

К ТЕОРИИ ЗАРОДЫШЕВЫХ ТРЕЩИН, ОБРАЗУЮЩИХСЯ
ПРИ ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ КРИСТАЛЛА

Ю. М. Плишкин

(Свердловск)

Рассматривается плоская модель кристалла с трещиной, имеющей препятствие для захлопывания (клин) в виде дислокации с вектором Бюргерса в n межатомных расстояний. Получено соотношение между степенью растяжения кристалла ϵ и толщиной дислокационного клина n , определяющее условие хрупкого разрушения кристалла.

В теории хрупкого разрушения гипотеза о зародышевых трещинах [1] используется для объяснения несоответствия экспериментальной прочности твердых тел их теоретической прочности. Такие трещины должны быть устойчивыми, а поэтому вопрос об устойчивости трещин представляет большой интерес. Проблеме отыскания достаточных условий существования устойчивых трещин был посвящен ряд работ [2-4]. В работах [6-8] рассматривается вопрос об устойчивости трещины в микроскопической модели идеального кристалла, подвергнутого растяжению. В основу расчетов полагалась идея о том, что растянутой системе атомных плоскостей присущи два положения, доставляющие минимум потенциальной энергии взаимодействия плоскостей, первое из которых соответствует равномерно растянутой идеальной решетке без каких-либо нарушений, а второе — решетке с дефектами в виде трещин. Эта идея нашла строгое подтверждение для случая одномерной модели [10-12]. При рассмотрении плоской задачи выяснилось [8], что хотя и существуют конфигурации в упругорастянутом кристалле, соответствующие трещине и доставляющие минимум потенциальной энергии взаимодействия [7], однако такая трещина не может являться стабильной (устойчивой) в том смысле, что трещина не может сохранять свои размеры, если отсутствуют препятствия для ее захлопывания или распространения. В качестве дефектов, препятствующих захлопыванию трещины, могут служить, например, либо атомы поверхностно-активной среды [13], либо скопления дислокаций [9,14,15].

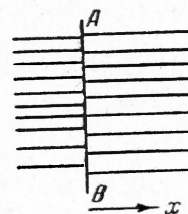
В настоящей работе рассматривается в рамках модели [7,8] одна из возможных систем достаточных условий для образования устойчивой трещины, а именно, предполагается, что препятствием для захлопывания трещины является скопление дислокаций в некоторой плоскости скольжения. Механизм зарождения трещины, обусловленного скоплением дислокаций, не конкретизируется.

1. Кристалл представляет собой систему конечного числа $N + 1$ параллельных атомных плоскостей, расположенных перпендикулярно к направлению растяжения. В пересекающей их плоскости AB имеется несколько краевых дислокаций (фиг. 1). Характер взаимодействия атомов кристалла предполагается точно таким же, как и в модели [7], а именно, потенциальная энергия взаимодействия атомов, принадлежащих соседним атомным слоям, зависит от расстояния r по нелинейному закону

$$v(r) = -Ar^{-\mu} + Br^{-\nu} \quad (1.1)$$

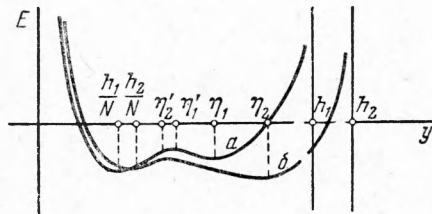
где $A, B > 0, \nu > \mu > 0$ — константы. Изменение же потенциальной энергии взаимодействия, возникающее в результате изменений межатомных расстояний внутри каждого из атомных слоев, описывается законом Гука. Отличие данной задачи от рассмотренной ранее [7, 8] состоит в том, что здесь кристалл содержит препятствие для захлопывания трещины.

Предположим, что в некоторой точке плоскости AB расположена краевая дислокация с вектором Бюргерса, равным nr_0 , где r_0 — нормальное межплоскостное расстояние в области $x < 0$. Так как механизм зарождения трещины не рассматривается, то несущественно, возникла ли она

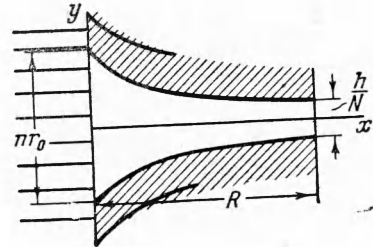


Фиг. 1

в результате скопления дислокаций на препятствии в одной плоскости скольжения согласно [9, 16] или в результате взаимодействия дислокаций в пересекающихся плоскостях скольжения согласно [15]. Поэтому введение гипотетической плоскости скольжения AB носит условный характер и не оказывает существенного влияния на конечные результаты. Кристалл

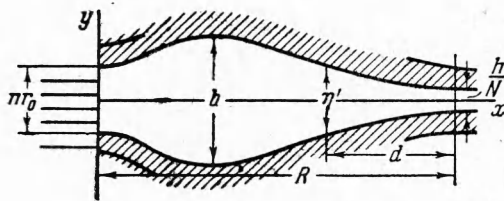


Фиг. 2



Фиг. 3

подвергается растяжению, характеризуемому параметром $h = N\varepsilon\rho_0$, где ε — относительная деформация, а ρ_0 — равновесное расстояние между плоскостями в отсутствие внешних напряжений. Как было показано [7, 8], растяжение кристалла приводит к возникновению дефектов идеальной решетки в виде трещин. Ставится задача определить форму трещин в



Фиг. 4

зависимости от величины $n\tau_0$ вектора Бюргера дислокации, стабилизирующей трещину, и решить вопрос об ее устойчивости. Рассматривается также вопрос о том, каким должно быть соотношение между толщиной дислокационного клина $n\tau_0$ и степенью растяжения h , приводящее к распространению трещины, т. е. к разрушению кристалла.

2. Выражение для приращения потенциальной энергии кристалла, вызванного наличием трещины, после ряда упрощений приобретает вид функционала [7]

$$V(y, y') = \frac{1}{a} \int_0^R [E(y) + \beta y'^4] dx \quad (2.1)$$

Здесь $y(x)$ — толщина трещины в рассматриваемой точке, a — постоянная решетки в направлении x , функция (фиг. 2)

$$E(y) = v(y) + (N-1)v[(h-y)/(N-1)] \quad (2.2)$$

Постоянная β связана с гуковской постоянной материала α соотношением

$$\beta = \alpha a^2 \frac{N(N+1)(3N^2-7)}{960(N-1)^3} \quad (2.3)$$

Первое слагаемое подынтегральной функции в правой части формулы (2.1) описывает взаимодействие атомных слоев, а второе — взаимодействие атомов внутри каждого из них.

Величина R характеризует собой границу области искажения кристалла трещиной, т. е. для $x \geq R$ расстояния между всеми $N+1$ атомными плоскостями (фиг. 3, 4) равны h/N .

Чтобы рассмотреть равновесную форму трещины, выходящей на плоскость AB , нужно найти минимумы функционала (2.1) с условиями на границах

$$y(0) = nr_0, \quad y(R) = h/N \quad (2.4)$$

Задание граничных условий в форме (2.4) предполагает, что величина области искажения R считается заданной. Можно показать, что для любой величины R из некоторого интервала значений существует экстремаль, доставляющая минимум функционалу (2.1). При этом соотношение параметров nr_0 и h не оказывает существенного влияния на свойства этой экстремали. Однако задача приобретает больший интерес, если величина области искажения R не задается а priori, а сама вычисляется из условия экстремальности. Исследование вопроса о равновесной форме трещины приводит в этом случае к вариационной задаче с одним подвижным концом: найти кривые γ , доставляющие минимум функционалу

$$V(y, y') = \frac{1}{a} \int_{\gamma} [E(y) + \beta y'^4] dx \quad (2.5)$$

и удовлетворяющие на одном конце условию

$$y(0) = nr_0 \quad (2.6)$$

а на другом условию трансверсальности [17]

$$\left[\frac{F - y'F_{y'}}{\psi_{x'}} \right]_{x=R} = \left[\frac{F_{y'}}{\psi_{y'}} \right]_{x=R} \quad (2.7)$$

Здесь F — подинтегральная функция функционала (2.5), а $\psi(x, y) = 0$ — уравнение кривой, на которой должен лежать второй конец экстремали. В рассматриваемом случае

$$\psi(x, y) = y - h/N \equiv 0, \quad F_{y'} = 4\beta y'^3, \quad \psi_{x'} = 0, \quad \psi_{y'} = 1 \quad (2.8)$$

Если предполагать, что минимум функционала (2.5) ищется среди экстремалей, принадлежащих классу C_1 (непрерывные функции с непрерывной производной), то условие (2.7) приобретает вид

$$E(y)|_{x=R} = E(h/N) = 0, \quad y'|_{x=R} = 0 \quad (2.9)$$

Функция $E(y)$, как и функция (1.1), определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому первое равенство (2.9) можно предполагать выполненным для каждого фиксированного h . Второе условие (2.9), которое в настоящем рассуждении возникло как необходимое следствие условия трансверсальности, соответствует условию о плавности смыкания поверхностей трещины в ее вершине, принятом в теории, основывающейся на расчетах в рамках линейной теории упругости [4, 5].

Экстремали функционала (2.5) должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений Эйлера

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{\partial E}{\partial y} \frac{1}{12\beta p^2} \quad (2.10)$$

Рассмотрим по аналогии с работой [7] интегральные кривые в фазовой плоскости yp системы (2.10). Для слабого растяжения, удовлетворяющего условию

$$E(h/N) < E(\eta) \quad (\text{кривая } a \text{ на фиг. 2}) \quad (2.11)$$

кривые располагаются так, как это указано на фиг. 5, а случаю сильного растяжения, удовлетворяющего условию

$$E(h/N) > E(\eta) \quad (\text{кривая } b \text{ на фиг. 2}) \quad (2.12)$$

положительным и, таким образом, суммарная энергия кристалла, выражаемая функционалом (2.5), будет больше, чем для случая $y(x) \equiv h/N$.

Если толщина клина увеличивается настолько, что $nr_0 > \eta$, то решение задачи с граничными условиями (2.6), (2.7) существенно не изменяется. Для случая $nr_0 \approx \eta$ уместно рассмотреть еще одно решение, соответствующее устойчивой конфигурации кристаллической решетки. Выберем вместо прямой (2.8), на которой должен лежать подвижный конец экстремали, прямую

$$\psi(x, y) = y - \eta \equiv 0 \quad (3.1)$$

Экстремаль, удовлетворяющая условию (2.7) с кривой (3.1), соответствует трещине, распространившейся по всему образцу, в сторону $x > 0$. В плоскости yr этому решению соответствует участок сепаратрисы CD верхней полуплоскости, если $nr_0 < \eta$, и участок сепаратрисы ED нижней полуплоскости, если $nr_0 > \eta$. Такое решение является возможным при любом значении величины nr_0 , удовлетворяющей неравенству $nr_0 < \eta$, и не обязательно близком к η , однако существует некоторый (фиг. 5) нижний предел $b_0 > h/N$ для величины nr_0 , зависящий от степени растяжения h , ниже которого не может существовать решения, соответствующего распространившейся трещине. Число b_0 является функцией параметра растяжения h и при возрастании растяжения до величины, приводящей к выполнению неравенства

$$E(\eta) \leq E(h/N), \quad b_0 = h/N$$

Решение, соответствующее граничным условиям (2.6), (2.7) и (3.1), доставляет минимум функционалу (2.5), и поэтому оно является устойчивым, однако еще более низким минимумом является решение с граничными условиями (2.6), (2.7), (2.8), так как выполняется неравенство (2.11). Поэтому раскрывшаяся трещина представляет собой в этом случае метастабильную конфигурацию, отвечающую некоторому условному минимуму, и реальное ее возникновение в результате, например, тепловых флуктуаций маловероятно.

4. Пусть выполняется неравенство (2.12) (см. фиг. 6 и кривую b на фиг. 2) и пусть $nr_0 < \eta$. Для граничных условий вида (2.6), (2.7), (2.8) всегда существует экстремаль $y(x)$, соответствующая в плоскости yr участку BA сепаратрисы нижней полуплоскости. Эта экстремаль соответствует трещине, аналогичной изображенной на фиг. 3 для слабого растяжения. Однако здесь имеется существенное отличие от предыдущего случая. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае для каждого значения nr_0 из интервала $(h/N, b_1)$ (фиг. 6) существует не одно, а два решения системы дифференциальных уравнений (2.10). Одно соответствует в фазовой плоскости участку BA , второе участку EC_2BA сепаратрисы, проходящей через особую точку $(h/N, 0)$. Трещина, соответствующая участку интегральной кривой EC_2BA , имеет форму, указанную на фиг. 4. Эта трещина, так же как и рассмотренная в предыдущем пункте (фиг. 3), не приводит к понижению доли энергии взаимодействия, вызванной растяжением в области $x > 0$. Однако возникновение такой трещины существенно меняет ситуацию по сравнению с рассмотренной ранее. Рассмотрим по аналогии с работой [8] экстремали функционала (2.5), обращая внимание лишь на то, чтобы второй конец искомой экстремали лежал на прямой (2.8). Семейству таких экстремалей соответствуют все интегральные кривые из заштрихованной области на фиг. 6. Конкретный выбор той или иной интегральной кривой должен определяться некоторым параметром, например величиной отрезка $b = AC$ (фиг. 4, 6) или шириной R области искажения. Нетрудно установить однозначную зависимость между этими параметрами [7]. Действительно

$$R = \oint_{FCC_2H} \frac{dy}{P} \quad (4.1)$$

Интегрирование системы (2.10) дает

$$p(y) = (3\beta)^{-1/4} [E(y) - E(b)]^{1/4} \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1) и переходя от криволинейного интеграла к обычному, получаем

$$R(b) = 2(3\beta)^{1/4} \int_{nr_0}^b \frac{dy}{[E(y) - E(b)]^{1/4}} + (3\beta)^{1/4} \int_{n/N}^{nr_0} \frac{dy}{[E(y) - E(b)]^{1/4}} \quad (4.3)$$

Можно показать, что $R(b)$ является монотонно возрастающей функцией b .

Рассматривая экстремали соответственно для b_1, b_2, \dots , где $b_1 < b_2 < \dots$, или, что то же, для последовательности значений $R_1 < R_2 < \dots$, можно убедиться, что при этом соответствующие значения для функционала (2.5) убывают. Таким образом, возникновение трещины второго типа (фиг. 4) приводит к ее самопроизвольному распространению (распространяющаяся трещина). Так как распространяющейся трещине в фазовой плоскости yp (пунктир на фиг. 6) соответствует интегральная кривая, оканчивающаяся в точке $y = h/N$, $p = p_0 \neq 0$, то вершина трещины приобретает клиновидную форму с отличным от нуля углом раствора.

При распространении фронта трещины на один шаг (разрыв одной цепочки) выделяется энергия

$$\Delta V = E(h/N) - E(b) \quad (4.4)$$

которая, будучи отнесена к площади поперечного сечения цепочки, определяет собой конфигурационную силу [18]. Заметим, что $\Delta V = 0$, если вершина трещины имеет клиновидную форму с нулевым углом раствора, ибо тогда $b = b_1$ и $E(b) = E(h/N)$; если угол раствора отличен от нуля, то $\Delta V \neq 0$.

Понижение потенциальной энергии кристалла соответствует тому, что распространяющаяся трещина приводит к снятию напряжений, вызванных деформацией растяжения. Если распространение трещины наткнется на препятствие в виде какого-либо искажения кристаллической решетки, то образуется устойчивая трещина, частично снимающая напряжения, вызванные растяжением.

Вероятность возникновения распространяющейся трещины, так как она есть функция высоты некоторого энергетического барьера, повышается по мере роста числа nr_0 . Если $nr_0 > b_1$, то возможно возникновение только распространяющейся трещины. Число $b_1(\epsilon)$, таким образом, можно рассматривать как характеристику максимально возможного дислокационного клина в случае, если кристалл находится в состоянии растяжения ϵ . В следующем пункте будет дана численная оценка для величины $b_1(\epsilon)$ в некоторых частных случаях.

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, сравним полученные результаты о форме трещины с результатами работ [4.5], основывающихся на методах линейной теории упругости. В работах [4.5] для получения равновесной трещины потребовалось введение двух гипотез: 1) размеры концевой области трещины малы по сравнению с размерами всей трещины; 2) распределение смещений точек поверхностей трещины в концевой области не зависит от действующих нагрузок и для данного материала при данных условиях всегда одинаково (автономность концевой зоны). Важное значение в теории [4.5] имеет условие плавного смыкания противоположных поверхностей равновесной трещины.

Выше было отмечено, что второе условие (2.9), соответствующее условию плавного смыкания, будет достаточно для того, чтобы в кристалле образовалась равновесная трещина конечных размеров. (Этот же самый результат, очевидно, имеет место и для случая плоскосимметричной трещины, если выполнено условие (2.12) (см. [7]). Что касается гипотез [4.5], то в настоящей работе, а также в [7.8] не содержится ана-

логичных предположений. Более того, если в качестве концевой зоны рассматривать область d (фиг. 4), где смещения стенок трещины друг относительно друга не превосходят величины η' (абсцисса максимума функции $E(y)$ фиг. 2), то нетрудно показать, что как сама величина концевой зоны, так и смещения точек поверхностей трещины внутри нее являются функциями констант материала (A, B, μ, ν, β), степени растяжения (ϵ) и размеров кристалла в направлении растяжения (N). При этом для начальных стадий растяжения (относительно малые ϵ) может создаться такое положение, при котором размеры концевой зоны d сравнимы с размерами всей трещины $R - d$. С другой стороны, можно показать, что

$$d(R) = (3\beta)^{1/4} \int_{h/N}^{\eta'} \frac{dy}{[E(y) - E(b(R))]^{1/4}} \quad (4.5)$$

— убывающая функция и что для больших R зависимость смещений от параметров ϵ и N в концевой области трещины незначительна, следовательно, при больших R можно считать концевую зону малой и автономной. Таким образом, различные подходы к изучению структуры края равновесной трещины (линейный теоретико-упругостный и микроскопический с учетом нелинейности взаимодействия) приводят к аналогичным результатам, а именно, вершина равновесной трещины должна иметь клиновидную форму. Отличие состоит в том, что подвижно-равновесная трещина в рассматриваемой микроскопической модели может иметь клиновидную форму с отличным от нуля углом раствора (в теории [4,5] угол раствора вершины трещины всегда равен нулю).

Далее в рассматриваемой модели энергия кристалла монотонно убывает по мере роста трещины, поэтому силы взаимодействия атомов противоположных стенок, которые обеспечивают их сцепление, принципиально не могут служить стабилизирующим препятствием к ее распространению. Трещина может стабилизироваться лишь искажениями кристаллической решетки. Отсюда следует, что учета молекулярных сил сцепления недостаточно для изучения проблемы устойчивости микротрещин. Общая теория устойчивости трещин применительно к кристаллическим твердым телам должна включать в себя зависимость от степени искажения (наклеп) кристаллической решетки. Есть основания предполагать, что и модуль сцепления [4,5], если таковой существует как константа кристаллического материала, характеризуется не столько молекулярными силами сцепления, сколько искаженностью кристаллической решетки, например плотностью дислокаций.

Следует отметить, что для больших размеров трещины (порядка 10μ), для которых с успехом применимы методы теории упругости, применение микроскопической модели с учетом нелинейности взаимодействия в форме (1.1) перестает быть правомерным. По-видимому, рассматриваемые теории имеют различные области применимости.

5. Сравним значения толщины $b_1(\epsilon)$ дислокационного клина, приводящего к возникновению распространяющейся трещины, в зависимости от степени растяжения для различных материалов. Четыре параметра μ, ν, A, B характеризуют материал, растяжение задается величиной

$$\epsilon = h/h_0, \quad h_0 = N\rho_0 \quad (5.1)$$

а толщина дислокационного клина величиной $n r_0$, или просто n — количеством «лишних» атомных плоскостей.

Формулу (1.1) можно заменить эквивалентной

$$v(r) = \frac{U\nu\mu}{\nu - \mu} \left[-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\rho_0}{r}\right)^\mu + \frac{1}{\nu} \left(\frac{\rho_0}{r}\right)^\nu \right] \quad (5.2)$$

где вместо пары констант A и B вошли U и ρ_0 , равные соответственно энергии связи и постоянной решетки в направлении растяжения.

Для определения $b_1(\epsilon)$ из интегральных кривых $p = p(y)$ фазовой плоскости (y, p) в случае (2.12) следует выбрать ту (фиг. 6), которая проходит через точку $(h/N, 0)$. Корень уравнения $p(y) = 0$ отличный от $y = h/N$ и дает искомое $y = b_1(\epsilon)$.

Интегрирование системы (2.10) дает

$$p^4 = \frac{1}{3\beta} E(y) + C.$$

Так как $p = 0$ при $y = h/N$, то

$$0 = \frac{1}{3\beta} E(h/N) + C$$

и окончательно

$$p = (3\beta)^{-1/4} [E(y) - E(h/N)]^{1/4} \quad (5.3)$$

Число $b_1(\varepsilon)$ является, таким образом, корнем уравнения

$$E(y) - E(h/N) = 0 \quad (5.4)$$

Полагая

$$y \approx n\rho_0, \quad \frac{(h-y)}{N-1} = \frac{N\varepsilon\rho_0 - n\rho_0}{N-1}$$

и используя (5.2), уравнение (5.4) запишем в виде

$$-\frac{1}{\mu} n^{-\mu} + \frac{1}{\nu} n^{-\nu} + (N-1) \left[-\frac{1}{\mu} \left(\frac{N\varepsilon - n}{N-1} \right)^{-\mu} + \frac{1}{\nu} \left(\frac{N\varepsilon - n}{N-1} \right)^{-\nu} \right] - \left(-\frac{1}{\mu} \varepsilon^{-\mu} + \frac{1}{\nu} \varepsilon^{-\nu} \right) = 0 \quad (5.5)$$

Очевидно, что корни уравнения (5.5) зависят только от μ , ν , N , ε и не зависят от U и ρ_0 . Будем полагать поэтому в дальнейшем $U = 1$, $\rho_0 = 1$.

Уравнение (5.5) в общем случае разрешимо только численно. Найдем зависимость $b_1(\varepsilon)$ для следующих наборов параметров.

Таблица 1

ε	$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$
1.0009			62
1.0030		18	13
1.0090	7.4	5.3	5.3
1.0100	6.0	4.9	4.9

Таблица 2

ε	$D = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$
1.0009			41
1.0030		13	11
1.0090	5.3	4.4	4.4
1.0100	4.6	4.1	4.0

1. $\mu = 4$, $\nu = 7$ (согласно [19] это соответствует Cu, Al, Fe, Ni, Co). Следует заметить, что делаемые здесь указания на конкретные металлы носят условный характер, ибо учитывается лишь общая характеристика межатомного взаимодействия (крутизна, пологость $v(r)$) и не учитывается структура решетки.

2. $\mu = 3$, $\nu = 12$ (Pb); $N = 10^3$, 10^4 , 10^5 . Результаты приведены соответственно в табл. 1 и 2. Незаполненные места таблиц соответствуют растяжениям, удовлетворяющим неравенству (2.11) (трещина не распространяется).

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. В растянутом кристалле дислокация с большим вектором Бюргера препятствует захлопыванию трещины и делает ее устойчивой. Увеличение толщины клина приводит к распространению трещины. Чем больше растяжение, тем меньшей толщины требуется клин, приводящий к распространению трещины.

2. Число дислокаций, необходимое для образования распространяющейся трещины, даже при растяжении 0.1% не превосходит числа дислокаций в лавине, испускаемой одним источником Франка — Рида (10^2 — 10^3).

3. Существует масштабный эффект: чем меньше кристалл, тем больше должно быть растяжение, приводящее к возможности распространения трещины. (Так как механизм образования дислокационного клина не рассматривался, проводить сопоставление с экспериментальными данными о зависимости прочности при транскристаллитном разрушении от размера зерна нельзя, ибо вероятность образования клина сама может зависеть от величины зерна).

4. Критическое значение толщины дислокационного клина, обеспечивающего распространение трещины по кристаллу, зависит только от двух параметров μ и ν энергии взаимодействия $v(r)$. Для различных материалов, определяемых одними и теми же μ и ν , это критическое значение при одинаковом напряжении будет тем больше, чем больше модуль упругости.

Автор благодарит А. Н. Орлова за ряд указаний, сделанных при выполнении работы.

Поступила 30 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc., 1920, A 221, 163.
2. Mott N. F. Fracture of metals; theoretical consideration. Engineering, 1948, 165, 16.
3. Френкель Я. И. Теория обратимых и необратимых трещин в твердых телах. ЖТФ, 1952, т. 22, 1857.
4. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Докл. АН СССР, 1959, т. 127, 47.
5. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4, 3.
6. Орлов А. Н. Исследование устойчивости трещин в микроскопической модели кристалла. ФММ, 1959, т. 8, 481.
7. Плишкин Ю. М. О форме трещины в микроскопической модели кристалла. ФММ, 1960, т. 9, 178.
8. Плишкин Ю. М. О стабильности микротрещин в твердом теле. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, 564.
9. Stroh A. N. The formation of cracks as a result of plastic flow. Proc. Roy. Soc., 1954, A 223, 404.
10. Орлов А. Н., Плишкин Ю. М., Шепелева И. М. Условия равновесия цепочки атомов. ФММ, 1957, т. 4, 540.
11. Плишкин Ю. М. Исследование условий устойчивости одномерной модели кристалла. Тр. Ин-та физ. метал. АН СССР, 1959, вып. 22, 13.
12. Плишкин Ю. М. Условия равновесия одномерной модели бинарного сплава. Исслед. по жаропрочн. сплавам, 1959, т. 4, 102.
13. Ребиндер П. А. Физико-химические исследования процессов деформации твердых тел. Юбил. сб., посвященный 30-летию Великой Октябрьской социалистической революции. М., Изд-во АН СССР, 1947, ч. I, 533.
14. Stroh A. N. The cleavage of metal single crystals. Phil. Mag., 1958, 3, 597.
15. Cottrell A. H. Theory of brittle fracture in steel and similar metals. Trans. AIME, 1958, 212, 192.
16. Eshelby J. D., Frank F. C. & Nabarro F. R. N. The equilibrium of linear arrays of dislocations. Phil. Mag., 1951, 42, 351.
17. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
18. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech., 1957, 24, 361.
19. Firth R. On the equation of state for solids. Proc. Roy. Soc., 1944, 183, 87.