

УДК 519.245

## Оценка статистической погрешности при вычислении компонент скорости и температуры методом прямого статистического моделирования\*

М.Ю. Плотников<sup>1</sup>, Е.В. Шкарупа<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 1, Новосибирск, 630090

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: plotnikov@itp.nsc.ru (Плотников М.Ю.), sev@osmf.sccc.ru (Шкарупа Е.В.)

**Плотников М.Ю., Шкарупа Е.В.** Оценка статистической погрешности при вычислении компонент скорости и температуры методом прямого статистического моделирования // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 3. — С. 317–330.

Метод прямого статистического моделирования (ПСМ) в настоящее время широко применяется для решения задач динамики разреженного газа. При решении стационарных задач особенностью метода является использование зависимых выборочных значений случайных величин для вычисления макропараметров течения газа. В работе проведен теоретический анализ возможности использования аппарата статистической физики для оценки статистической погрешности метода ПСМ. Предложен простой способ приближенной оценки статистической погрешности при вычислении компонент скорости и температуры. Проведено тестирование разработанного подхода на примере ряда задач.

DOI: 10.15372/SJNM20160306

**Ключевые слова:** *прямое статистическое моделирование, статистическая погрешность, равновесная статистическая физика.*

**Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Evaluation of statistical error when calculating velocity and temperature components by the direct simulation Monte Carlo method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 3. — P. 317–330.

The direct simulation Monte Carlo method is now widely used to solve the problems of rarefied gas dynamics. While solving stationary problems a special feature of the method is using dependent sample values of random variables to calculate macroparameters of a gas flow. In this paper, the possibility of using the results of statistical physics to estimate the statistical error of the DSMC method is theoretically analyzed. A simple approach to approximate evaluating the statistical error while calculating components of the velocity and temperature is proposed. The approach is tested on a number of problems.

**Keywords:** *direct simulation Monte Carlo method, statistical error, equilibrium statistical physics.*

---

\*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты № 14-08-00534, № 15-01-00894, № 15-01-08988, № 16-01-00530).

## Введение

Метод прямого статистического моделирования (ПСМ) был разработан в начале 60-х годов прошлого столетия Г.А. Бердом для моделирования течений разреженного газа. Впоследствии он получил дальнейшее развитие, в частности были разработаны эффективные процедуры моделирования столкновений частиц (схема no-time-counter (NTC) [1] и метод мажорантной частоты [2]). В настоящее время, несмотря на развитие альтернативных подходов (см, например, [3, 4]), метод ПСМ сохраняет свои лидирующие позиции среди численных методов решения задач динамики разреженного газа. Он используется для решения задач в области высотной аэродинамики, лазерной абляции, газодинамического осаждения тонких пленок, вакуумных технологий, разреженной плазмы, для изучения различных проблем при образовании в газовой фазе кластеров и наночастиц, молекулярных пучков и т. д. (см., например, [5, 6]).

При использовании методов статистического моделирования важной характеристикой получаемых результатов является их статистическая погрешность. Обычно для оценки требуемого параметра, представимого в виде математического ожидания некоторой случайной величины  $\xi$ , производится суммирование независимых выборочных реализаций этой случайной величины. В этом случае, согласно центральной предельной теореме, статистическая погрешность определяется величиной среднеквадратического отклонения  $\sigma = \sqrt{\mathbf{V}\xi/K}$ , где  $\mathbf{V}\xi$  — дисперсия случайной величины, а  $K$  — число ее выборочных реализаций (см., например, [7]). При этом существенным является независимость суммируемых случайных величин.

В методе ПСМ при решении стационарных задач моделирование состоит из двух этапов: 1) моделирование начинается с некоторого начального распределения и продолжается до выхода на стационарное распределение; 2) после выхода на стационарное распределение насчитывается требуемое решение. Моделирование процесса до выхода на стационарное распределение обычно требует значительных вычислительных затрат, поэтому при решении стационарных задач пользуются свойством эргодичности процесса и производят суммирование выборочных значений вдоль одной траектории [5]. В этом случае суммируемые величины являются зависимыми.

К настоящему времени разработан ряд подходов к количественному оцениванию статистической погрешности метода ПСМ [8–11]. В работе [9] получены асимптотические (с уменьшением размера выборочных ячеек при фиксированном полном числе моделируемых частиц в области) формулы для дисперсий оценок метода ПСМ. В работе [8] на базе результатов равновесной статистической физики был предложен способ оценивания статистической погрешности при вычислении гидродинамических величин в алгоритмах, основанных на моделировании траекторий частиц. Он позволяет предсказывать уровень статистической погрешности практически без дополнительных вычислений. Дальнейшее развитие этот подход получил в работе [12]. Однако его применимость при расчете методом ПСМ течений разреженного газа с сильной неравновесностью вызывает сомнения (см., например, расчеты в работе [13]). В работах [10, 11] для оценки статистической погрешности было предложено использовать центральную предельную теорему для Марковских процессов [14, 15]. Такой подход применим к решению методом ПСМ задач с любой степенью неравновесности и при любой степени зависимости выборочных значений. Он позволяет строить верхние границы погрешности для оценок плотности, отдельных компонент скорости и температуры, однако требует дополнительных вычислений.

В представленной работе продолжен анализ возможности использования аппарата статистической физики для оценки статистической погрешности компонент скорости и температуры методом ПСМ. Предложен простой способ приближенной оценки статисти-

ческой погрешности при вычислении компонент скорости и температуры. Он позволяет практически без дополнительных вычислений оценить уровень статистической погрешности при любой степени зависимости выборочных значений. Тестирование было выполнено на примере классических задач Фурье и Куэтта, а также задачи о сверхзвуковом течении потока разреженного газа сквозь проницаемую преграду.

## 1. Статистические оценки метода ПСМ

В методе ПСМ моделируемый объем физического пространства разбивается на ячейки, и в каждой ячейке моделируется некоторое количество частиц. Непрерывный процесс движения и столкновений частиц расщепляется на два последовательных этапа: движение частиц в течение временного интервала  $\Delta t$  в соответствии с их скоростями и моделирование столкновений между частицами, соответствующих интервалу  $\Delta t$ . Временной шаг  $\Delta t$  выбирается малым в сравнении со средним временем между столкновениями частиц. На каждом временном шаге производится суммирование выборочных значений, необходимых для вычисления макропараметров течения газа.

Физические характеристики течения разреженного газа, такие как числовая плотность  $n$ , скорость  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  и температура  $T$ , являются функционалами функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ :

$$n(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

$$u_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(\mathbf{r})} \int v_i f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad RT_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(\mathbf{r})} \int v_i^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} - u_i^2(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$  — пространственная переменная,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  — скорость,  $v_i$  —  $i$ -я компонента  $\mathbf{v}$ ,  $R$  — газовая постоянная. Отметим, что размерность физического пространства не имеет принципиального значения и может принимать значения  $d = 1, 2, 3$ , а скорости частиц трехмерны. Полная температура течения в некоторой точке области складывается из трех координатных компонент  $T = (T_1 + T_2 + T_3)/3$ .

Пусть  $W$  — состояние системы  $N$  частиц, определяемое вектором их пространственных координат и скоростей  $W = (\mathbf{r}^1, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{r}^N, \mathbf{v}^N)$ . Тогда в стационарном случае физические характеристики течения разреженного газа представимы в виде:

$$n(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}\xi(W),$$

$$u_i(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{E}\eta_i(W)}{\mathbf{E}\xi(W)}, \quad RT_i(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{E}\zeta_i(W)}{\mathbf{E}\xi(W)} - \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i(W)}{\mathbf{E}\xi(W)} \right)^2, \quad (1.1)$$

$$\xi(W) = \frac{1}{\Delta\mathbf{r}} \sum_{l=1}^N h(\mathbf{r}^l), \quad \eta_i(W) = \frac{1}{\Delta\mathbf{r}} \sum_{l=1}^N h(\mathbf{r}^l) v_i^l, \quad \zeta_i(W) = \frac{1}{\Delta\mathbf{r}} \sum_{l=1}^N h(\mathbf{r}^l) (v_i^l)^2,$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\mathbf{E}\xi(W)$ ,  $\mathbf{E}\eta_i(W)$ ,  $\mathbf{E}\zeta_i(W)$  — математические ожидания случайных величин  $\xi(W)$ ,  $\eta_i(W)$ ,  $\zeta_i(W)$ , которые являются функциями от состояния  $N$ -частичной системы,  $\Delta\mathbf{r}$  — мера выборочной ячейки,  $h(\mathbf{r})$  — индикатор выборочной ячейки,  $v_i^l$  —  $i$ -я компонента скорости частицы с номером  $l$ .

Заметим, что случайные величины  $\xi(W)$ ,  $\eta_i(W)$ ,  $\zeta_i(W)$  соответствуют трем базовым механическим переменным в ячейке, а именно мгновенным плотностям массы, импульса и кинетической энергии. Таким образом, гидродинамические переменные, такие как скорость и температура, выражаются через механические переменные.

Основу метода ПСМ для стационарных задач составляет предположение об эргодичности рассматриваемого процесса, поэтому математические ожидания в формулах (1.1) оцениваются осреднением значений функций  $\xi(W)$ ,  $\eta_i(W)$ ,  $\zeta_i(W)$  от состояния  $N$ -частичной системы, взятых через равные интервалы времени  $\Delta t$ . Пусть  $W_k$  обозначает состояние  $N$ -частичной системы в момент времени  $t_k = k\Delta t$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Тогда  $W_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , — стационарный марковский процесс с дискретным временем и пространством состояний  $\mathbf{W}$  размерности  $(d+3)N$ , а оценки макропараметров имеют вид:

$$n(\mathbf{r}) \approx \tilde{\xi}_K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi(W_k), \quad (1.2)$$

$$u_i(\mathbf{r}) \approx \tilde{\chi}_{i,K} = \frac{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \eta_i(W_k)}{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi(W_k)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

$$RT_i(\mathbf{r}) \approx \tilde{\vartheta}_{i,K} = \frac{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \zeta_i(W_k)}{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi(W_k)} - \left( \frac{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \eta_i(W_k)}{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \xi(W_k)} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

## 2. Подходы к оценке статистической погрешности

### 2.1. Использование результатов равновесной статистической физики

В работе [8] для оценивания дисперсий оценок (1.2)–(1.4) были использованы формулы [16] для флуктуаций термодинамических величин в предположении, что система находится в состоянии термодинамического равновесия. После соответствующего переобозначения выражения для дисперсий оценок макропараметров имеют вид:

$$\mathbf{V}\tilde{\xi}_K \approx \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta \mathbf{r}} n(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{V}\tilde{\chi}_{i,K} \approx \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta \mathbf{r}} \frac{RT_i(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})}, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{V}\tilde{\vartheta}_{i,K} \approx \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta \mathbf{r}} \frac{2R^2T^2(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})}. \quad (2.3)$$

Отметим, что формулы, аналогичные формулам (2.1) и (2.2), получены также в работе [9] с использованием теоремы об асимптотически несмещенных оценках и асимптотики по  $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$  при фиксированном полном числе моделируемых частиц. В формулах (2.1)–(2.3) для вычисления дисперсий требуются только значения числовой плотности и полной температуры, поэтому этот подход не требует дополнительных вычислений. Они применимы, если выборочные значения можно считать независимыми. Здесь формула (2.3) соответствует оценке полной температуры. Поскольку подход из работы [8] опирается на законы равновесной статистической физики, возникает сомнение в корректности его использования при расчетах методом ПСМ неравновесных течений разреженного газа. Однако численные эксперименты показали применимость подхода для приближенной оценки статистической погрешности и в случае неравновесных течений [13].

## 2.2. Использование центральной предельной теоремы для однородных цепей Маркова

Из общей теории методов Монте-Карло известно [17], что оценки вида  $Q(\tilde{\gamma}_{1,K}, \dots, \tilde{\gamma}_{b,K})$ , где  $Q(x_1, \dots, x_b)$  — рациональная функция,  $\tilde{\gamma}_{j,K} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \gamma_j^k$ , а  $\gamma_j^k$  — независимые реализации случайных величин  $\gamma_j$ , являются асимптотически несмещенными. Такие оценки при больших  $K$  имеют асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием  $Q(\mathbf{E}\gamma_1, \dots, \mathbf{E}\gamma_b)$  и дисперсией [17]:

$$\mathbf{V}Q(\tilde{\gamma}_{1,K}, \dots, \tilde{\gamma}_{b,K}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^b F_i F_j \text{cov}(\gamma_i \gamma_j), \quad (2.4)$$

где  $\text{cov}(\gamma_i \gamma_j) = \mathbf{E}\gamma_i \gamma_j - \mathbf{E}\gamma_i \mathbf{E}\gamma_j$ ,  $F_i$  — частная производная  $\frac{\partial}{\partial x_i} Q(x_1, \dots, x_b)$  в точке  $x_j = \mathbf{E}\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, b$ .

Пусть  $\{\gamma_j(W)\}$  обозначает совокупность случайных функций  $\xi(W)$ ,  $\eta_i(W)$ ,  $\zeta_i(W)$ , в общем виде задаваемых формулой

$$\gamma_j(W) = \frac{1}{\Delta \mathbf{r}} \sum_{l=1}^N h(\mathbf{r}^l) \varphi_j(\mathbf{v}^l).$$

Тогда оценки макропараметров газа (1.2)–(1.4) тоже имеют общий вид  $Q(\tilde{\gamma}_{1,K}, \dots, \tilde{\gamma}_{b,K})$ , однако реализации случайных функций  $\gamma_j(W_K)$  не являются независимыми.

В работе [10] рассматривался асимптотический (при  $K \rightarrow \infty$ ) доверительный интервал для оценки числовой плотности (1.2), построенный на основе центральной предельной теоремы для однородных цепей Маркова [14, 15]:

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \tilde{\xi}_K - \mathbf{E}\xi \right| \leq H_\varepsilon \frac{\sigma_\xi}{\sqrt{K}} \right\} \geq 1 - \varepsilon. \quad (2.5)$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  — малая величина, а константа  $H_\varepsilon > 0$  определяется вероятностью  $1 - \varepsilon$  через функцию стандартного нормального распределения  $\Phi_{0,1}$ . Например,  $H_\varepsilon \approx 3$  при  $\varepsilon = 0.003$  (известное правило “три сигма”),  $H_\varepsilon \approx 2$  при  $\varepsilon = 0.05$  (см., например, [7]). Величина  $\sigma_\xi$  определяется по формуле

$$\sigma_\xi^2 = \mathbf{V}\xi \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{\xi,k} \right), \quad (2.6)$$

где  $\rho_{\xi,k} = \frac{1}{\mathbf{V}\xi} \mathbf{E}(\xi(W_1) - \mathbf{E}\xi)(\xi(W_{1+k}) - \mathbf{E}\xi)$  — корреляционная последовательность стационарного Марковского процесса  $\xi(W_k)$ , а  $\mathbf{E}\xi$ ,  $\mathbf{V}\xi$  — его математическое ожидание и дисперсия.

При достаточно широких условиях для стационарного Марковского процесса  $W_k \subset \mathbf{W}$  и измеримой вещественной функции  $\xi$  на  $\mathbf{W}$  существует  $0 < \varrho_\xi < 1$  такое, что выполнено неравенство  $|\rho_{\xi,k}| \leq \varrho_\xi^k$  [15], т. е. корреляции убывают экспоненциально. Их сумма (величина  $\tau_\xi = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{\xi,k}$ ) называется временем корреляции стационарного случайного процесса  $\xi(W_k)$ . Она характеризует временной интервал, в течение которого сохраняется некоторая зависимость между состояниями процесса. Таким образом, величина статистической погрешности определяется дисперсией стационарного случайного процесса  $\xi(W_k)$  и величиной  $\tau_\xi$ , характеризующей вероятностную зависимость его значений. Для оценки  $\sigma_\xi^2$  можно использовать следующее неравенство:

$$\sigma_{\xi}^2 = \mathbf{V}\xi 2\tau_{\xi} \leq \mathbf{V}\xi \frac{1 + \rho_{\xi}}{1 - \rho_{\xi}}. \quad (2.7)$$

Здесь константу  $\rho_{\xi}$  можно оценивать, вычисляя выборочный коэффициент корреляции  $\rho_{\xi,1}$ , либо использовать приближенную аналитическую формулу (см. пункт 2.3). Численные эксперименты [18] показали, что в большинстве случаев коэффициент корреляции  $\rho_{\xi,1}$  больше коэффициентов корреляции  $\rho_{\eta_i,1}$  и  $\rho_{\zeta_i,1}$ . Поэтому можно ожидать, что для большинства задач константа  $\rho_{\xi}$ , оцениваемая по коэффициенту корреляции  $\rho_{\xi,1}$ , может применяться и при построении верхней грани вида (2.7) для величин  $\tau_{\eta_i}$ ,  $\tau_{\zeta_i}$ .

Для оценок компонент скорости (1.3) и температуры (1.4) асимптотические доверительные интервалы, построенные на основе центральной предельной теоремы для однородных цепей Маркова, представлены в работе [11]. Для простоты и единообразия приведем полученные результаты в виде дисперсий оценок:

$$\mathbf{V}\tilde{\chi}_K = \frac{1}{K} \mathbf{V}\xi 2\tau_{\xi}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{V}\tilde{\chi}_{i,K} = \frac{1}{K} \frac{1}{\mathbf{E}^2\xi} \left( \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 \mathbf{V}\xi 2\tau_{\xi} + \mathbf{V}\eta_i 2\tau_{\eta_i} - 2 \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \operatorname{cov}(\xi\eta_i) 2\sqrt{\tau_{\xi}\tau_{\eta_i}} \right), \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\tilde{\vartheta}_{i,K} = \frac{1}{K} \frac{1}{\mathbf{E}^2\xi} \left( \left( \frac{\mathbf{E}\zeta_i}{\mathbf{E}\xi} - 2 \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 \right)^2 \mathbf{V}\xi 2\tau_{\xi} + 4 \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 \mathbf{V}\eta_i 2\tau_{\eta_i} + \right. \\ \left. \mathbf{V}\zeta_i 2\tau_{\zeta_i} + 4 \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \left( \frac{\mathbf{E}\zeta_i}{\mathbf{E}\xi} - 2 \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 \right) \operatorname{cov}(\xi\eta_i) 2\sqrt{\tau_{\xi}\tau_{\eta_i}} - \right. \\ \left. 2 \left( \frac{\mathbf{E}\zeta_i}{\mathbf{E}\xi} - 2 \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 \right) \operatorname{cov}(\xi\zeta_i) 2\sqrt{\tau_{\xi}\tau_{\zeta_i}} - 4 \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \operatorname{cov}(\eta_i\zeta_i) 2\sqrt{\tau_{\eta_i}\tau_{\zeta_i}} \right). \quad (2.10) \end{aligned}$$

Здесь  $\tau_{\eta_i}$  и  $\tau_{\zeta_i}$  — времена корреляции процессов  $\eta_i(W_k)$  и  $\zeta_i(W_k)$ . Легко заметить, что выражения (2.8)–(2.10) имеют общий вид

$$\mathbf{V}Q(\tilde{\gamma}_{1,K}, \dots, \tilde{\gamma}_{b,K}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^b F_i F_j \operatorname{cov}(\gamma_i \gamma_j) 2\sqrt{\tau_{\gamma_i} \tau_{\gamma_j}}, \quad (2.11)$$

где  $\tau_{\gamma_i}$  — время корреляции стационарного случайного процесса  $\gamma_i(W_k)$ . Эта формула является аналогом формулы (2.4) для случая зависимых реализаций.

Подход, основанный на центральной предельной теореме для однородных цепей Маркова, построен при наиболее общих предположениях, но требует дополнительно вычислять выборочные дисперсии и ковариации случайных величин  $\xi(W)$ ,  $\eta_i(W)$ ,  $\zeta_i(W)$ . Так как он позволяет оценивать статистическую погрешность метода ПСМ при любой степени зависимости выборочных значений и для задач любой степени неравновесности, то далее будем его использовать в численных экспериментах для верификации предлагаемого приближенного способа оценки.

### 2.3. Способ оценки временной корреляции

Для учета временной зависимости в работе [19] была получена приближенная аналитическая оценка корреляции  $\rho_{\xi,1}$ . Пусть  $p$  — математическое ожидание отношения числа

частиц, которые остались в выбранной ячейке после перемещения частиц за один временной шаг, к числу частиц, которые находились в ячейке до перемещения. В работе [19] было показано, что асимптотически при  $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$  коэффициент корреляции  $\rho_{\xi,1}$  близок к  $p$ .

Математическое ожидание  $p$  доли частиц, оставшихся в ячейке после временного шага  $\Delta t$ , оценивалось при выполнении следующих двух условий: 1) частицы равномерно распределены в ячейке, и функция распределения частиц по скоростям пространственно однородна в ячейке; 2) функция распределения частиц по скоростям является максвелловской функцией распределения, т. е.

$$f(\mathbf{v}) = f_1(v_1)f_2(v_2)f_3(v_3), \quad f_i(v_i) = \frac{\beta_i}{\sqrt{\pi}} \exp(-\beta_i^2(v_i - u_i)^2), \quad \beta_i = \frac{1}{\sqrt{2RT_i}}.$$

Было получено следующее аналитическое выражение для  $p$ :

$$p = \frac{1}{8} \prod_{i=1,2,3} \left\{ \frac{s_i + \beta_i u_i}{s_i} \operatorname{erf}(s_i + \beta_i u_i) + \frac{s_i - \beta_i u_i}{s_i} \operatorname{erf}(s_i - \beta_i u_i) - \frac{2\beta_i u_i}{s_i} \operatorname{erf}(\beta_i u_i) + \frac{1}{s_i \sqrt{\pi}} \exp(-(s_i + \beta_i u_i)^2) + \frac{1}{s_i \sqrt{\pi}} \exp(-(s_i - \beta_i u_i)^2) - \frac{2}{s_i \sqrt{\pi}} \exp(-\beta_i^2 u_i^2) \right\}, \quad (2.12)$$

где  $h$  — линейный размер квадратной ячейки,  $s_i = \beta_i h / \Delta t$ , а  $\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-x^2} dx$  — функция ошибок. При необходимости несложно выписать подобные формулы для случая ячеек с разными шагами сетки по координатам.

### 3. Прямое оценивание в состоянии термодинамического равновесия

Работа [12] позволяет проследить интересную взаимосвязь между статистической погрешностью оценок метода ПСМ и флуктуациями физических величин в состоянии термодинамического равновесия. Сама работа посвящена исследованию смещения различных оценок гидродинамических переменных в алгоритмах, основанных на моделировании движения частиц. В частности, в ней представлена методика прямого оценивания средних значений и дисперсий гидродинамических и механических переменных в состоянии термодинамического равновесия. Воспользуемся ею, чтобы получить формулы для дисперсий оценок отдельных компонент скорости и температуры, аналогичные формуле (2.3) для полной температуры.

Кратко опишем эту методику. Вводятся вероятностные распределения для частиц газа в предположении, что они независимы, а именно, вероятность того, что частица имеет скорость  $\mathbf{v}$ , равна  $P(\mathbf{v})$ , и вероятность того, что ячейка содержит  $L$  частиц, —  $P(L)$ . Тогда математическое ожидание некоторой функции от состояния системы  $\gamma$ , относящейся к выбранной ячейке, может быть записано в виде интеграла

$$\mathbf{E}\gamma = \sum_{L=0}^{\infty} \int \gamma(L, \mathbf{v}^1 \dots \mathbf{v}^L) P(L) P(\mathbf{v}^1) \dots P(\mathbf{v}^L) d\mathbf{v}^1 \dots d\mathbf{v}^L.$$

Кроме того, предполагается, что скорости частиц имеют максвелловское распределение со средним  $\mathbf{E}v_i = u_i$  и дисперсией  $\mathbf{E}(v_i - \mathbf{E}v_i)^2 = RT_i$ .

Используя способ прямого оценивания средних значений, можно получить следующие приближенные формулы для дисперсий и корреляций случайных величин  $\xi(W)$ ,  $\eta_i(W)$ ,  $\zeta_i(W)$ , необходимых для вычисления дисперсий оценок макропараметров по формулам (2.9), (2.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\eta_i &= \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 \mathbf{V}\xi + \frac{\mathbf{E}\xi - RT_i}{\Delta\mathbf{r}}, \\ \mathbf{V}\zeta_i &= \left( \frac{\mathbf{E}\zeta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 \mathbf{V}\xi + 4 \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 \frac{\mathbf{E}\xi RT_i}{\Delta\mathbf{r}} + \frac{2\mathbf{E}\xi R^2 T_i^2}{\Delta\mathbf{r}}, \\ \text{cov}(\xi\eta_i) &= \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \mathbf{V}\xi, \quad \text{cov}(\xi\zeta_i) = \frac{\mathbf{E}\zeta_i}{\mathbf{E}\xi} \mathbf{V}\xi, \quad \text{cov}(\eta_i\zeta_i) = \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \frac{\mathbf{E}\zeta_i}{\mathbf{E}\xi} \mathbf{V}\xi + 2 \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \frac{\mathbf{E}\xi RT_i}{\Delta\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулы (2.9), (2.10), получим

$$\mathbf{V}\tilde{\chi}_{i,K} = \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta\mathbf{r}} \frac{RT_i}{\mathbf{E}\xi} 2\tau_{\eta_i} + \frac{1}{K} \frac{\mathbf{V}\xi}{\mathbf{E}^2\xi} \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 (\sqrt{2\tau_\xi} - \sqrt{2\tau_{\eta_i}})^2, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\tilde{\vartheta}_{i,K} &= \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta\mathbf{r}} \frac{2R^2 T_i^2}{\mathbf{E}\xi} 2\tau_{\zeta_i} + \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta\mathbf{r}} \frac{4RT_i}{\mathbf{E}\xi} \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 (\sqrt{2\tau_{\eta_i}} - \sqrt{2\tau_{\zeta_i}})^2 + \\ &\frac{1}{K} \frac{\mathbf{V}\xi}{\mathbf{E}^2\xi} \left( \left( \frac{\mathbf{E}\zeta_i}{\mathbf{E}\xi} - \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 \right) \sqrt{2\tau_\xi} + 2 \left( \frac{\mathbf{E}\eta_i}{\mathbf{E}\xi} \right)^2 \sqrt{2\tau_{\eta_i}} - \frac{\mathbf{E}\zeta_i}{\mathbf{E}\xi} \sqrt{2\tau_{\zeta_i}} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Теперь, учитывая представление (1.1) и  $\mathbf{V}\xi = \frac{\mathbf{E}\xi}{\Delta\mathbf{r}}$ , получим приближенные выражения для дисперсий оценок компонент скорости и температуры через макропараметры, аналогичные формулам (2.2), (2.3), но с учетом зависимости выборочных значений:

$$\mathbf{V}\tilde{\chi}_{i,K} \approx \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta\mathbf{r}} \frac{1}{n(\mathbf{r})} \left( RT_i(\mathbf{r}) 2\tau_{\eta_i} + u_i^2(\mathbf{r}) (\sqrt{2\tau_\xi} - \sqrt{2\tau_{\eta_i}})^2 \right), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\tilde{\vartheta}_{i,K} &\approx \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta\mathbf{r}} \frac{1}{n(\mathbf{r})} \left( 2R^2 T_i^2(\mathbf{r}) 2\tau_{\zeta_i} + 4RT_i(\mathbf{r}) u_i^2(\mathbf{r}) (\sqrt{2\tau_{\eta_i}} - \sqrt{2\tau_{\zeta_i}})^2 + \right. \\ &\left. \left( (RT_i(\mathbf{r}) - u_i^2(\mathbf{r})) \sqrt{2\tau_\xi} + 2u_i^2(\mathbf{r}) \sqrt{2\tau_{\eta_i}} - (RT_i(\mathbf{r}) + u_i^2(\mathbf{r})) \sqrt{2\tau_{\zeta_i}} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Можно заметить, что в случае независимости выборочных значений ( $2\tau_\xi = 2\tau_{\eta_i} = 2\tau_{\zeta_i} = 1$ ), остаются только первые слагаемые в формулах (3.3), (3.4), а остальные члены обращаются в нуль, и структура полученных формул совпадает с формулами (2.2), (2.3) с той разницей, что для дисперсий оценок  $i$ -х компонент скорости и температуры используется  $T_i$  вместо полной температуры:

$$\mathbf{V}\tilde{\chi}_{i,K} \approx \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta\mathbf{r}} \frac{RT_i(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{V}\tilde{\vartheta}_{i,K} \approx \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta\mathbf{r}} \frac{2R^2 T_i^2(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})}. \quad (3.5)$$

В случае, когда времена корреляции у процессов  $\xi(W_k)$ ,  $\eta_i(W_k)$  и  $\zeta_i(W_k)$  близки, дополнительные члены в формулах (3.3), (3.4) малы. Поэтому, учитывая формулу (2.7) и приближение для коэффициента корреляции  $\rho_{\xi,1} \approx p$ , можно предложить следующий простой метод для приближенного вычисления дисперсий оценок компонент скорости и температуры в случае зависимости выборочных значений:

$$\mathbf{V}\tilde{\chi}_{i,K} \approx \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta \mathbf{r}} \frac{RT_i(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \frac{1+p}{1-p}, \quad \mathbf{V}\tilde{\vartheta}_{i,K} \approx \frac{1}{K} \frac{1}{\Delta \mathbf{r}} \frac{2R^2T_i^2(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \frac{1+p}{1-p}, \quad (3.6)$$

где  $p$  вычисляется по аналитической формуле (2.12).

## 4. Численные эксперименты

Тестирование проводилось на примере классических задач Фурье и Куэтта, а также задачи о сверхзвуковом течении плоскопараллельного потока разреженного газа сквозь пористую преграду. При описании течений использовалась прямоугольная система координат  $XYZ$ . Для описания закона взаимодействия частиц между собой использовалась модель твердых сфер [5]. В ходе расчетов вычислялись макропараметры течения: плотность, компоненты скорости и температуры по направлениям  $(n, v_x, v_y, v_z, T_x, T_y, T_z)$ .

Для вычисления полученной статистической погрешности вместо неизвестного точного решения использовалось численное решение, рассчитанное с заведомо большей точностью. Отметим, что при проведении тестовых расчетов использовался тот же набор параметров процесса моделирования (число частиц  $N$ , число ячеек  $M$ , шаг по времени  $\Delta t$ ), что и при вычислении решений с большой точностью. Это было сделано для того, чтобы исключить из анализа погрешность дискретизации процесса моделирования (см. более подробно в [18]). Также в расчетах применялась методика “разреженных отсчетов”, т. е. выборка для вычисления макропараметров производилась не на каждом временном шаге, а через каждые  $J$  шагов [10]. Это позволило снизить трудоемкость для достижения необходимого уровня статистической погрешности вследствие уменьшения зависимости выборочных значений [10].

Моделирование было выполнено для трех одномерных течений, типичных для динамики разреженного газа: задача Фурье при выбранном наборе параметров характеризуется большим градиентом плотности и температуры (см., например, [13]); в задаче Куэтта моделируется течение газа с значительным градиентом скорости; сверхзвуковое течение характеризуется движением частиц с большой скоростью в заданном направлении.

### 4.1. Постановка задач

**Задачи Фурье и Куэтта.** Задача Фурье — классическая задача о теплопередаче между двумя бесконечными параллельными пластинами. Пусть газ со средней числовой плотностью  $n_0$  и массой частиц  $m$  заключен между двумя бесконечными пластинами, расположенными в плоскостях  $z = 0$  и  $z = H$ . Температуры пластин  $T_{p1}$  и  $T_{p2}$  постоянны. Предполагается, что отражение частиц от пластин является диффузным с полной аккомодацией энергии и импульса. Для приведения задачи к безразмерному виду использовались следующие величины: числовая плотность  $n_0$ , средняя длина свободного пробега частиц в газе  $L = (\sqrt{2} \pi d_p^2 n_0)^{-1}$  (здесь  $d_p$  — диаметр частицы), температура  $T_{p1}$  и наиболее вероятная тепловая скорость газа  $c_m = \sqrt{2kT_{p1}/m}$  (здесь  $k$  — постоянная Больцмана). После перехода к безразмерным переменным задача определяется только отношением температур  $T_{p2}/T_{p1}$  и числом Кнудсена  $\text{Kn} = L/H$ .

Задача Куэтта отличается от задачи Фурье тем, что пластины движутся вдоль оси  $Y$  с заданными скоростями  $u_{p1}$  и  $u_{p2}$ , а температуры пластин равны  $T_{p1} = T_{p2} = 1$ .

**Сверхзвуковое течение разреженного газа сквозь пористую преграду.** Пусть задан невозмущенный в начальный момент времени сверхзвуковой поток одно-

атомного газа с поступательной температурой  $T_0$ , числом Маха  $Ma$  и плотностью  $n_0$ , направленный к проницаемой преграде. Поток течет вдоль оси  $Z$ , а оси  $X$  и  $Y$  перпендикулярны течению. Проницаемая преграда нулевой толщины представляет собой плоскую поверхность, расположенную перпендикулярно течению. Будем полагать, что в сечении  $z = 0$  расположена плоскость источника потока, в сечении  $z = z_p$  — проницаемая преграда, а в сечении  $z = z_e$  — полностью поглощающая поверхность. При достижении сечения  $z = z_p$  частица с вероятностью  $q$  пролетает сквозь преграду без столкновения, а с вероятностью  $(1 - q)$  взаимодействует с поверхностью преграды. Величина  $q$  в этом случае играет роль геометрической проницаемости преграды. Взаимодействие частиц с поверхностью преграды описывается моделью диффузного отражения: частицы диффузно отражаются от поверхности с энергией, соответствующей температуре преграды  $T_p$ . Если частица возвращается на плоскость источника, то она поглощается. Длина свободного пробега  $L$  определяется по плотности  $n_0$ . Для приведения задачи к безразмерному виду в качестве характерных величин были приняты числовая плотность  $n_0$ , длина свободного пробега  $L$ , температура  $T_0$  и наиболее вероятная тепловая скорость частиц при температуре  $T_0$ . При этом задача определяется следующими параметрами: начальным числом Маха  $Ma$ , отношением температур  $T_p/T_0$  и вероятностью взаимодействия частицы с проницаемой преградой  $q$ .

#### 4.2. Численные результаты

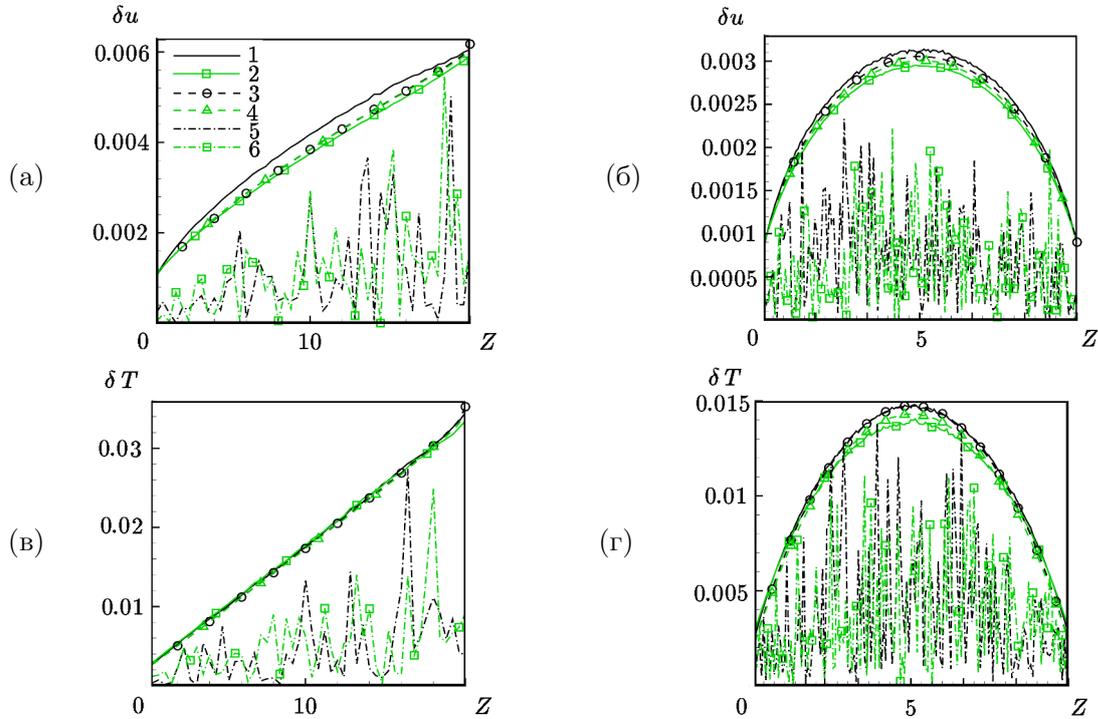
Численные эксперименты были выполнены для следующих наборов параметров:

- задача Фурье:  $Kn = 0.05$ ,  $T_{p2}/T_{p1} = 9$ ,  $M = 50$ ,  $N = 250$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $J = 50$ ,  $K = 4 \cdot 10^5$ ;
- задача Куэтта:  $Kn = 0.05$ ,  $u_{p2} = -u_{p1} = 4$ ,  $M = 150$ ,  $N = 1500$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $J = 50$ ,  $K = 4 \cdot 10^5$ ;
- сверхзвуковое течение:  $T_p/T_0 = 10$ ,  $Ma = 2$ ,  $q = 0.98$ ,  $z_e/L = 40$ ,  $M = 150$ ,  $N = 1400$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $J = 100$ ,  $K = 10^5$ .

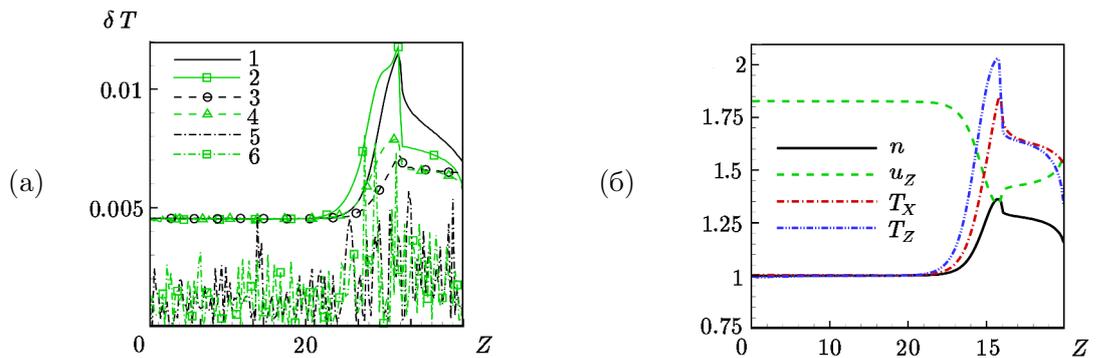
На рисунке 1 представлены пространственные распределения доверительных интервалов и статистических погрешностей для оценок компонент скорости (а) и (б) и температуры (в) и (г): для задач Фурье — (а), (в), для Куэтта — (б), (г). Для оценок компонент скорости  $u_X$  и  $u_Z$  на рис. 1(а) и 1(б) кривые 1 и 2 соответствуют доверительным интервалам, построенным на основе центральной предельной теоремы (ЦПТ); кривые 3 и 4 — доверительным интервалам, построенным приближенным методом (3.6); кривые 5 и 6 — статистической погрешности (модуль разности между полученным и “точным” решениями). На рис. 1(в) и 1(г) для оценок компонент температуры  $T_X$  и  $T_Z$  используются аналогичные обозначения кривых. Можно констатировать, что приближенные доверительные интервалы близки к доверительным интервалам, построенным на основе ЦПТ, а статистическая погрешность не выходит за уровни доверительных интервалов.

На рис. 2(а) представлены пространственные распределения доверительных интервалов и статистических погрешностей оценок компонент температуры для задачи о сверхзвуковом течении газа через проницаемую преграду. Используются аналогичные (как на рис. 1) обозначения кривых. На рис. 2(б) представлено пространственное распределение плотности, скорости  $u_Z$  и компонент температуры  $T_X$  и  $T_Z$  для “точного” решения. Область течения можно разбить на две части: зона невозмущенного течения (до  $z = 22$ ) и зона существенно неравновесного течения, включающая область ударного возмущения до и после преграды. Можно видеть (рис. 2(а)), что в области невозмущенного течения доверительные интервалы, построенные разными способами, практически совпадают, и статистическая погрешность не выходит за уровни доверительных интервалов. В области существенной неравновесности доверительный интервал, построенный на основе

ЦПТ проходит значительно выше, чем приближенный доверительный интервал. С нашей точки зрения это связано с существенным отклонением в данной области функции распределения частиц от локально-максвелловской.



**Рис. 1.** Задача Фурье (а), (в), задача Куэтта (б), (г): доверительные интервалы для оценок  $u_X$  ( $T_X$ ) и  $u_Z$  ( $T_Z$ ), построенные на основе ЦПТ (кривые 1 и 2 соответственно) и приближенным методом (кривые 3 и 4), статистическая погрешность оценок  $u_X$  ( $T_X$ ) и  $u_Z$  ( $T_Z$ ) (кривые 5 и 6)



**Рис. 2.** Сверхзвуковое течение через проницаемую преграду: (а) — доверительные интервалы для оценок  $T_X$  и  $T_Z$ , построенные на основе ЦПТ (кривые 1 и 2 соответственно) и приближенным методом (кривые 3 и 4), статистическая погрешность оценок  $T_X$  и  $T_Z$  (кривые 5 и 6); (б) — “точное” решение

Проведенные теоретический и численный анализы позволяют говорить о возможности использования для оценки статистической погрешности при вычислении методом ПСМ компонент скорости и температуры приближенных формул (3.5), в случае независимых выборочных значений, и (3.6), в случае зависимых выборочных значений, для широкого класса задач динамики разреженного газа. Однако при наличии зоны существенной неравновесности более корректно использование доверительных интервалов, построенных на основе ЦПТ.

## 5. Заключение

В работе проведен анализ возможности использования аппарата равновесной статистической физики для оценки статистической погрешности метода ПСМ при решении задач динамики разреженного газа. Предложен метод приближенной оценки статистической погрешности вычисления компонент скорости и температуры, который не требует дополнительных вычислений и применим в случае вероятностной зависимости выборочных значений. Проведено тестирование предложенного подхода на примерах классических задач Фурье и Куэтта, а также задачи о сверхзвуковом течении потока разреженного газа сквозь проницаемую преграду. Теоретический и численный анализы продемонстрировали применимость приближенных формул для оценки статистической погрешности вычисления компонент скорости и температуры для широкого класса задач динамики разреженного газа, исключая зоны существенной неравновесности, где более корректно использование доверительных интервалов, построенных на основе центральной предельной теоремы и требующих дополнительных вычислений.

## Литература

1. **Bird G.A.** Perception of numerical methods in rarefied gasdynamics // 118: Proc. of 16-th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics / E.P. Muntz, D.P. Weaver, and D.H. Campbell.— Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1989.— P. 211–226.
2. **Ivanov M.S., Rogasinsky S.V.** Analysis of the numerical techniques of the direct simulation Monte Carlo method in the rarefied gas dynamics // Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling.— 1988.— Vol. 3, № 6.— P. 453–465.
3. **Титарев В.А., Шахов Е.М.** Эффективный метод решения задачи о течении разреженного газа в плоском канале большой конечной длины // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.— 2012.— Т. 52, № 2.— С. 288–303.
4. **Черемисин Ф.Г.** Решение кинетического уравнения Больцмана для высокоскоростных течений // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.— 2006.— Т. 46, № 2.— С. 329–343.
5. **Bird G.A.** Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows.— Oxford: Clarendon Press, 1994.
6. 1628: Proc. of 29-th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Xi'an, China, July 13–18, 2014. / J. Fan // AIP Conf. Proc.— 2014.
7. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло.— М.: Изд. центр “Академия”, 2006.
8. **Hadjiconstantinou N., Garcia A., Bazant M., and He G.** Statistical error in particle simulations of hydrodynamic phenomena // J. Comp. Phys.— 2003.— Vol. 187.— P. 274–297.
9. **Rogasinsky S.V., Levin D.A., and Ivanov M.S.** Statistical errors of DSMC results for rarefied gas flows // Proc. of 25-th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics / A.K. Rebrov, M.S. Ivanov.— Novosibirsk: Publ. House SB RAS, 2007.— P. 391–395.
10. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Some approaches to error analysis and optimization of the DSMC method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.— 2010.— Vol. 25, № 2.— P. 147–167.
11. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Comparison of different approaches to evaluation of statistical error of the DSMC method // AIP Conf. Proc. / 1501: Proc. 28-th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Melville, New York, July 9–13, 2012 / M. Mareschal, A. Santos.— 2012.— Vol. 1.— P. 503–510.
12. **Garcia A.** Estimating hydrodynamic quantities in the presence of microscopic fluctuations // Commun. Appl. Math. Comput. Sci.— 2006.— Vol. 1.— P. 53–78.

13. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Theoretical and numerical analysis of approaches to evaluation of statistical error of the DSMC method // *Comput. Fluids*. — 2014. — Vol. 105. — P. 251–261.
14. **Нараев С.В.** Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова // *Теория вероятности и ее применения*. — 1957. — Т. 2, № 4. — С. 389–416.
15. **Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.** Независимые и стационарно связанные величины. — М.: Наука, 1965.
16. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Статистическая физика. Часть 1. — М.: Наука, 1976.
17. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.
18. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Selection of sampling numerical parameters for the DSMC method // *Comput. Fluids*. — 2012. — Vol. 58. — P. 102–111.
19. **Плотников М.Ю., Шкарупа Е.В.** Комбинированный подход к оцениванию статистической погрешности метода прямого статистического моделирования // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики*. — 2015. — Т. 55, № 11. — С. 138–151.

*Поступила в редакцию 15 сентября 2015 г.,  
в окончательном варианте 4 февраля 2016 г.*

### Литература в транслитерации

1. **Bird G.A.** Perception of numerical methods in rarefied gasdynamics // 118: Proc. of 16-th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics / E.P. Muntz, D.P. Weaver, and D.H. Campbell. — Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1989. — P. 211–226.
2. **Ivanov M.S., Rogasinsky S.V.** Analysis of the numerical techniques of the direct simulation Monte Carlo method in the rarefied gas dynamics // *Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling*. — 1988. — Vol. 3, № 6. — P. 453–465.
3. **Titarev V.A., Shakhov E.M.** Effektivnyy metod resheniya zadachi o techenii razrezhennogo gaza v ploskom kanale bol'shoy konechnoy dliny // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki*. — 2012. — Т. 52, № 2. — С. 288–303.
4. **Cheremisin F.G.** Reshenie kineticheskogo uravneniya Bol'tsmана dlya vysokoskorostnykh techeniy // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki*. — 2006. — Т. 46, № 2. — С. 329–343.
5. **Bird G.A.** *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. — Oxford: Clarendon Press, 1994.
6. 1628: Proc. of 29-th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Xi'an, China, July 13–18, 2014. / J. Fan // *AIP Conf. Proc.* — 2014.
7. **Mikhailov G.A., Voytishchik A.V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo. — М.: Izd. tsentr “Akademiya”, 2006
8. **Hadjiconstantinou N., Garcia A., Bazant M., and He G.** Statistical error in particle simulations of hydrodynamic phenomena // *J. Comp. Phys.* — 2003. — Vol. 187. — P. 274–297.
9. **Rogasinsky S.V., Levin D.A., and Ivanov M.S.** Statistical errors of DSMC results for rarefied gas flows // Proc. of 25-th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics / A.K. Rebrov, M.S. Ivanov. — Novosibirsk: Publ. House SB RAS, 2007. — P. 391–395.
10. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Some approaches to error analysis and optimization of the DSMC method // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* — 2010. — Vol. 25, № 2. — P. 147–167.
11. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Comparison of different approaches to evaluation of statistical error of the DSMC method // *AIP Conf. Proc.* / 1501: Proc. 28-th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Melville, New York, July 9–13, 2012 / M. Mareschal, A. Santos. — 2012. — Vol. 1. — P. 503–510.

12. **Garcia A.** Estimating hydrodynamic quantities in the presence of microscopic fluctuations // Commun. Appl. Math. Comput. Sci.—2006.— Vol. 1.— P. 53–78.
13. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Theoretical and numerical analysis of approaches to evaluation of statistical error of the DSMC method // Comput. Fluids.—2014.— Vol. 105.— P. 251–261.
14. **Nagaev S.V.** Nekotorye predel'nye teoremy dlya odnorodnykh tsepey Markova // Teoriya veroyatnosti i ee primeneniya.—1957.— Т. 2, № 4.— S. 389–416.
15. **Ibragimov I.A., Linnik Yu.V.** Nezavisimye i statsionarno svyazannye velichiny.— M: Nauka, 1965.
16. **Landau L.D., Lifshits E.M.** Statisticheskaya fizika. Chast' 1.— M.: Nauka, 1976.
17. **Ermakov S.M., Mikhailov G.A.** Statisticheskoe modelirovanie.— M.: Nauka, 1982.
18. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Selection of sampling numerical parameters for the DSMC method // Comput. Fluids.—2012.— Vol. 58.— P. 102–111.
19. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Kombinirovanny podkhod k otsenivaniyu statisticheskoy pogreshnosti metoda pryamogo statisticheskogo modelirovaniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki.—2015.— Т. 55, № 11.— S. 138–151.