где через $+ \xi_{0n}$ обозначены корни (все действительные и простые [1]) уравнения

$$\Delta_0(\xi) = 0 \tag{3.4}$$

Если выполнено условие

$$g_1 d_2 + g_2\varepsilon d_1 + g_1 g_2 \varepsilon y_1 \ln \varepsilon \neq 0 \tag{3.5}$$

то точка $p = 0$ будет полюсом первого порядка. Внеся (3.2) в (3.3), используя известную формулу для вычисления вычетов [2], окончательно получим (3.6)

$$\vartheta_0(y, \tau) = 2\left\{\vartheta^\circ + f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_{0n} J_0(\xi_{0n} y / y_1) + D_{0n} N_0(\xi_{0n} y / y_1)] \exp\left(-\frac{\xi_{0n}^2 \tau}{m^2 y_1^2}\right)\right\}$$

$$f_0 = \frac{\varepsilon(a_0^{(2)} - 2g_2\vartheta^\circ)[d_1 + g_1 y_1(\ln y - \ln y_1)] - (a_0^{(1)} + 2g_1\vartheta^\circ)[d_2 - g_2\varepsilon y_1(\ln y - \ln\varepsilon - \ln y_1)]}{2(g_1 d_2 + g_2 d_1 \varepsilon + g_1 g_2 \varepsilon y_1 \ln\varepsilon)}$$

$$C_{0n} = \frac{y_1}{\Delta_{0n}'}\{(a_0^{(1)} + 2g_1\vartheta^\circ)[g_2 y_1 N_0(\varepsilon\xi_{0n}) - d_2\xi_{0n} N_1(\varepsilon\xi_{0n})] + (a_0^{(2)} - 2g_2\vartheta^\circ)[g_1 y_1 N_0(\xi_{0n}) + d_1\xi_{0n} N_1(\xi_{0n})]\}$$

$$D_{0n} = -\frac{y}{\Delta_{0n}'}\{(a_0^{(2)} - 2g_2\vartheta^\circ)[g_1 y_1 J_0(\xi_{0n}) + d_1\xi_{0n} J_1(\xi_{0n})] + (a_0^{(1)} + 2g_1\vartheta^\circ)[g_2 y_1 J_0(\varepsilon\xi_{0n}) - d_2\xi_{0n} J_1(\varepsilon\xi_{0n})]\}$$

$$\Delta_{0n}' - 2p\frac{d\Delta_0(\xi)}{dp}\Big|_{p=p_{0n}} =$$

$$= \xi_{0n}\{[-d_1\xi_{0n} J_0(\xi_{0n}) + g_1 y_1 J_1(\xi_{0n})][g_2 y_1 N_0(\varepsilon\xi_{0n}) - d_2\xi_{0n} N_1(\varepsilon\xi_{0n})] + [-d_1\xi_{0n} N_0(\xi_{0n}) + g_1 y_1 N_1(\xi_{0n})][-g_2 y_1 J_0(\varepsilon\xi_{0n}) + d_2\xi_{0n} J_1(\varepsilon\xi_{0n})] - \varepsilon[d_2\xi_{0n} J_0(\varepsilon\xi_{0n}) + g_2 y_1 J_1(\varepsilon\xi_{0n})][g_1 y_1 N_0(\xi_{0n}) + d_1\xi_{0n} N_1(\xi_{0n})] + \varepsilon[d_2\xi_{0n} N_0(\varepsilon\xi_{0n}) + g_2 y_1 N_1(\varepsilon\xi_{0n})][g_1 y_1 J_0(\xi_{0n}) + d_1\xi_{0n} J_1(\xi_{0n})]\}$$

Здесь и в дальнейшем использованы предельные соотношения

$$\lim_{x\to 0} \frac{J_\nu(\mu x)}{x^\omega J_n(x)} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu - n - \omega > 0 \\ 2^{n-\nu}\mu^\nu \Gamma(n+1) / \Gamma(\nu+1) & \text{при } \nu - n - \omega = 0 \\ \infty & \text{при } \nu - n - \omega < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^\omega N_n(x)}{N_\nu(\mu x)} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu - n + \omega > 0 \\ 2^{n-\nu}\mu^\nu \Gamma(n) / \Gamma(\nu) & \text{при } \nu - n + \omega = 0 \\ \infty & \text{при } \nu - n + \omega < 0 \end{cases}$$

справедливые как для целочисленных, так и для дробных значений $\nu \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $\omega \geqslant 0$.

Если условие (3.5) не выполняется (что при ограничениях, наложенных на коэффициенты d_f и g_f' в первом параграфе, возможно только при одновременном равенстве нулю коэффициентов g_1 и g_2), точка $p = 0$ будет полюсом второго порядка. Тогда в (3.6) следует принять

$$f_0 = \frac{a_0^{(2)} d_1 \varepsilon - a_0^{(1)} d_2}{d_1 d_2 m^2 y_1 (\varepsilon^2 - 1)} \tau + \frac{a_0^{(1)} y_1}{4 d_1 (\varepsilon^2 - 1)} \left[1 + 2\varepsilon^2 \left(1 - \ln y_1 + \ln y - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} \ln \varepsilon\right)\right] +$$
$$+ \frac{a_0^{(2)} \varepsilon y_1}{4 d_2 (\varepsilon^2 - 1)} \left[\varepsilon^2 + 2\left(1 + \ln y_1 - \ln y + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} \ln \varepsilon\right)\right] \tag{3.7}$$

Заметим, что наличие в (3.7) линейной функции от времени может привести к неограниченному возрастанию абсолютного значения температуры в полом цилиндре. Этот случай на практике возможен, если на обеих граничных поверхностях полого цилиндра отсутствует теплообмен со средой ($g_1 = g_2 = 0$) и если количество тепла, подводимого через одну граничную поверхность, не равно количеству тепла, отводимому через другую граничную поверхность ($a_0^{(2)} d_1 \varepsilon \neq a_0^{(1)} d_2$).

4. Поскольку функции Θ_k и Θ_k^* ($k = 1, 2, \ldots$) определяются из одного и того же уравнения (2.6) и удовлетворяют граничным условиям (2.7), отличающимся друг от друга только значениями коэффициентов $a_k^{(j)}$ и $b_k^{(j)}$, ограничимся отысканием только функции $\vartheta_k(y, \tau)$. Заменив в окончательном выражении функции $\vartheta_k(y, \tau)$ коэффициенты $a_k^{(j)}$ на $b_k^{(j)}$, получим также и выражение функции $\vartheta_k^*(y, \tau)$.

С учетом особенностей функций Бесселя, связанных с целочисленностью и дробностью порядка ν [4], решение уравнения (2.6) для рассматриваемого случая в обозначениях (3.1) представится в виде

$$\Theta_k = A_k J_\nu(\chi) + B_k N_\nu(\chi) \tag{4.1}$$

где $J_\nu(\ )$, $N_\nu(\ )$ — соответственно функции Бесселя и Неймана [3] ν-го порядка.

Заметим, что при $\nu + 1$, равном натуральному числу, будем иметь либо изотропный цилиндр ($\nu = k$), либо частный случай ортотропии, когда отношение $\Lambda^2{}_{21} = \lambda_2 / \lambda_1$ равно квадрату какого-либо натурального числа.

Определив из граничных условий (2.7) значения постоянных A_k и B_k и внеся их в (4.1) получим

$$\Theta_k = \frac{\Omega_k(\xi)}{p \Delta_k(\xi)} \tag{4.2}$$

$$\Omega_k(\xi)/y_1 = \{a_k^{(1)} [(d_2\nu + g_2 \varepsilon y_1) N_\nu(\varepsilon\xi) - \varepsilon\xi d_2 N_{\nu+1}(\varepsilon\xi)] - a_k^{(2)} \varepsilon [(d_1\nu - g_1 y_1) N_\nu(\xi) -$$
$$- d_1 \xi N_{\nu+1}(\xi)]\} J_\nu(\chi) + \{a_k^{(2)} \varepsilon [(d_1\nu - g_1 y_1) J_\nu(\xi) - \xi d_1 J_{\nu+1}(\xi)] -$$
$$- a_k^{(1)} [(d_2\nu + g_2 \varepsilon y_1) J_\nu(\varepsilon\xi) - \varepsilon\xi d_2 J_{\nu+1}(\varepsilon\xi)]\} N_\nu(\chi)$$
$$\Delta_k(\xi) = [(d_1\nu - g_1 y_1) J_\nu(\xi) - \xi d_1 J_{\nu+1}(\xi)][(d_2\nu + g_2 \varepsilon y_1) N_\nu(\varepsilon\xi) - \varepsilon\xi d_2 N_{\nu+1}(\varepsilon\xi)] -$$
$$- [(d_1\nu - g_1 y_1) N_\nu(\xi) - \xi d_1 N_{\nu+1}(\xi)][(d_2\nu + g_2 \varepsilon y_1) J_\nu(\varepsilon\xi) - \varepsilon\xi d_2 J_{\nu+1}(\varepsilon\xi)]$$

Имея изображение Θ_k, по известной теореме обращения найдем оригинал $\vartheta_k(y, \tau)$.

Заметим, что и в данном случае подынтегральная функция является однозначной функцией p с полюсами при $p = 0$ и $p = p_{kn} \equiv \xi_{kn}^2 / m^2 y_1^2$, где через $\pm \xi_{kn}$ обозначены корни уравнения $\Delta_k(\xi) = 0$. Если выполнено условие [1]

$$\frac{\nu y_1 (\varepsilon d_1 g_2 + d_2 g_1)}{d_1 d_2 \nu^2 + g_1 g_2 \varepsilon y_1^2} \neq \frac{1 - \varepsilon^{2\nu}}{1 + \varepsilon^{2\nu}} \tag{4.3}$$

то полюс при $p = 0$ будет простым, так как

$$\lim_{p \to 0} (p \Theta_k) = f_k, \qquad f_k = y_1 \frac{l_1 + l_2}{l_3} \neq \infty$$
$$l_1 = [a_k^{(1)} \varepsilon^{-\nu} (g_2 \varepsilon y_1 - \nu d_2) + a_k^{(2)} \varepsilon (g_1 y_1 \nu d_1)] (y / y_1)^\nu$$
$$l_2 = [a_k^{(2)} \varepsilon (\nu d_1 - g_1 y_1) - a_k^{(1)} \varepsilon^\nu (\nu d_2 + g_2 \varepsilon y_1)] (y_1 / y)^\nu$$
$$l_3 = (\nu d_1 - g_1 y_1)(g_2 \varepsilon y_1 - \nu d_2) \varepsilon^{-\nu} + (g_1 y_1 + \nu d_1)(g_2 \varepsilon y_1 + \nu d_2) \varepsilon^\nu$$

[1] В рассматриваемом случае условие (4.3) всегда будет выполняться, так как $\varepsilon > 1$, $\nu > 0$, а условия $d_j > 0$ и $g_j > 0$ оговорены в п. 1. Заметим, что предельным переходом из (4.3) можно получить условие (3.5).

Внеся (4.2) в формулу обращения и воспользовавшись теоремой вычетов, для случая простых корней ξ_{kn} будем иметь

$$\vartheta_k(y,\tau)=f_k+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{kn}J_\nu(\xi_{kn}y/y_1)+D_{kn}N_\nu(\xi_{kn}y/y_1)\right]\exp\left(\frac{-\xi_{kn}^2\tau}{m^2y_1^2}\right)$$

$$\vartheta_k(y,\tau)=f_k^*+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{kn}^*J_\nu(\xi_{kn}y/y_1)+D_{kn}^*N_\nu(\xi_{kn}y/y_1)\right]\exp\left(\frac{-\xi_{kn}^2\tau}{m^2y_1^2}\right) \tag{4.4}$$

где значения постоянных коэффициентов C_{kn} и D_{kn} $(k=1, 2, \ldots)$ определяются формулами

$$C_{kn}=\frac{2y_1}{\Delta_{kn}'}\{a_k^{(1)}[-d_2\varepsilon\xi_{kn}N_{\nu+1}(\varepsilon\xi_{kn})+(d_2\nu+g_2\varepsilon y_1)N_\nu(\varepsilon\xi_{kn})]+$$
$$+a_k^{(2)}\varepsilon[d_1\xi_{kn}N_{\nu+1}(\xi_{kn})+(-d_1\nu+g_1y_1)N_\nu(\xi_{kn})]\}$$

$$D_{kn}=\frac{2y_1}{\Delta_{kn}'}\{a_k^{(2)}\varepsilon[-d_1\xi_{kn}J_{\nu+1}(\xi_{kn})+(d_1\nu-g_1y_1)J_\nu(\xi_{kn})]+$$
$$+a_k^{(1)}[d_2\varepsilon\xi_{kn}J_{\nu+1}(\varepsilon\xi_{kn})-(d_2\nu+g_2\varepsilon y_1)J_\nu(\varepsilon\xi_{kn})]\}$$

$$\Delta_{kn}'=2p\frac{d[\Delta_k(\xi)]}{dp}\Big|_{p=p_{kn}}=$$
$$=[(d_1\nu^2-g_1y_1\nu-d_1\xi_{kn}^2)J_\nu(\xi_{kn})+g_1y_1\xi_{kn}J_{\nu+1}(\xi_{kn})][(d_2\nu+g_2\varepsilon y_1)N_\nu(\varepsilon\xi_{kn})-$$
$$-d_2\varepsilon\xi_{kn}N_{\nu+1}(\varepsilon\xi_{kn})]+[(d_1\nu^2-g_1y_1\nu-d_1\xi_{kn}^2)N_\nu(\xi_{kn})+g_1y_1\xi_{kn}N_{\nu+1}(\xi_{kn})]\times$$
$$\times[-(d_2\nu+g_2\varepsilon y_1)J_\nu(\varepsilon\xi_{kn})+d_2\varepsilon\xi_{kn}J_{\nu+1}(\varepsilon\xi_{kn})]+[(d_2\nu^2+g_2\varepsilon y_1\nu-d_2\varepsilon^2\xi_{kn}^2)J_\nu(\varepsilon\xi_{kn})-$$
$$-g_2y_1\varepsilon^2\xi_{kn}J_{\nu+1}(\varepsilon\xi_{kn})][(-d_1\nu+g_1y_1)N_\nu(\xi_{kn})+d_1\xi_{kn}N_{\nu+1}(\xi_{kn})]+$$
$$+[(d_2\nu^2+g_2\varepsilon y_1\nu-d_2\varepsilon^2\xi_{kn}^2)N_\nu(\varepsilon\xi_{kn})-g_2y_1\varepsilon^2\xi_{kn}N_{\nu+1}(\varepsilon\xi_{kn})]\times$$
$$\times[(d_1\nu-g_1y_1)J_\nu(\xi_{kn})-d_1\xi_{kn}J_{\nu+1}(\xi_{kn})]$$

а значения f_k^*, C_{kn}^*, D_{kn}^* получим соответственно из значений f_k, C_{kn}, D_{kn}, заменив в них $a_k^{(j)}$ на $b_k^{(j)}$.

Внеся (3.6) и (4.4) в (1.4), для безразмерной нестационарной температурной функции $\vartheta(y,\varphi,\tau)$ в безразмерных пространственных координатах y, φ и в безразмерной временной координате τ окончательно будем иметь

$$\vartheta=\vartheta^\circ+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f_k+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{kn}J_\nu(\xi_{kn}y/y_1)+D_{kn}N_\nu(\xi_{kn}y/y_1)\right]\exp\frac{-\xi_{kn}^2\tau}{m^2y_1^2}\right\}\cos(\nu\varphi)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{f_k^*+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{kn}^*J_\nu(\xi_{kn}y/y_1)+D_{kn}^*N_\nu(\xi_{kn}y/y_1)\right]\exp\frac{-\xi_{kn}^2\tau}{m^2y_1^2}\right\}\sin(\nu\varphi) \tag{4.5}$$

Из (4.5) легко получить выражение для установившегося температурного поля

$$\vartheta(y,\varphi,\infty)=\vartheta^\circ+\sum_{k=0}^{\infty}f_k\cos(\nu\varphi)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k^*\sin(\nu\varphi)$$

Как частный случай, из (4.5) можно получить также решение задачи для осесимметричных граничных условий на поверхностях $y=y_1$ и $y=y_2$. Для этого достаточно в (4.5) ограничиться только членом $k=0$.

Тогда будем иметь

$$\vartheta(y,\tau)=\vartheta^\circ+f_0+\sum_{n=1}^{\infty}[C_{0n}J_0(\xi_{0n}y/y_1)+D_{0n}N_0(\xi_{0n}y/y_1)]\exp\frac{-\xi_{0n}^2\tau}{m^2y_1^2}$$

что совпадает с решением, приведенным в [1].

5. Поскольку решение (4.5) уравнения (1.1) получено формальным почленным дифференцированием (дважды по y и дважды по φ) рядов, входящих в (1.4), нужно доказать равномерную сходимость в области $y_2\geqslant y\geqslant y_1$, $2\pi\geqslant\varphi\geqslant 0$, $\tau>0$ рядов

$$S_1\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^2u_k}{\partial y^2},\quad S_2\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^2u_k}{\partial\varphi^2},\quad S_3\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2v_{kn}}{\partial y^2},\quad S_4\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2v_{kn}}{\partial\varphi^2}\tag{5.1}$$

$$u_k\equiv f_k\cos(\nu\varphi)\tag{5.2}$$

$$v_{kn}\equiv[C_{kn}J_\nu(\xi_{kn}y/y_1)+D_{kn}(\xi_{kn}y/y_1)]\exp\frac{-\xi_{kn}^2\tau}{m^2y_1^2}\cos(\nu\varphi)\tag{5.3}$$

Из (5.2) можно получить

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\partial^2u_k}{\partial y^2}=\sum_{k=k_0}^{\infty}\nu\,(a_k^{(1)}M_k^{(1)}+a_k^{(2)}M_k^{(2)})\tag{5.4}$$

$$M_k^{(1)}=\frac{1}{y_1Q}\left[\varepsilon^{-(\nu+2)}l^-\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{y}{y_2}\right)^{\nu-2}-l^+\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{y_1}{y}\right)^{\nu+2}\right]\cos(\nu\varphi)\tag{5.5}$$

$$M_k^{(2)}=\frac{1}{y_1Q\varepsilon}\left[q^+\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{y}{y_2}\right)^{\nu-2}-\varepsilon^{-\nu+2}q^-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{y_2}{y}\right)^{\nu+2}\right]\cos(\nu\varphi)\tag{5.6}$$

$$q^\pm=\frac{g_1y_1}{\nu}\pm d_1,\qquad l^\pm=\frac{g_2\varepsilon y_1}{\nu}\pm d_2,\qquad Q=p^+l^+-p^-l^-\varepsilon^{-2\nu}$$

$$k_0=1+E\left(\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}\right)$$

символ E (...) означает целую часть числа (...). Заметим, что для всех $k>k_0$ будет выполнено условие $\nu>1$. Теперь нетрудно показать, что

$$|M_k^{(1)}|\leqslant c',\quad |M_k^{(2)}|\leqslant c'',\quad c'=\frac{3(d_2+g_2\varepsilon y_1)\varepsilon^2}{d_1d_2y_1(\varepsilon^2-1)},\quad c''=\frac{3(d_1+g_1y_1)\varepsilon^2}{d_1d_2y_1(\varepsilon^2-1)}$$

Следовательно, мажорантой ряда (5.4) будет ряд

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\nu\left(|a_k^{(1)}|c'+|a_k^{(2)}|c''\right)\tag{5.7}$$

Напомним, что $a_k^{(1)}$ и $a_k^{(2)}$ представляют коэффициенты Фурье заданных граничных функций F_1 и F_2. Если эти периодические граничные функции непрерывны со своими производными до s-го порядка (где $s>2$), то нетрудно убедиться в сходимости мажоранты (5.7), а следовательно, в равномерной сходимости ряда (5.4).

Наиболее неблагоприятным, с точки зрения равномерной сходимости ряда (5.4), является случай, когда граничные функции F_1 и F_2, удовлетворяя условиям Дирихле, не являются непрерывными. Тогда можно будет лишь утверждать, что коэффициенты Фурье $a_k^{(1)}$ и $a_k^{(2)}$ при больших значениях k будут бесконечно малыми порядка не ниже $1/k$, а этого будет недостаточно для сходимости мажоранты (5.7). В этом случае иногда удается весьма незначительными изменениями граничных функций F_1 и F_2 аппроксимировать их достаточно гладкими функциями, обеспечивающими сходимость мажоранты (5.7). При невозможности такой аппроксимации придется удовлетвориться равномерной сходимостью ряда (5.4) лишь внутри области $y_2>y>y_1$.

Введем в рассмотрение область $\alpha_2\geqslant y\geqslant\alpha_1$, где $\alpha_2<y_2$, $\alpha_1>y_1$.

Через $\nu^*>1$ обозначим одно из тех значений ν, которое для всех возможных $\nu>\nu^*$ обеспечивает одновременное выполнение неравенств

$$(\alpha_2/y_2)^{\nu-2}\leqslant\nu^{-s},\qquad (y_1/\alpha_1)^{\nu+2}\leqslant\nu^{-s}\quad(s>1)$$

Тогда можно показать, что

$$|M_k^{(1)}|\leqslant c'\nu^{-s},\qquad |M_k^{(2)}|\leqslant c''\nu^{-s}\qquad(k>k_0)$$

Этого достаточно для сходимости мажоранты (5.7), а следовательно, для равномерной сходимости ряда (5.4) внутри области $y_2>y>y_1$.

Если в (5.4) взамен (5.5) и (5.6) воспользоваться обозначениями

$$M_k^{(1)} = -\frac{y_1}{Q}\left[\varepsilon^{-\nu} l^- \left(\frac{y}{y_2}\right)^\nu - l^+ \left(\frac{y_1}{y}\right)^\nu\right] \cos(\nu\varphi)$$

$$M_k^{(2)} = -\frac{y_2}{Q}\left[q^+ \left(\frac{y}{y_2}\right)^\nu - \varepsilon^{-\nu} q^- \left(\frac{y_1}{y}\right)^\nu\right] \cos(\nu\varphi)$$

то получим ряд S_2 (5.1), доказательство равномерной сходимости которого ничем не будет отличаться от приведенного выше доказательства для ряда S_1.

Рассмотрим двойной ряд S_3 (5.1). Введем обозначения

$$M_k^{(1)} = \frac{2y_1\xi_{kn}}{\Delta}\left\{\left[-d_2\varepsilon N_{\nu+1}(\varepsilon\xi_{kn}) + \frac{\nu l^+}{\xi_{kn}} N_\nu(\varepsilon\xi_{kn})\right] \times \right.$$
$$\times \left[\left(\frac{\nu^2-\nu}{\xi_{kn}^2}\frac{y_1^2}{y^2} - 1\right) J_\nu(\xi_{kn} y / y_1) + \frac{y_1}{y\xi_{kn}} J_{\nu+1}(\xi_{kn} y / y_1)\right] +$$
$$+ \left[d_2\varepsilon J_{\nu+1}(\varepsilon\xi_{kn}) - \frac{\nu l^+}{\xi_{kn}} J_\nu(\varepsilon\xi_{kn})\right]\left[\left(\frac{\nu^2-\nu}{\xi_{kn}^2}\frac{y_1^2}{y^2} - 1\right) N_\nu(\xi_{kn} y / y_1) + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{y_1}{y\xi_{kn}} N_{\nu+1}(\xi_{kn} y / y_1)\right]\right\}$$

$$M_k^{(2)} = \frac{2\varepsilon y_1\xi_{kn}}{\Delta}\left\{\left[d_1 N_{\nu+1}(\xi_{kn}) + \frac{\nu q^-}{\xi_{kn}} N_\nu(\xi_{kn})\right] \times \right.$$
$$\times \left[\left(\frac{\nu^2-\nu}{\xi_{kn}^2} \cdot \frac{y_1^2}{y^2} - 1\right) J_\nu(\xi_{kn} y / y_1) + \frac{y_1}{y\xi_{kn}} J_{\nu+1}(\xi_{kn} y / y_1)\right] +$$
$$+ \left[-d_1 J_{\nu+1}(\xi_{kn}) - \frac{\nu q^-}{\xi_{kn}} J_\nu(\xi_{kn})\right] \times$$
$$\left. \times \left[\left(\frac{\nu^2-\nu}{\xi_{kn}^2}\frac{y_1^2}{y^2} - 1\right) N_\nu(\xi_{kn} y / y_1) + \frac{y_1}{y\xi_{kn}} N_{\nu+1}(\xi_{kn} y / y_1)\right]\right\}$$

$$(\Delta = \Delta_{kn}' / \xi_{kn}^2 \neq 0)$$

В результате получим

$$\frac{\partial^2 v_{kn}}{\partial y^2} = (a_k^{(1)} M_k^{(1)} + a_k^{(2)} M_k^{(2)}) \exp \frac{-\xi_{kn}^2 \tau}{m^2 y_1^2} \cos(\nu\varphi)$$

Учитывая, что при беспредельном возрастании ν корни ξ_{kn} уравнения $\Delta_k(\xi) = 0$ возрастают, по меньшей мере, как $c_1 \nu$, где $c_1 > 0$ [5], а также пользуясь предельными соотношениями

$$\lim_{x\to\infty} |\sqrt{x} J_\nu(x)| < {}^1/_2 \pi > \lim_{x\to\infty} |\sqrt{x} N_\nu(x)|$$

можно показать, что

$$\lim_{k\to\infty} |M_k^{(1)}| \leqslant \frac{8d_2 y_1}{\pi\sqrt{\varepsilon c_1^3}\Delta}(1 + \varepsilon c_1)(1 + c_1^2)$$

$$\lim_{k\to\infty} |M_k^{(2)}| \leqslant \frac{8d_1 \varepsilon y_1}{\pi c_1^2 \Delta}(1 + c_1)(1 + c_1^2)$$

т. е. при беспредельном возрастании k коэффициенты $a_k^{(1)} M_k^{(1)} + a_k^{(2)} M_k^{(2)}$ двойного ряда S_3 не только ограничены, но и стремятся к нулю, по крайней мере, как $1/k$. Таким образом, для доказательства равномерной сходимости двойного ряда S_3 достаточна сходимость его мажоранты

$$\sum_{k=k'}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \exp \frac{-c^2(k+n)^2\tau}{m^2 y_1^2}$$

которая очевидна.

При этом следует учесть, что при беспредельном возрастании k или n корни ξ_{kn} уравнения $\Delta_k(\xi) = 0$ возрастают, по крайней мере, как $c(k+n)$, где $c > 0$ [5].

Аналогичным образом нетрудно доказать также и равномерную сходимость двойного ряда S_4.

Приведенные выше доказательства равномерной сходимости рядов (5.1) остаются в силе также и для рядов S_i^*, получаемых из S_i заменой в них f_k, C_{kn}, D_{kn}, $\cos(\nu\varphi)$ соответственно на

$$f_k^*,\ C_{kn}^*,\ D_{kn}^*,\quad \sin(\nu\varphi)$$

Таким образом, равномерная сходимость рядов, входящих в выражение (4.5) безразмерной неосесимметричной температурной функции бесконечно длинного, полого, ортотропного цилиндра, доказана.

Статья находилась в печати, когда автору стало известно о работе Чанелли [6], в которой, применением конечного преобразования Генкеля по пространственным координатам, рассмотрена задача, аналогичная той, которая решена в настоящей заметке применением интегрального преобразования Лапласа по временной координате.

Поступила 1 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во «Наука» 1964.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. Гостехиздат, 1950.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз. 1962.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. Изд. иностр лит., 1949.
5. Дургарьян С. М. К определению неосесимметричного температурного поля ортотропного полого цилиндра и шара. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
6. Cinelli. An extension of the finite Hankel transform and applications (Int. J. Engng Sci., vol. 3, p. 539—559, Pergamon Press 1965).

ВЛИЯНИЕ КОЛЕБАНИЙ НА МАССООТДАЧУ ОТ СФЕРЫ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ

А. П. Бурдуков, В. Е. Накоряков

(Новосибирск)

Известно, что звуковые колебания используются для интенсификации диффузионных процессов химической технологии [1]. В предыдущих работах [2-4] исследовалось влияние звуковых колебаний на процессы переноса в газовых средах (числа Прандтля меньше или равны единице). Ниже делается попытка распространения результатов на процессы гетерогенного массообмена в жидкостях (числа Прандтля велики).

Оказалось, что перенос массы в этом случае осуществляется внутренними, а не внешними вторичными течениями. Основные результаты расчета проверены экспериментально.

Обозначения

u, v — продольная и поперечная составляющие скорости;
x, y — продольная и поперечная координаты;
R — радиус сферы;
r — текущий радиус сферы;
λ — длина волны колебаний;
ω — частота колебаний;
B — амплитуда скорости колебаний;
s — амплитуда смещения при колебаниях;
m — безразмерная концентрация диффундирующего вещества;
D — коэффициент диффузии;
μ — динамическая вязкость;
ρ — плотность;
ν — кинематическая вязкость;
q — поток вещества от поверхности сферы;
β — коэффициент массообмена;
N — число Нуссельта;
P — число Прандтля;
Γ — гамма-функция.

Рассмотрим сферу, помещенную в колеблющуюся по гармоническому закону жидкость. Между сферой и жидкостью происходят процессы массообмена, причем предполагается, что числа Прандтля очень велики ($P \to \infty$). Оставим в силе введенные в работе [2-4] предположения

$$\lambda / R \gg 1, \quad \nu = \text{const}, \quad \mu = \text{const}, \quad D = \text{const}, \quad \rho = \text{const}$$