

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБРАЗЦОВ ПОРОД**

**В. Е. Миренков, А. А. Красновский**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
E-mail: mirenikov@misd.nsc.ru,  
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Обсуждаются вопросы математического моделирования деформирования образцов пород и, в частности, проблема жесткого и мягкого нагружения. Формулируется обратная задача идентификации механических свойств, граничных условий и геометрии ослаблений с использованием переопределенных условий по замерам смещений и акустической электромагнитной эмиссии, характеризующей разрушение пород под нагрузкой.

*Деформирование, образец, упругая модель, механические характеристики, граничные условия, смещения, акустическая эмиссия (АЭ)*

Процедура определения констант материала основана на использовании экспериментальных данных, полученных, как правило, при механических испытаниях в условиях, максимально приближенных к одноосному деформированию. Классические экспериментальные методы определения деформационных характеристик пород основываются на испытаниях представительного количества образцов и часто оказываются малоэффективными в связи с существенным влиянием на результаты измерений условий закрепления, способа нагружения, технологических трудностей изготовления одинаковых образцов и т. п. Поэтому достоверную информацию о механических свойствах материалов можно получить лишь на основе результатов испытаний, в которых контролируются не только усилие (главный вектор) и удлинение образца, но и смещения его поверхности, что приводит к необходимости решения обратных задач [1 – 5].

Для описания закритического поведения и разрушения твердого тела необходимо моделирование этих процессов с учетом таких важных факторов, как существующие внутренние дефекты, их зарождение, рост и т. д. Замечено, что если растягивать цилиндрический образец с нанесенной круговой выточкой до разрушения, то он окажется более прочным, чем гладкий образец, при условии, что площади наименьшего сечения у них одинаковы. Это еще раз подтверждает, что сложное напряженное состояние в первом случае, в отличие от близкого к одноосному во втором, может увеличить предел прочности. Аналогичная картина наблюдается, когда гладкий образец подвергается гидростатическому давлению, после чего прикладывается дополнительно одноосное усилие. Гидростатическое давление приводит к увеличению предела

прочности образца на сжатие. Однако при этом не обращается внимания на изменение граничных условий при проведении таких экспериментов и необходимость формулировки обратных задач для их идентификации.

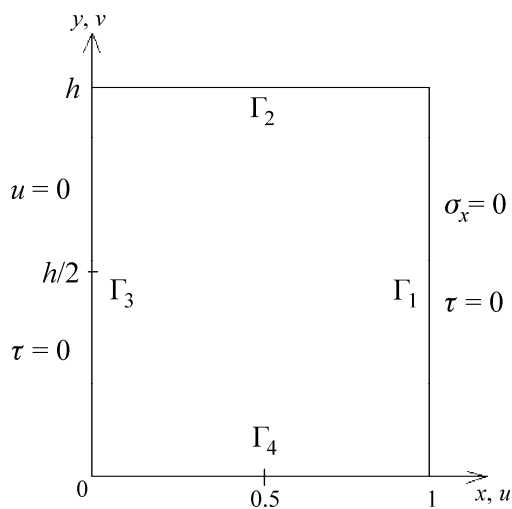


Рис. 1. Расчетная схема

Для однородного прямоугольного образца пород рассмотрим четыре варианта симметричных граничных условий, которые для его четверти (рис. 1) сформулируем следующим образом: на  $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$  граничные условия одинаковы для всех задач, т. е.

$$\sigma_x = 0, \quad \tau = 0 \text{ на } \Gamma_1; \quad u = 0, \quad \tau = 0 \text{ на } \Gamma_3; \quad v = 0, \quad \tau = 0 \text{ на } \Gamma_4; \quad (1)$$

на  $\Gamma_2$  имеем

$$\sigma_y = \sigma_0, \quad \tau = 0 \text{ или } v = v_0, \quad \tau = 0 \text{ или } v = v_0, \quad u = 0 \text{ или } \sigma_y = \sigma_0, \quad u = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  — граница рассматриваемой четверти образца;  $u, v$  — компоненты смещений в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $\sigma_x, \sigma_y, \tau$  — компоненты смещений и напряжений,  $\sigma_0 = \text{const}, v_0 = \text{const}$ .

Система уравнений, связывающая граничные значения для таких задач, имеет вид [1]

$$f(t_0) + 2\mu g(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) + 2\mu g(t)}{t - t_0} dt, \quad (3)$$

$$k \overline{f(t_0)} - 2\mu \overline{g(t_0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k \overline{f(t)} - 2\mu \overline{g(t)}}{t - t_0} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (f(t) + 2\mu g(t)) d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0},$$

где  $k = 3 - 4\gamma$ ;  $\mu = E[2(1 + \gamma)]^{-1}$ ;  $\gamma$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль Юнга;  $t_0$  — аффикс точки границы  $\Gamma$ ;  $i$  — мнимая единица;  $g = u + iv$ ;

$$f(t) = i \int_0^t (X_n + iY_n) ds = f_1 + if_2, \quad (4)$$

$X_n, Y_n$  — компоненты напряжений в направлении осей  $x$  и  $y$ ; черта над функцией обозначает комплексно сопряженное значение. Система уравнений (3) характеризует единообразно три основные задачи теории упругости.

Результаты решения задач (1), (2) показали, что первое и второе условия из (1) и (2) обеспечивают одноосное напряженно-деформированное состояние; третье и четвертое граничные условия из (1) и (2) — “качественно подобные” состояния, которые уже не являются одноосными. Возникают касательные напряжения на  $\Gamma_2$  и нормальные напряжения  $\sigma_x$  на  $\Gamma_3$ . Растягивающие напряжения  $\sigma_x$  на  $\Gamma_2$  максимальны в точке ( $y = h, x = 0$ ), далее убывают до нуля и переходят в сжимающие, приближающиеся к нулю в окрестности точки ( $y = 0, x = 0$ ). Условие для третьей и четвертой задач из (2) начинает сказываться в окрестности границы  $y = h$ , а в окрестности границы  $y = 0$  отличия в смещениях нет во всех четырех задачах.

Полученные результаты говорят о том, что нельзя судить о результатах экспериментов по деформированию образцов пород без учета типа испытательных машин. Особенно это касается “жестких” машин. Диаграммы с участками разупрочнения (ниспадающая ветвь) не являются характеристиками материала и не могут использоваться в этом качестве в расчетах разрушения в рамках математической теории упругопластичности: во-первых, ниспадающая ветвь характеризует не поведение материала в точке, а интегральную диаграмму деформирования образца, т. е. демонстрирует не реологическую неустойчивость, а конструкционную; во-вторых, краевые задачи для системы уравнений упругопластичности на участках разупрочнения становятся некорректными (из-за нарушения на них критерия Друккера устойчивости материала), т. е. теряются свойства непрерывной зависимости решения от входных данных. При численных расчетах получаются результаты, демонстрирующие отсутствие сходимости решения.

Например, пресс INSTRON 8802, имеющийся в ИГД СО РАН, позволяет вести “жесткое” нагружение (задается скорость осевого нагружения) и “мягкое” (задается скорость перемещения траверсы прессы). Результаты экспериментов получают с той или иной точностью, которая, как правило, почти не обсуждается; полученные в неопределенных условиях данные используются при пересчете смещений в напряжения, а это уже обратная задача и во всех известных методах определения напряжений некорректность методов не исследуется. Определение в лабораторных условиях механических характеристик материалов на образцах основано на одномерности деформирования, однако совсем не ясно, какие граничные условия выдает установка (мягкие и жесткие прессы — результаты разные и несравнимые). Отношение значений прочности на растяжение и сдвиг может достигать 40 : 1 (например, в породах с прослойками), отсюда трудности при соединении образца с нагружающим механизмом. Даже для плоских образцов еще не создано способа их крепления в испытательной установке, который не оказывал бы влияния на результат определения прочности. Еще более сложной является проблема крепления образцов круглого сечения.

На рис. 2 приведены диаграммы  $\sigma - \varepsilon$ , полученные на жестком и на мягком прессе, заимствованные из [6]. Одним из требующих объяснения фактов, который никак не объяснялся ранее, является заметное изменение деформационно-прочностных свойств пород (возрастание модулей Юнга, упрочнения) при изменении типа нагружения. Остается признать, что существенное влияние на деформационно-прочностные свойства пород может оказывать не только геометрия образца, но и условия крепления его в прессе, что в свою очередь определяет реализуемые граничные условия. Здесь имеется в виду, что граничные условия в предположении одноосного нагружения, как правило, никогда не контролировались и не реализовывались на практике.

Существенное различие результатов, получаемых на жестком и мягком прессе, связано с различием закрепления образцов. По существу, можно провести аналогию между этими прессами и видами идеальных связей: жесткая заделка и шарнирно неподвижная. Жесткая заделка

исключает взаимное смещение соединяемых тел. Значит, на жестком прессе модуль Юнга больше, чем на мягком. В жестком прессе исключается сдвиг, т. е. сразу повышается предел прочности образца. В мягком сама конструкция крепления допускает поворот образца, т. е. реализуется сдвиг, и прочность на сдвиг становится меньше.

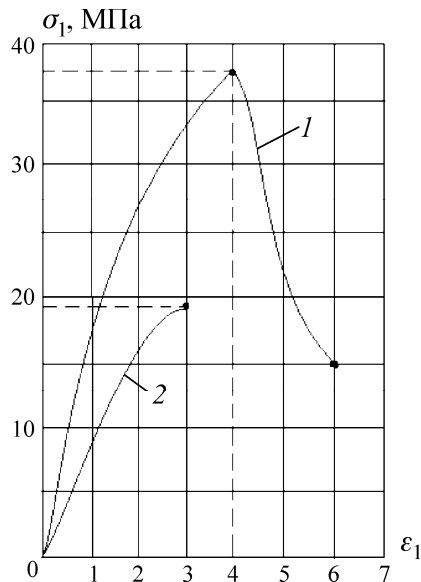


Рис. 2. Диаграмма напряжения – деформации: 1 — получена на жестком прессе при  $\epsilon_1 = 0.01$  мм/с; 2 — на мягком прессе при  $\sigma_1 = 0.35$  Па/с

В жестком прессе более специфические, трудно реализуемые и плохо контролируемые условия нагружения. Именно поэтому предел прочности, полученный на жестком прессе для одинаковых образцов, примерно в 2 раза больше, чем на мягком (см. рис. 2). Возникает вопрос, какое нагружение реализуется в реальной конструкции? По-видимому, всегда реализуется промежуточный вариант и нужно учитывать промежуточные значения механических характеристик, лежащие между значениями, полученными на жестких и мягких прессах.

Таким образом, все процессы в образце, от начала деформирования до разрушения, определяются граничными условиями. Для увеличения предела прочности (приближающегося к теоретическому) нужно исключить вращение образца и, как следствие, обеспечить такие же граничные условия для конструкции. Сложное напряженное состояние дает возможность материалу приблизиться к теоретической прочности и увеличить модуль Юнга, определяемый при одноосном нагружении (или близким к нему). Чем значительнее напряженное состояние отличается от чисто одноосного, тем в большей степени модуль Юнга зависит от напряжений, создаваемых в образце. Обжатие образца можно трактовать как уменьшение возможности образца поворачиваться, что эквивалентно увеличению жесткости захватов установки.

Нанотехнологии связаны с созданием уникальных свойств материалов с использованием наночастиц. Аналогичный и более дешевый вариант этого эффекта можно достичь созданием сложного напряженного состояния в конкретной детали. Верно и обратное: если созданную из наночастиц деталь нагрузить соответствующим усилием, то она поведет себя как обычная деталь.

Согласно результатам работ [1, 7] и решениям задач (1), (2), при растяжении плоского образца поры концентрируются в окрестности границы  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq \epsilon$ , вызывая изменение модуля Юнга в этом месте (величина  $\epsilon$  может определяться по результатам, например, АЭ). Модели-

руя эту часть границы математическим разрезом и усредняя значения  $\sigma_y = \sigma_0$  на  $0 \leq x \leq \varepsilon$ ,  $y = 0$ , можно оценить изменение деформаций в образце. На рис. 3 приведены результаты расчета смещения грани  $\Gamma_1$  (см. рис. 1) для различных значений  $\sigma_0 = 0.98; 0.9; 0.8; 0.7$  с  $\varepsilon = 0.25$ . Другими словами, в задаче (1), (2) граничные условия  $v = 0$  на  $\Gamma_4$  для отрезка  $0 \leq x \leq \varepsilon$ ,  $y = 0$  заменены на  $\sigma_y = \sigma_0$ . Как следует из рис. 3, образование пор приводит к развитию шейки при растяжении образца или выпучиванию при сжатии. Рассмотренная последовательность операций, приводящая к результатам, представленным на рис. 3, является алгоритмом к методу математического моделирования процесса накопления и реализации дефектов в образце пород.

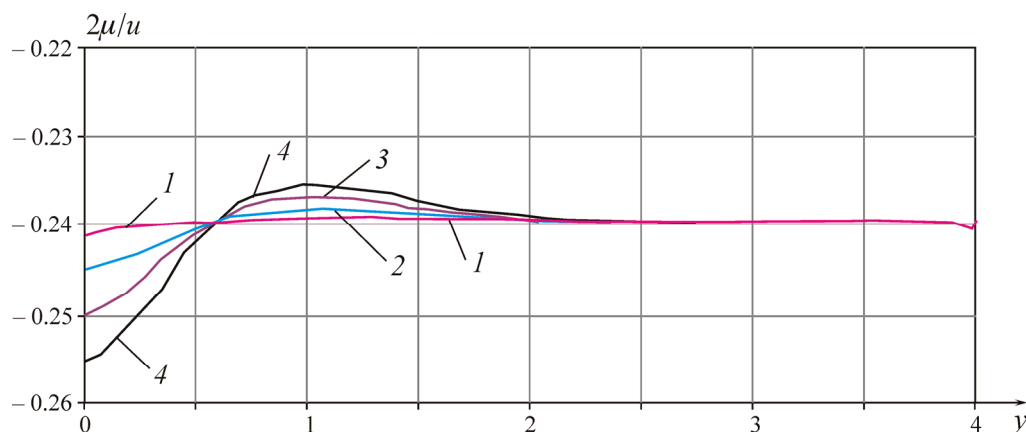


Рис. 3. Смещение грани  $\Gamma_1$  при моделировании дефектов трещиной со связями: 1 – 4 — варианты граничных условий (1), (2)

Таким образом, предложен алгоритм моделирования процесса формирования трещин в области концентрации пор. Область концентрации пор рассматривается как трещина со связями, свойства которых изменяются в процессе нагружения. Напряжения в связях и протяженность ослабленных связей определяются по результатам АЭ. Измерение интенсивности потока АЭ позволяет исследовать процесс накопления повреждений. Однако методу АЭ, как и любому другому, присущи некоторые недостатки, сильно сужающие область его применения. Расширение границ применения АЭ возможно при рассмотрении обратных задач аналогично [1, 4, 8], позволяющих расшифровывать показания АЭ.

## ВЫВОДЫ

1. Модуль Юнга, используемый в расчетах на прочность, жесткость и устойчивость, должен определяться на мягком прессе при контроле за выполнением условия одноосного нагружения. Ниспадающая ветвь на диаграмме  $\sigma - \varepsilon$ , т. е. разупрочнение, характеризует структуру материала и не может применяться в расчетах разрушения в рамках классической теории упругопластичности.

2. Предложен алгоритм моделирования процесса накопления дефектов в образце математическим разрезом со связями, регистрируемыми АЭ. Полученные результаты предполагается использовать для расшифровки показаний АЭ из анализа решений обратных задач.

3. Процесс деформирования образца вплоть до разрушения определяется граничными условиями. Создание уникальных свойств материалов возможно не только с помощью нанотехнологий, но и путем создания сложного напряженного состояния в конкретной детали.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Миренков В. Е., Красновский А. А.** К вопросу накопления повреждений в кусочно-однородном блоке пород при сжатии // ФТПРПИ. — 2012. — № 4.
2. **Опарин В. Н., Акинин А. А., Востриков В. И., Юшкин В. Ф.** Нелинейные деформационные процессы в окрестности выработок. Ч. I // ФТПРПИ. — 2003. — № 4.
3. **Опарин В. Н., Тапсиев А. П., Розенбаум М. А. и др.** Зональная дезинтеграция горных пород и устойчивость подземных выработок. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.
4. **Назаров Л. А., Назарова Л. А., Козлов А. М.** Оптимизация режима работы группы вибрационных источников для генерации волновых полей с заданным пространственным распределением // ФТПРПИ. — 2005. — № 1.
5. **Усольцева О. М., Назарова Л. А., Цой П. А., Назаров Л. А., Семенов В. Н.** Исследование генезиса и эволюции нарушений сплошности в геоматериалах: Теория и лабораторный эксперимент // ФТПРПИ. — 2013. — № 1.
6. **Шейнин В. И., Блохин Д. И.** Исследования особенностей проявления термомеханических эффектов при одноосном сжатии образцов пород // ФТПРПИ. — 2012. — № 1.
7. **Ужик Г. В.** Метод определения сопротивления материалов разрушению от отрыва // Изв. АН СССР. — ОТН. — 1948. — № 10.
8. **Опарин В. Н., Яковицкая Г. И., Вострецов А. Г., Серяков В. М.** О коэффициенте механоэлектромагнитных преобразований при разрушении образцов горных пород // ФТПРПИ. — 2013. — № 3.

*Поступила в редакцию 5/VI 2013*